

数学

马家祚 王诚祥 主编

高考专题复习系列丛书

名师专题

数列

解题方法与技巧

如何

求 a_n 及 S_n

如何

研究数列中的不等关系

如何

解数列应用题

● 河海大学出版社

MINGSHI ZHUANTI

MINGSHI ZHUANTI

名师专题

数列

解题方法与技巧

责任编辑 代江滨 策划编辑 代江滨 责任校对 刘凌波 封面设计 黄 炜

函数与导数

解题方法与技巧

不 等 式

解题方法与技巧

数 列

解题方法与技巧

排列组合和概率

解题方法与技巧

直线、平面、简单几何体

解题方法与技巧

直线与圆锥曲线

解题方法与技巧

ISBN 7-5630-2278-3



9 787563 022786 >

ISBN 7-5630-2278-3
O · 127 定价：9.00 元

数 列

解题方法与技巧

主 编

马家祚 王诚祥

副主编

魏丽光

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数列/马家祚,王诚祥主编.—南京:河海大学出版社,2006.8

(名师专题)

ISBN 7-5630-2278-3

I. 数... II. ①马... ②王... III. 数列—高中—教学参考资料 IV. G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 091069 号

书 名/数列

书 号/ISBN 7-5630-2278-3/O·127

责任编辑/代江滨

策划编辑/代江滨

责任校对/刘凌波

封面设计/黄 炜

出 版/河海大学出版社

地 址/南京市西康路 1 号(邮编:210098)

电 话/(025)83737852(总编室) (025)83722833(发行部)

印 刷/泰州人人印务有限公司

开 本/850 毫米×1168 毫米 1/32 5.875 印张 120 千字

版 次/2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

定 价/9.00 元



前言

有关数列的问题，一直是高考考查的重点。这是因为，一方面，数列本身就是重要的基础知识，它与数、式、函数、方程、不等式，甚至三角、几何等均有着密切的联系，而且也是学习高等数学的基础。另一方面，数列中包含着许多重要的数学思想方法，如转化思想、分类讨论思想、方程函数思想，以及递推的方法、归纳的方法、消元的方法、数学归纳法等。可见，通过数列的考查可较好地地区分考生能力的高低及继续学习的潜能。因而，在越来越重视考查能力的今天，数列作为考查能力的知识载体而受到命题者的青睐就是很自然的了。

高考中对数列的考查，概括起来那就是一个中心、两个基本点、三个重点问题、四种数学思想方法。

一个中心，那就是以等差、等比数列为中心。等差、等比数列是应用最广的两种数列，也是教材中重点研究的两种数列。高考中的数列题一般都是围绕这两种数列展开的。

两个基本点，那就是求通项与求和是两个最基本的考点。我们一定要掌握求通项与求和的几种常用方法，这是解数列问题必备的基本功。

三个重点问题，那就是递推数列，数列与函数、方程、不等式的综合题，数列的实际应用问题。一些比较复杂的数列问题常常以递推式的形式出现，也常常和函数、不等式的问题综合在一起考查。

四种数学思想方法，那就是递推、归纳、方程函数、分类讨论等思想方法。

本书将上述内容分五讲来复习研究，把对数学思想方法的复

习渗透在各讲之中.读者在复习的过程中要特别重视方法的总结和数学思想的提炼,灵活运用这些数学思想方法来思考问题、解决问题,而这正是提高数学素养、提高解题能力的关键所在.

为了切实提高本书的实效,使读者真正掌握数列常见题型的解题方法和技巧,并不断提高思维能力和综合运用数学知识解决问题的能力,编者在选材和编排上都作了一些努力:

(1) 内容选择,紧扣高考“脉搏”.

从题型的确定,到例题、习题的编选,完全顺从高考的最新动态,其中的例题、习题精选自近年的高考题、名市名校的模拟试题以及根据编者对高考的理解,适应复习需要所编拟的原创题.

(2) 体例安排,突出思路方法.

在例题的解答中,前有“分析”,后有“说明”.在分析中,帮助读者理清解题思路,教给读者分析问题的方法;在说明中,总结解题方法,揭示解题规律,指出注意事项,以便读者举一反三、触类旁通,切实掌握各种题型的解法.

(3) 表现手法,符合思维规律.

数学的抽象性,给数学学习造成了很大困难,不少同学对所学概念、定理、公式等不能灵活运用于解题.为此,本书采用让题目“说话”的策略,尽量避免空泛的理论,把基础知识、技能技巧、思想方法融于题目之中,再通过精当的点评加以归纳总结,对照题目,使那些抽象的数学思想方法变为看得见、学得会、用得上的东西.

为了提高本书的使用效果,我们希望读者能与编者配合,变被动阅读为主动学习.在阅读例题之前,先自己试着思考,然后再看分析与解答,在解答以后再想想有哪些收获,仔细推敲题后的说明.我们恳切地希望这本书能成为你学习数学的良师益友.

书中的不当之处,敬请读者批评指正.同时,对书中引用的相应考题和资料的提供者表示衷心的感谢.

编 者

2006年6月



目 录

前 言	1
第一讲 等差数列和等比数列	1
1. 基本量的运算	2
2. 关于等差、等比数列的判定及证明	8
3. 等差、等比数列中的大小比较	18
4. 图形中的等差数列和等比数列	28
习题一	36
第二讲 数列的通项与求和	41
1. 求数列的通项	42
2. 数列求和	52
3. 通项与求和的综合问题	61
习题二	68
第三讲 递推数列	72
1. 递推式与通项公式	72
2. 递推数列性质的研究	86
3. 递推数列和不等式	92
4. 几何图形中的递推数列	100
习题三	108

第四讲 数列综合题.....	114
习题四.....	131
第五讲 数列的实际应用问题.....	135
1. 等差数列和等比数列的实际应用问题	135
2. 递推数列的实际应用问题	144
习题五.....	151
习题参考答案.....	154

第一讲

等差数列和等比数列

等差数列和等比数列是高中阶段重点学习的两种数列,也是应用极广的两种数列.那么,理所当然,也成了高考的热点和重点.

由于这两种数列在研究内容、研究方法、考题类型等方面都是相类似的,而且是互相联系的,因此我们把这两种数列放在一起复习研究.关于这两种数列的知识点总结如下表.

数列	等 差 数 列	等 比 数 列
定义	若 $a_n - a_{n-1} = d$ (常数) ($n \geq 2$), 则称 $\{a_n\}$ 为等差数列, d 为公差	若 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ (常数) ($n \geq 2$), 则称 $\{a_n\}$ 为等比数列, q 为公比
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
前 n 项和公式	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$	$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$
性质	a, b 的等差中项为 $A = \frac{a+b}{2}$; 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$	a, b 的等比中项为 $G = \pm \sqrt{ab}$. 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

近年来高考中的数列题,一般都是围绕等差数列和等比数列的定义、性质、通项公式、前 n 项和的公式展开的.常见题型有:有关 $a_1, d(q), a_n, S_n, n$ 等量的计算;性质的灵活运用;关于等差数列、等比数列的判定和证明;等差数列、等比数列中的大小比较;取值范围问题和最值的计算等.

1. 基本量的运算

例 1 (2004 年全国高考题) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = -24$, $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 78$, 则此数列前 20 项的和等于 ()

A. 160 B. 180 C. 200 D. 220

解 由已知得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_{18} + a_{19} + a_{20} = 54$.

$\because a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18}, \therefore$ 由上式得 $a_1 + a_{20} = 18$.

$\therefore S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = 180$. 故选 B.

说明 按常规思路, 本题可用基本量 a_1 和 d 表示两个已知等式, 解出 a_1 和 d , 进而求得 S_{20} . 但这样运算量要大一点. 一般, 在小题中常常可以运用等差数列或等比数列的性质来简化运算.

例 2 已知 $\{a_n\}$ 是各项不为零的等差数列, $a_{p+1} - a_p^2 + a_{p-1} = 0$, $S_{2p-1} = 38$, 则 p 的值是 ()

A. 38 B. 10 C. 20 D. 9

解 由 $a_{p+1} - a_p^2 + a_{p-1} = 0$ 得 $2a_p - a_p^2 = 0$,

$\because a_p \neq 0, \therefore a_p = 2$.

$\therefore S_{2p-1} = \frac{(2p-1)(a_1 + a_{2p-1})}{2} = (2p-1)a_p = 2(2p-1)$.

故由 $S_{2p-1} = 38$ 得 $2(2p-1) = 38, p = 10$. 故选 B.

说明 本题仍然说明了灵活运用等差数列性质的重要性.

我们若能注意到等差数列前 n 项和的公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$,

在 n 为奇数 $2n-1$ 时, 就转化成了 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$, 就很容易想到本题的解法了.

例 3 (2000 年上海高考题) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10} = 0$, 则有等式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{19-n} (n < 19, a \in \mathbf{N}^*)$ 成立. 类比上述性质, 相应地在等比数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9 = 1$, 则有等式 _____ 成立.

解 先对题中给出的关于等差数列的这一结论作一证明. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $a_{10} = 0$ 得 $a_1 + a_{19} = a_2 + a_{18} = \cdots = a_9 + a_{11} = 2a_{10} = 0$, $\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + a_{19} = 0$. 移项得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = -a_{19-n} - a_{18-n} - \cdots - a_{n+1}$, 而 $-a_{19} = a_1$, $-a_{18} = a_2$, $\cdots$, $-a_{n+1} = a_{19-n}$, 故得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{19-n}$. 若 $a_9 = 0$, 同理可得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{17-n}$ ($n < 17$, $n \in \mathbf{N}^*$). 与此进行类比, 本题则应填: $b_1 b_2 \cdots b_n = b_1 b_2 \cdots b_{17-n}$ ($n < 17$, $n \in \mathbf{N}^*$). 读者不妨模仿上面的证法自行证明.

例 4 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 a_5 + a_3 a_8 + a_5 a_{10} + a_8 a_{10} = 64$, 则该数列前 12 项的和等于_____.

解法 1 $\because a_3 a_5 + a_3 a_8 + a_5 a_{10} + a_8 a_{10} = (a_3 + a_{10})(a_5 + a_8) = (a_1 + a_{12})^2$, $\therefore$ 由已知得 $(a_1 + a_{12})^2 = 64$, $a_1 + a_{12} = \pm 8$.

$$\therefore S_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} = \pm 48. \text{ 即应填 } \pm 48.$$

解法 2 由已知得 $(a_1 + 2d)(a_1 + 4d) + (a_1 + 2d)(a_1 + 7d) + (a_1 + 4d)(a_1 + 9d) + (a_1 + 7d)(a_1 + 9d) = 64$, 即 $4a_1^2 + 44a_1 d + 121d^2 = 64$, 即 $(2a_1 + 11d)^2 = 64$, 即 $2a_1 + 11d = \pm 8$.

$$\therefore S_{12} = 12a_1 + \frac{12(12-1)}{2}d = 6(2a_1 + 11d) = \pm 48.$$

说明 解法 1 灵活运用性质, 运算量较小, 但技巧性较强. 解法 2 把已知条件用基本量 a_1 和 d 表示, 得到 $2a_1 + 11d$ 的值, 这正是计算 S_{12} 所需要的. 这种方法运算量大一点, 但解题过程已程式化, 无需多思考.

例 5 (2002 年新课程卷高考题) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_6 - a_4 = 24$, $a_3 \cdot a_5 = 64$. 求 $\{a_n\}$ 前 8 项的和 S_8 .

分析 列出关于 a_1 和 q 的方程组, 解得 a_1 和 q 后求 S_8 .

解 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 依题意得,

$$\begin{cases} a_1 q^5 - a_1 q^3 = 24 & \text{①} \\ a_1 q^2 \cdot a_1 q^4 = 64 & \text{②} \end{cases}$$

将 $a_1 q^3 = 8$ 代入①, 得 $q = \pm 2$.

$$\therefore \begin{cases} q = 2, \\ a_1 = 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} q = -2, \\ a_1 = -1. \end{cases}$$

$$\therefore S_8 = \frac{1-2^8}{1-2} = 255 \quad \text{或} \quad S_8 = \frac{-(1-2^8)}{1+2} = 85.$$

说明 本题是一道常规的基本运算题,思路正常,难度不大.但根据题意列出的方程组属高次方程组,无固定的程式化的解法,需要我们根据方程组的特征灵活处理.这正是关于等比数列计算题的困难之处,也是对我们运算能力的考查.

$a_6 = 12, \dots$. 将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大、

左小右大的原则写成如右的三角形数表:

(1) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数；

(2) 求 a_{100} .

分析 (1)当 $t=1$ 时, s 只能取0,于是得到第一行中的数3;当 $t=2$ 时, s 可取0和1,于是得到第二行中的两个数5、6;当 $t=3$ 时, s 可取0,1,2,于是得到第3行中的9,10,12.按此规律可写出第四行和第五行.

(2) 因为 a_{100} 形如 $2^t + 2^s$, 故要确定 a_{100} 只需确定 t 和 s , 这只需确定 a_{100} 位于这个数表的第几行第几列即可.

列成表格来解,会看得更清楚.

解 (1) 列表如下:

$2^t + 2^s$ $t \backslash s$	0	1	2	3	4
1	3				
2	5	6			
3	9	10	12		
4	17	18	20	24	
5	33	34	36	40	48

由表格可以看出,三角形数表的第四行是 17, 18, 20, 24; 第五行是 33, 34, 36, 40, 48.

(2) 设 a_{100} 位于上面的表格中的第 n 行, 则前 $n-1$ 行共有 $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 个数. 因此 n 应是满足 $\frac{n(n-1)}{2} < 100$ 的最大自然数, 故 $n = 14$. $n = 14$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 91$. 因此 a_{100} 位于上面数表中的第 14 行第 9 列. 此时, $t = 14, s = 8$, 所以 $a_{100} = 2^{14} + 2^8 = 16640$.

说明 本题除了考查数列的一些基础知识外, 更重要的是考查我们探究问题发现规律的能力.

本题的第(2)小题还可运用排列组合的知识来解: 设 $a_{100} = 2^{t_0} + 2^{s_0}$. 先确定正整数 t_0, s_0 .

数列 $\{a_n\}$ 中小于 2^{t_0} 的项构成的子集为 $\{2^t + 2^s \mid 0 \leq s < t < t_0\}$, 其元素的个数为 $c_{t_0}^2 = \frac{t_0(t_0-1)}{2}$. 依题意, $\frac{t_0(t_0-1)}{2} < 100$, 满足上式的最大整数 t_0 为 14, 所以取 $t_0 = 14$. 于是有 $100 - c_{14}^2 = 9$, $\therefore s_0 = 8$, 即 $a_{100} = 2^{14} + 2^8 = 16640$.

可见, 我们要善于将各部分知识沟通起来, 灵活应用.

例 7 (2005 年湖南高考题) 已知数列 $\{\log_2(a_n - 1)\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 为等差数列, 且 $a_1 = 3, a_3 = 9$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明 $\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < 1$.

分析 (1) 可先写出 $\log_2(a_n - 1)$ 的表达式, 然后解出 a_n .

(2) 可预见 $\left\{\frac{1}{a_{n+1} - a_n}\right\}$ 为等比数列, 故可先求得左端的和, 再得不等式.

解 (1) 由 $a_1 = 3, a_3 = 9$ 得等差数列 $\{\log_2(a_n - 1)\}$ 的首项为 1, 第 3 项为 3, 因而该等差数列的公差为 1.

$$\therefore \log_2(a_n - 1) = n.$$

$$\therefore a_n = 2^n + 1.$$

$$(2) \frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{(2^{n+1} + 1) - (2^n + 1)} = \frac{1}{2^n}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} < 1. \end{aligned}$$

说明 本题将等差数列和等比数列综合在一起, 但思路清楚, 运算量不大, 属中档题. 一般, $\{\log_a a_n\}$ 成等差数列 $\Leftrightarrow \{a_n\} (a_n > 0)$ 成等比数列. 如果熟悉了这个结论, 我们从条件 $\{\log_2(a_n - 1)\}$ 成等差数列, 就可以预见到 $\{a_n - 1\}$ 成等比数列, 进而有其差分数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 及其倒数数列 $\left\{\frac{1}{a_{n+1} - a_n}\right\}$ 均为等比数列, 故欲证之不等式左端可求和. 可见, 如果掌握了一些基本结论, 可以缩短思维过程, 提高解题速度.

例 8 是否存在这样的等差数列, 其前 n 项的和与其后的 $2n$ 项的和的比值对任何正整数 n 都取定值? 如果存在, 试指出它是怎样的等差数列, 其比值是多少; 如果不存在, 也请说明理由.

分析 1 设等差数列的首项为 a_1 , 公差为 d . 如果满足题设条件的等差数列存在, 则可根据题设条件得到一个关于 n 的恒等式,

再考虑使恒等式成立的条件.

解法 1 假设存在这样的等差数列, 满足题设条件, 即 $\frac{S_n}{S_{3n}-S_n} = k$ (k 为常数), 即

$$kS_{3n} = (k+1)S_n \quad ①$$

设等差数列的首项为 a_1 , 公差为 d (a_1, d 不同时为零, 否则比式的分母为零), 则①式化为

$$k \cdot \left[3na_1 + \frac{3n(3n-1)}{2}d \right] = (k+1) \left[na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \right].$$

整理得

$$\left(4k - \frac{1}{2} \right) dn^2 + \left[(2k-1)a_1 + \left(\frac{1}{2} - k \right) d \right] n = 0.$$

因为此式对任何正整数 n 都成立, 所以

$$\begin{cases} (4k - \frac{1}{2})d = 0, & ② \\ (2k-1)a_1 + (\frac{1}{2} - k)d = 0. & ③ \end{cases}$$

由②得 $k = \frac{1}{8}$ 或 $d = 0$. 当 $k = \frac{1}{8}$ 时, 由③得 $-\frac{3}{4}a_1 + \frac{3}{8}d = 0$,
 $d = 2a_1$ ($\neq 0$).

当 $d = 0$ 时, 由③得 $(2k-1)a_1 = 0$, 因为这时 $a_1 \neq 0$, $\therefore k = \frac{1}{2}$.

综上得, 满足条件的等差数列存在. 有两种情况: 一种是首项不为零, 公差是首项的 2 倍, 这时前 n 项的和与其后的 $2n$ 项的和的比值为定值 $\frac{1}{8}$; 另一种是首项不为零, 公差为零, 即各项不为零的常数列, 这时前 n 项的和与其后 $2n$ 项的和的比为常数 $\frac{1}{2}$.

分析 2 既然前 n 项的和与其后 $2n$ 项的和的比, 对任意正整数 n 都为常数, 故分别取 $n=1$ 和 $n=2$, 令所得比值相等, 便可得到首项 a_1 和公差 d 应满足的条件, 然后再证明当 a_1, d 满足该条

件时,前 n 项的和与其后的 $2n$ 项的和的比为定值.

解法 2 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足前 n 项的和与其后 $2n$ 项的和的比为常数. 故分别取 $n=1$ 和 $n=2$ 所得比值应相等,即:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} = \frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4 + a_5 + a_6}, \text{ 即 } \frac{a_1}{2a_1 + 3d} = \frac{2a_1 + d}{4a_1 + 14d}.$$

去分母整理得, $d(2a_1 - d) = 0$.

$\therefore d = 0 (a_1 \neq 0)$ 或 $d = 2a_1 (\neq 0)$.

反之,当 $d = 0 (a_1 \neq 0)$ 时, $S_n = na_1$,

$$\therefore \frac{S_n}{S_{3n} - S_n} = \frac{na_1}{3na_1 - na_1} = \frac{1}{2} (\text{常数});$$

当 $d = 2a_1 (\neq 0)$ 时, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (2a_1) = n^2 a_1$.

$$\therefore \frac{S_n}{S_{3n} - S_n} = \frac{n^2 a_1}{(3n)^2 a_1 - n^2 a_1} = \frac{1}{8}.$$

以下同解法 1.

说明 ① 解这类“恒成立”问题,一般有两种思路,一种是根据已知条件列出一个恒等式,再利用恒等式成立的条件来解,如本题的解法 1;另一种思路是,首先利用特殊化的方法,得到使问题“恒成立”的必要条件,然后再证明其充分性,即满足此条件时问题“恒成立”,如本题的解法 2.

② 等差数列的首项 a_1 和公差 d 一经确定,这个等差数列便完全确定了,因此我们称 a_1 和 d 是等差数列的基本量. 故在本题中,考虑满足题设条件的等差数列是否存在,只需考察 a_1 和 d 就可以了.

2. 关于等差、等比数列的判定及证明

例 1 各项的倒数成等差数列的数列叫做调和数列. 若 x, y, z 是调和数列,且有 $a^x = b^y = c^z$ (a, b, c 为正数),则 a, b, c ()

- A. 成等差数列
C. 成调和数列

- B. 成等比数列
D. 各项平方成等差数列

分析 建立 a, b, c 所满足的关系式.

解 设 $a^x = b^y = c^z = k$, 则 $x = \log_a k, y = \log_b k, z = \log_c k$.

$\because x, y, z$ 是调和数列, $\therefore \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, 即 $\frac{2}{\log_b k} = \frac{1}{\log_a k} + \frac{1}{\log_c k}$, 即 $2\log_k b = \log_k a + \log_k c$, 即 $\log_k b^2 = \log_k ac$. $\therefore b^2 = ac$.

故 a, b, c 成等比数列. 应选 B.

说明 a, b, c 三数, 成等差数列的充要条件是 $2b = a + c$; 成等比数列的充要条件是 $b^2 = ac (a \neq 0)$; 成调和数列的充要条件 $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$. 因此, 判断三数成怎样的数列, 可从建立三数所满足的关系式入手. 请注意本题中变形的技巧.

例 2 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其中 a_4, a_3, a_5 成等差数列. 求证: $\{a_n\}$ 中任何相邻三项, 总可适当调整顺序, 使其成等差数列.

分析 从 a_4, a_3, a_5 成等差数列可得 a_1 和公比 q 的关系并求得 q . 再写出相邻三项的一般形式.

证明 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 因为 a_4, a_3, a_5 成等差数列, 所以 $2a_3 = a_4 + a_5$, 即 $2a_1 q^2 = a_1 q^3 + a_1 q^4$. 因为 $a_1 q^2 \neq 0$, 所以两边约去 $a_1 q^2$ 后得 $q^2 + q - 2 = 0$, 故 $q = -2$ 或 $q = 1$.

当 $q = 1$ 时, 这个数列是常数列, 任何相邻三项当然成等差数列.

当 $q = -2$ 时, 设相邻三项为 $(-2)^{n-1} a_1, (-2)^n a_1, (-2)^{n+1} a_1$.

$\because (-2)^{n+1} a_1 + (-2)^n a_1 = 2 \cdot (-2)^{n-1} a_1, \therefore (-2)^n a_1, (-2)^{n-1} a_1, (-2)^{n+1} a_1$ 成等差数列.

说明 读者可能想不到最后这个等式, 其实我们只要将 $(-2)^{n-1}, (-2)^n, (-2)^{n+1}$ 这三个数按大小排序就可看出, 不管 n 是奇数还是偶数, $(-2)^{n-1}$ 总是居于中间: 当 n 是偶数时, $(-2)^{n+1} < (-2)^{n-1} < (-2)^n$, 当 n 是奇数时 $(-2)^n < (-2)^{n-1} < (-2)^{n+1}$. 可见, 如果结论成立, $(-2)^{n-1} a_1$ 当然应为中项.