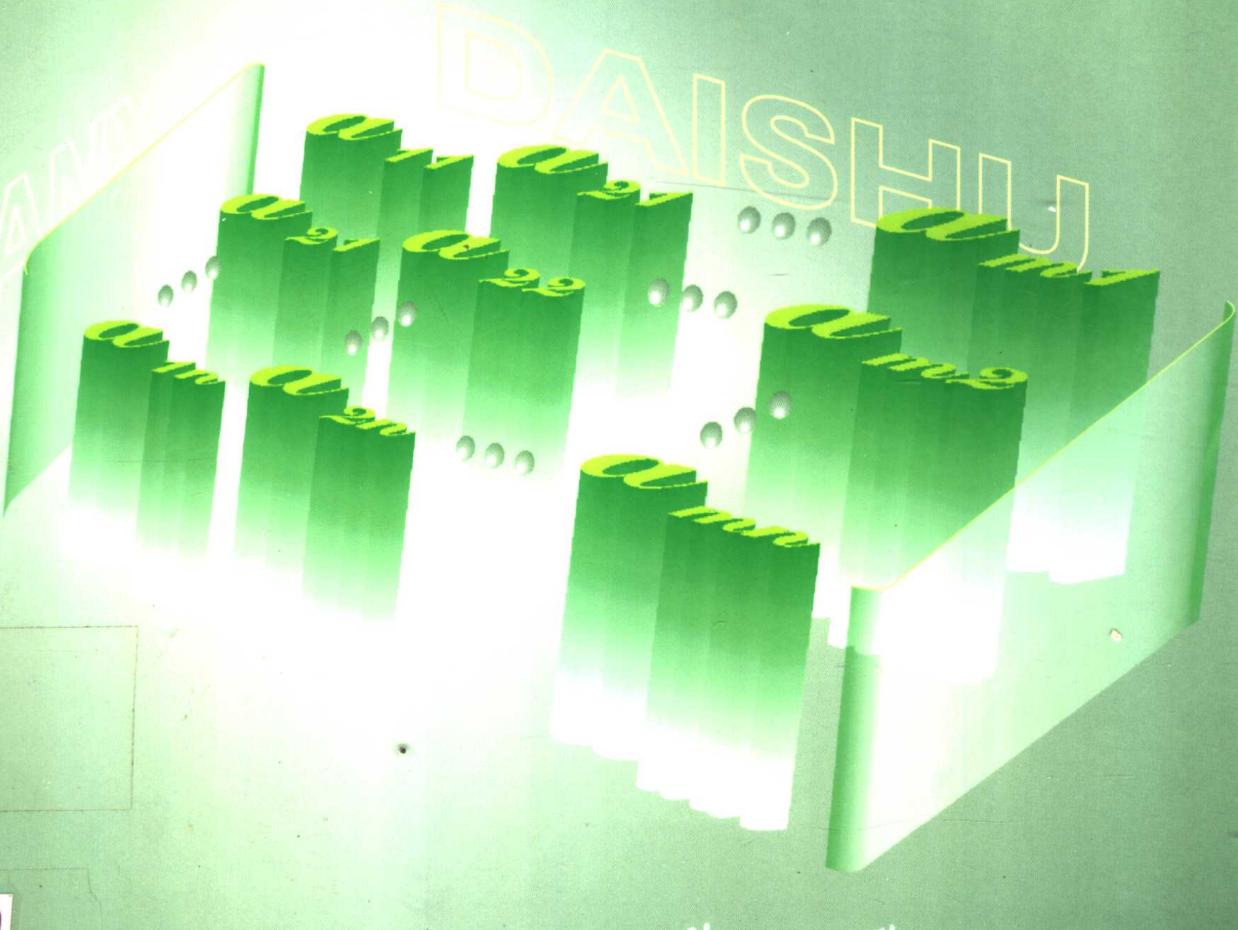
龚乐春
单鉴华 编

胡秉民 审

线性代数



浙江大學出版社

线性代数

龚乐春　单鉴华　编
胡秉民　审

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／龚乐春，单鉴华编．—杭州：浙江大学出版社，2002.10
ISBN 7-308-03161-6

Ⅰ．线...　Ⅱ．①龚...②单...　Ⅲ．线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 073162 号

责任编辑　邹小宁
出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　11
字　　数　197 千
版　　次　2002 年 10 月第 1 版
印　　次　2003 年 11 月第 2 次印刷
印　　数　1001—3000
书　　号　ISBN 7-308-03161-6/O・288
定　　价　16.50 元

内 容 简 介

本书介绍了线性代数基础知识。全书共分四章，包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型。各章配有习题，书后附有习题答案。

本书可作为高等院校各专业线性代数教材或参考书。

前　言

线性代数是一门基础数学课程，它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性。学好这一门课程不仅对学习后继课程是必不可少的，而且对掌握现代科学理论并应用于实际也是很有必要的。

编者在多年的线性代数教学实践基础上编写了本教材，力求以通俗的语言向读者介绍线性代数最基础的知识。全书共分四章。第一章的内容以行列式为中心，叙述了行列式的概念、性质与计算，以及用克莱姆法则求解方程个数与未知量个数相同的线性方程组的方法。第二章讨论了矩阵的运算、可逆矩阵、矩阵初等变换、矩阵的秩等概念。第三章讲述了 n 维向量的线性相关性概念，详细讨论了线性方程组的求解、有解的条件以及解的结构。第四章介绍了矩阵的特征值理论和实二次型理论，讨论了矩阵可对角化的条件，实对称矩阵的对角化问题以及用这些理论解决实二次型的标准化问题。全书在内容的编写上力求做到科学性与通俗性相结合，先具体后抽象，由浅入深，逐步提高，并力求条理清楚，重点突出。

胡秉民教授对本书的构思提出了具体的宝贵意见，并对全书作了系统而全面的审阅。

由于水平有限，不妥或谬误之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正。

编　者

2002 年 7 月

目　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的一个基本内容.本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法及其在求解线性方程组中的应用.

§1　n 阶行列式的定义

1.1　二阶、三阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

以 a_{22} 乘第一个方程两边,以 a_{12} 乘第二个方程两边,然后两式相减,消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

类似消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\ ,\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

称 D 为二阶行列式,横排称为行,竖排称为列,数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.2)的元素.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

从(1.2)式可知二阶行列式是两项的代称和.第一项是从左上角到右下角连线(称为主对角线)上两元素的乘积,取正号.第二项是从右上角到左下角连线(称为次对角线)上两元素的乘积,取负号.

利用二阶行列式的概念,可得下列两个二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}\ ,\ x_2=\frac{D_2}{D}$$

下面介绍三阶行列式的概念. 记

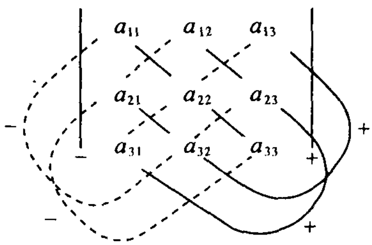
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.3}$$

(1.3)式称为三阶行列式.

从(1.3)式可知三阶行列式是六项的代数和. 可用画线的方法记忆



其中，各实线(平行于主对角线的连线)连接的三个元素的乘积是代数和的正项，各虚线(平行于次对角线的连线)连接的三个元素的乘积是代数和的负项.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix}$$

解 $D=2x^2+x+4-4x-x^2-2$
$=x^2-3x+2$

下面分析二阶、三阶行列式的共同特征.

(1) 二阶行列式是2! =2项的代数和，其中每一项是取自不同行不同列

的两个元素的乘积.三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和,其中每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积.

(2) 行列式各项的符号是正负各占一半.二阶行列式是一项正一项负,三阶行列式是三项正三项负.

为了确定行列式各项所带符号的规律,需要引进有关排列与逆序数的概念.

1.2 排列与逆序数

由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 作为元素组成的一个有序数组,称为一个 n 阶排列(或 n 级排列).n 阶排列的一般形式可表示为

$$i_1i_2\cdots i_n$$

其中,$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数,且互不相同,下标分别表示这些数在 n 阶排列中的次序.n 阶排列共有 $n!$ 个.在 $n!$ 个 n 阶排列中,$123\cdots(n-1)n$ 是按数码从小到大的次序组成的一个排列,称为 n 阶标准排列.

定义 1 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码的一个 n 阶排列,考虑元素 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$,如果比 i_k 大的且排在 i_k 前面的元素有 t_k 个,就称 i_k 这个元素的逆序数是 t_k.全体元素的逆序数之和 $t=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k=t_1+t_2+\cdots+t_n$,称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数是奇数,则称该排列为奇排列;如果逆序数是偶数或零,则称该排列为偶排列.

例 2 求下列排列的逆序数:

(1) 43521　　　　(2) 23541

(3) $123\cdots(n-1)n$　　　　(4) $n(n-1)\cdots21$

解 (1) $\tau(43521)=0+1+0+3+4=8$,所以 43521 为偶排列.

(2) $\tau(23541)=0+0+0+1+4=5$,所以 23541 为奇排列.

(3) $\tau(123\cdots(n-1)n)=0+0+\cdots+0=0$,所以 $123\cdots(n-1)n$ 为偶排列.

(4) $\tau(n(n-1)\cdots21)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

将一个排列中的某两个元素互换位置,其他元素不动,就得到另一个排列,这样的变换称为对换.例如,排列 43521 中元素 4 和 2 互换位置变为排列 23541,使得偶排列变为奇排列。一般有:

性质 1 排列经过一次对换改变奇偶性.

证 先证相邻两个元素对换的情形.设排列 $\cdots i_ki_{k+1}\cdots$ 经过 i_k,i_{k+1} 对换后

变为排列$\cdots i_{k+1}i_k\cdots$，这里“$\cdots$”表示排列中那些不动的数码. 显然，此时仅有i_k与i_{k+1}这两个元素的逆序数有可能发生变化，当$i_k<i_{k+1}$时，经对换后i_k的逆序数增加1，而i_{k+1}的逆序数不变；当$i_k>i_{k+1}$时，经对换后i_k的逆序数不变而i_{k+1}的逆序数减少1. 所以排列$\cdots i_k i_{k+1}\cdots$与排列$\cdots i_{k+1}i_k\cdots$的奇偶性不同.

再证一般对换的情形. 设对换的两个元素i_k和i_j中间有s个元素，即设排列为$\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+s}i_j\cdots$，经过$i_k,i_j$对换后，变为排列$\cdots i_j i_{k+1}\cdots i_{k+s}i_k\cdots$，上述对换可先将排列$\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+s}i_j\cdots$作$s$次相邻对换，变成$\cdots i_k i_j i_{k+1}\cdots i_{k+s}\cdots$再作$s+1$次相邻对换，变成$\cdots i_j i_{k+1}\cdots i_{k+s}i_k\cdots$来完成. 总之，经$2s+1$次相邻对换，排列$\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+s}i_j\cdots$变为排列$\cdots i_j i_{k+1}\cdots i_{k+s}i_k\cdots$，而$2s+1$是奇数，所以这两个排列的奇偶性不同.

性质2 当$n\geqslant 2$时，在$n!$个n阶排列中，奇偶排列各占一半，即各有$\frac{1}{2}n!$个.

证 $n!$个排列可由某一个排列开始，经过对换，把它们全部排出来，由于对换改变排列的奇偶性，所以，这样得到的n阶排列，其奇偶性是相间出现的. 当$n\geqslant 2$时，$n!$是偶数. 如果从奇(偶)排列开始，必以偶(奇)排列结束，因此，奇偶排列各占一半.

1.3 *n* 阶行列式的定义

为了定义n阶行列式，再来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(1) 三阶行列式的每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积，任一项除正负号外可写成$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中行标排成标准排列123，而列标排成$j_1j_2j_3$，它是1，2，3三个数的某个排列，而三阶排列共有六个，故三阶行列式共有六项.

(2) 各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123，231，312；

带负号的三项列标排列是：132，213，321.

带正号的三个排列都是偶排列，带负号的三个排列都是奇排列. 因此，各项所带的正负号可表示为$(-1)^t$，其中$t=\tau(j_1j_2j_3)$.

所以，三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中,$t = \tau(j_1 j_2 j_3)$,$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $j_1 j_2 j_3$ 取和.

下面定义 n 阶行列式.

定义 2 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列,记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

称为 n 阶行列式. 它表示(1.4)式中所有属于不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$(称为一般项)的代数和,其中,$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是某个 n 阶排列,故共有 $n!$ 项,每项符号按下述规则确定:当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时取正号,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时取负号. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

其中,$t = \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$,$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

n 阶行列式可简记为 D, D_n 或 $|a_{ij}|_n$.

当 $n = 1$ 时,一阶行列式 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$.

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由行列式的定义,D 的每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积. 由于 $a_{ij} = 0(i < j)$,故 D 中可能不为 0 的项只能是分别取自第 1 行的 a_{11},第 2 行的 a_{22},第 3 行的 a_{33},$\cdots$,第 n 行的 a_{nn} 的乘积,即 $a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$. 所以

$$D = (-1)^{\tau(123\cdots n)} a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn} = (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式.

同理,可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

特别对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 D 中可能不为 0 的项仅为 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$. 这项列标排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

n 阶行列式定义中的一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 也可改写为 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$,即取自于不同列不同行的 n 个元素的乘积,列标是 n 阶标准排列,行标排成 $i_1i_2\cdots i_n$,

它是某个 n 阶排列. 记 $s=\tau(i_1i_2\cdots i_n)$，$t=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，根据对换理论可以证明 $(-1)^s=(-1)^t$，于是，改写后的一般项的符号可由 $(-1)^s$ 确定，因此，n 阶行列式也可定义为

$$D_n=\sum(-1)^s a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \tag{1.6}$$

其中，$s=\tau(i_1i_2\cdots i_n)$，$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

例 5 在五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列项应取什么符号？

(1) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$

(2) $a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{55}$

(3) $a_{24}a_{42}a_{33}a_{15}a_{51}$

解 (1) $\tau(43125)=5$，故 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$ 带负号.

(2) $\tau(34215)=5$，故 $a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{55}$ 带负号.

(3) $a_{24}a_{42}a_{33}a_{15}a_{51}=a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$，而 $\tau(54321)=10$，故该项带正号.

§2 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 3 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^T$.

证 将 D^T 记为

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列定义

$$\begin{aligned} D^T &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}=D \end{aligned}$$

这表明行列式中的行与列地位平等. 行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之也然.

性质 4　互换行列式的两行(列),行列式变号,即

$$\begin{array}{r}\\ \\ 第\ i\ 行\\ \\ 第\ k\ 行\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ 第\ i\ 行\\ \\ 第\ k\ 行\\ \\ \\ \end{array}$$

证　$$\begin{aligned} 左端 &= \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ &= - \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= 右端 \end{aligned}$$

推论　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

证　把这两行互换,有 $D = - D$,所以 $D = 0$.

性质 5　以数 k 乘行列式中某一行(列)中所有元素,等于用 k 去乘此行列式.换言之,行列式某一行(列)所有元素有公因子 k,可将 k 提到行列式记号外相乘,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　$$\begin{aligned} 左端 &= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= 右端 \end{aligned}$$

性质 6　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

由性质 5 及性质 4 的推论便可得到性质 6.

性质 7　如果行列式的某一行(列)的元素都是两数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{i1}' & a_{i2} + a_{i2}' & \cdots & a_{in} + a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左端 $=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{ij_i}+a_{ij_i}')\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}'\cdots a_{nj_n}$$

$=$ 右端

性质 7 可推广到第 i 行(列)各元素为 m 个数(m 为大于 2 的正整数)的和的情形.

性质 8 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 由性质 7

$$\text{右端}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 6，上式第二个行列式为零，故得右端 $=$ 左端.

在计算行列式时，为书写方便起见，约定以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列. 交换第 i、第 j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，第 i 行乘以 k 记作 $r_i \times k$，第 i 行提出

公因子 k 记作 $r_i \div k$,数 k 乘第 j 行加到第 i 行上记作 $r_i + kr_j$;对于列的变换只要把 r 改成 c 即可.

下面例子表明如何利用行列式的性质来简化计算.

例 6 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

反对称行列式为下列形式的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其特点为 $a_{ij} = -a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$,显然,$a_{ii} = 0(i = 1,2,\cdots,n)$.

证 各行提出公因子(-1),得

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n D^T = -D^T = -D$$

故 $D = 0$.

计算行列式常用的一种方法就是利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式,从而算得行列式的值.

例 7 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 2r_1]{r_3 + r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$