

21

世纪高等学校土木工程类系列教材

有限单元法程序设计

■ 侯建国 安旭文 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

0343

51

2007

21

世纪高等学校土木工程类系列教材

有限单元法程序设计

■ 侯建国 安旭文 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法程序设计/侯建国,安旭文编著. —武汉:武汉大学出版社,2007.1

21世纪高等学校土木工程类系列教材

ISBN 978-7-307-05303-8

I. 有… I. ①侯… ②安… III. 弹性力学—有限元法—高等学校—教材 IV. ①O343 ②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 136776 号

责任编辑:李汉保 责任校对:程小宜 版式设计:支 笛

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北新华印务有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:15.375 字数:365千字 插图:7

版次:2007年1月第1版 2007年1月第1次印刷

ISBN 978-7-307-05303-8/O·349 定价:22.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

内 容 简 介

本书主要介绍弹性力学平面问题有限元程序设计的基本原理与编制方法。书中以三节点三角形单元、四节点矩形单元、六节点三角形单元和四、八、九节点等参单元以及杆单元为例,围绕作者所编写的弹性力学平面问题有限元分析通用程序《FEAP》,逐段讲解数据输入及网格自动剖分、约束条件的引入、单元刚度矩阵的形成、结构总刚度矩阵的组集、整体荷载列向量的形成、解方程和单元应力计算与成果整理等关键性程序模块的设计方法,从而使读者掌握结构分析有限元程序设计的基本原理和编制方法。书中对有限元法在钢筋混凝土结构应力分析中的应用亦作了简要介绍。

书中所给出的源程序既可供读者阅读参考和上机实习使用,亦可用于解决工程实际问题。

本书主要作为高等院校土木工程类专业本科生和研究生有限元程序设计选修课的教材之用,也可供从事结构分析的有关工程技术人员和土木工程类专业的师生学习与参考。

前 言

有限单元法作为一种实用的数值分析方法随着电子计算机的普及得到了工程界的广泛重视,该方法已成为分析连续体的强有力工具。

有限单元法在 20 世纪 50 年代起源于航空工程中飞机结构的矩阵分析。该方法将整个结构看成有限个力学小单元互相连结而组成的集合体;分析每个力学小单元的力学性能,按照一定的方式装配在一起,就反映了整体结构的力学特性。

有限单元法的思路在 1960 年被推广用来求解弹性力学问题,并开始采用“有限单元法”(Finite Element Method)术语。其基本步骤是,首先将弹性连续体进行离散化,分割成有限的小块体(即单元),让它们只在指定点(即节点)处互相连结,用这种离散结构代替原来连续的结构;其次,对每个单元选择一个简单函数来近似表示其位移(或内力)分布规律,并按弹塑性理论中的变分原理建立单元节点力与节点位移之间的关系;最后,把所有单元集合起来,得到一组代数方程组,求解代数方程组,得出各节点位移,进而求出各单元的应力或内力,从而得到离散结构的解。只要单元分得较多,就可能用这个解作为连续体的解答。

为了使解答尽可能接近精确解,通常划分单元较多,企图采用手算是不可可能的。电子计算机的发展,使这种方法得到了广泛应用。电子计算机的特点是容量大、速度快、稳定性好,因而一般工程问题都能解决。这里,关键是根据有限单元法设计的计算机程序的编制。

目前,国内外已编制了许多大型通用有限元程序。其中著名的有 E. L. Wilson 教授等编制的 SAP 系列,K. J. Bathe 教授等编制的 ADINA 系列;美国国家航空和航天管理局(NASA)开发的 NASTRAN;以及近年来在国内广为流行的美国大型有限元软件 ANSYS、ABAQUS 等;国内大连理工大学钟万勰教授等研制的 JIGFEX 和 DDJ 程序系统;航空工业部研制的 XAJEF 系列等。这些大型通用有限元程序,对于静力、动力、材料非线性、几何非线性、稳定问题都可以很方便地计算出来,可以解决许多复杂的工程问题。但大型有限元程序由于其通用性,无所不包,因而也带来了一些问题。例如,数据填写复杂,应用上不够方便。而且有些专门问题、新发展的问題,它们无法包括。因此,对于结构分析工作者,仅仅会使用现有程序是不够的,还必须具备根据不同的需要编制相应程序的能力。再者,有限元法发展到现在,已积累了十分丰富的资料,计算机程序也编制了许多,在实际工作中,往往可以借鉴,这也需要学习编制程序的技巧与方法,这样才有可能读懂其他程序,然后再移植、改造或增加新的功能。

从工程应用的角度来看,为了推进计算机辅助设计的发展,要求结构分析进一步与工程结构数据库、网格自动部分、图形处理、人工智能、专家系统、计算机绘图等相结合,而这些问题又更多地依赖于计算机程序设计的能力。

上述情况要求正在从事和即将参加工程建设的技术人员,特别是担负着开发和研究任务的科学技术工作者,能够较好地掌握有限单元法的基本原理和程序设计方法,以便一方面能够有效地利用现有的计算程序,另一方面能够具有改进现有计算方法和计算程序的能力,

并为发展新的方法、编制新的结构分析程序,掌握必要的程序设计的基本知识和编制技巧。本书正是为了适应上述要求,为工科院校土木建筑工程类专业本科高年级学生以及硕士研究生学习有限元程序设计提供一本教材;同时也可作为上述专业的工程技术人员和土木建筑工程类专业的师生学习与进修的参考读物。由于选修课学时数的限制,本书内容只限于平面问题有限元分析。通过作者所编制的弹性力学平面问题的通用程序《FEAP》,介绍有限元程序的编制方法和技巧,讲解如何读懂及编制有限元程序。应该说这是一个实践性很强的课程,学了一定要上机实习,在实践中再认识、提高。通过本课程的学习,以求达到具有独立修改、编制某些程序的能力。

本书是在侯建国、李传才 1990 年为土木建筑工程类专业的本科生和研究生编写的《有限单元法程序设计》讲义的基础上修订而成。书中内容一部分取自国内外有关文献和专著,一部分是作者在工作和学习中的体会。关于有限元法的基本原理,如位移模式的选择、单元刚度矩阵的推导、荷载移置、整体平衡方程的建立、约束处理等,读者不难从各种有限元的论著中找到,本书对这些内容只作简要叙述,而把重点放在有限元方法如何在计算机上实现,即计算机程序的编写上。全书共分九章和一个附录。

第一章主要介绍有限单元法的基本原理,并列出有关基本公式。其中重点以三节点三角形单元为例介绍了有限单元法解题的全过程,包括离散化、单元分析、整体分析和单元应力计算及成果整理等内容;对于高次单元,差别仅在于单元刚度矩阵的形成和等效节点荷载的计算有所不同,故对高次单元则把重点放在单元分析上。

第二章至第八章围绕作者所编写的弹性力学平面问题有限元通用程序《FEAP》,介绍有限元程序设计的编制方法与技巧,重点介绍了网格自动剖分、约束条件的引入、单元刚度矩阵的形成、结构刚度矩阵的组集、整体荷载列向量的形成、解方程和单元应力计算与成果整理等关键性程序模块,并给出了相应的细框图和源程序,便于读者自学与参考。

第九章介绍《FEAP》程序使用说明,并给出了大量的工程实例,供读者上机实习之用,或作为读者自编某些程序的考题之用。

为了便于读者自学,书中介绍的程序力求简单明了,因此,它不是一个非常精练的通用标准程序,必然有很多可修改之处。读者在读懂《FEAP》程序后,可以很方便地将这个程序扩充为平面问题与轴对称问题的联合求解程序,也可以扩充相应的前处理程序(全自动剖分及图像显示)和后处理程序(应力处理及图像显示等),甚至于将这一程序改编为空间问题有限元程序也并无技术上的困难。

本书编写中努力贯彻“少而精”的原则,力图做到深入浅出,循序渐进,使读者学完后能独立修改、编制各自需要的应用程序,达到学以致用目的。

本书第一章至第七章由侯建国编写;第八章至第九章及附录由安旭文编写;安旭文、宋础、秦朝江对 FEAP 程序进行了全面修订,整个程序的上机调试由安旭文负责完成。全书由侯建国修改定稿。

限于作者的理论水平和实践经验,书中难免有不少缺点和不足,欢迎广大读者给予批评和指正。

侯建国

2005 年 2 月于珞珈山

目 录

| | |
|------------------------------|-----|
| 第一章 有限单元法介绍 | 1 |
| § 1.1 弹性力学平面问题的基本公式 | 1 |
| § 1.2 有限元法计算步骤 | 3 |
| § 1.3 连续体的离散化 | 4 |
| § 1.4 三节点三角形单元的有限元分析 | 8 |
| § 1.5 矩形单元的单元分析 | 30 |
| § 1.6 六节点三角形单元的单元分析 | 38 |
| § 1.7 等参单元的单元分析 | 45 |
| § 1.8 杆单元的单元分析 | 59 |
| 第二章 《FEAP》程序的总框图及输入数据程序设计 | 62 |
| § 2.1 有限元程序设计的基本步骤和总框图设计 | 62 |
| § 2.2 有限元分析程序《FEAP》简介 | 66 |
| § 2.3 输入数据程序设计 | 70 |
| § 2.4 网格自动剖分程序设计 | 82 |
| 第三章 引入约束条件程序设计 | 102 |
| § 3.1 形成节点未知量编号数组 JWH(2, NJ) | 102 |
| § 3.2 形成单元定位向量 IEW(2 * JN) | 104 |
| 第四章 形成单元刚度矩阵程序设计 | 106 |
| § 4.1 三节点三角形单元的单元刚度矩阵的形成 | 106 |
| § 4.2 矩形单元的单元刚度矩阵的形成 | 111 |
| § 4.3 六节点三角形单元的单元刚度矩阵的形成 | 117 |
| § 4.4 等参单元的单元刚度矩阵的形成 | 121 |
| § 4.5 杆单元的单元刚度矩阵的形成 | 130 |
| 第五章 组合总刚程序设计 | 133 |
| § 5.1 总刚一维变带宽压缩存贮方法 | 133 |
| § 5.2 主对角元位置数组 KAD(NN)的形成 | 133 |
| § 5.3 组合总刚 | 139 |

| | |
|-----------------------|-----|
| 第六章 形成整体荷载列向量程序设计 | 147 |
| § 6.1 形成自重列向量 | 147 |
| § 6.2 形成荷载列向量 | 152 |
| 第七章 解方程程序设计 | 161 |
| § 7.1 改进平方根法的基本公式 | 161 |
| § 7.2 解方程的程序框图及程序 | 163 |
| § 7.3 输出位移 | 165 |
| 第八章 单元应力计算程序设计 | 167 |
| § 8.1 单元应力计算程序的总体设计 | 167 |
| § 8.2 三节点三角形单元应力计算 | 169 |
| § 8.3 四节点矩形单元应力计算 | 178 |
| § 8.4 六节点三角形单元应力计算 | 183 |
| § 8.5 等参单元应力计算 | 187 |
| § 8.6 组合单元应力计算 | 191 |
| § 8.7 杆单元应力计算 | 195 |
| 第九章 《FEAP》程序使用说明及工程实例 | 197 |
| § 9.1 《FEAP》程序使用说明 | 197 |
| § 9.2 工程实例 | 205 |
| 附录 《FEAP》程序的其他子程序 | 231 |
| 参考文献 | 234 |

第一章 有限单元法介绍

§ 1.1 弹性力学平面问题的基本公式

1.1.1 弹性力学平面问题的两种类型

任何连续体总是处于空间受力状态,因而任何实际问题都是空间问题。但是在某些情况下,空间问题可以近似地按平面问题处理。平面问题可以分为以下两类。

1. 平面应力问题

例如图 1.1.1 中的深梁,由于梁的厚度很小,而荷载又都与 xOy 平面平行,且沿 Oz 轴为均匀分布,因此可以认为 Oz 轴方向的应力分量等于零。这种问题称为平面应力问题。

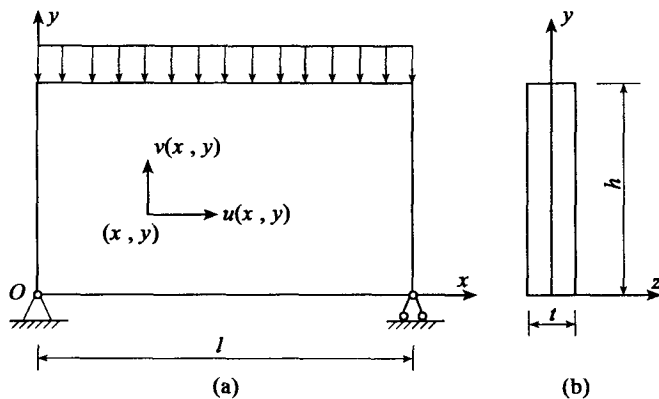


图 1.1.1 平面应力计算模型

2. 平面应变问题

如图 1.1.2 所示一重力坝的横截面,由于坝的长度比横截面的尺寸大得多,而荷载又都与 xOy 平面平行,且沿 Oz 轴为均匀分布,因此可以认为,沿 Oz 轴方向的位移分量等于零。这种问题称为平面应变问题。

上述两类问题有许多共同特点,合称为弹性力学平面问题。本书只讨论平面问题。

1.1.2 弹性力学平面问题的基本公式

弹性力学平面问题的基本公式是有限元法分析的基础,现列出如下。

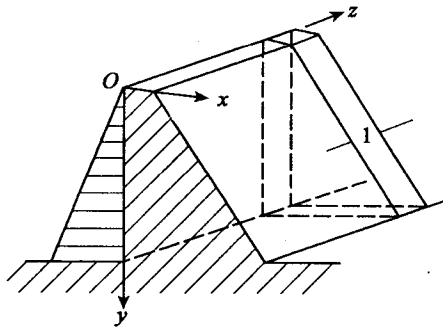


图 1.1.2 平面应变计算模型

1. 几何方程

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.1.1)$$

2. 物理方程

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1.1.2)$$

式中

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

弹性矩阵 $[D]$ 如下:

对于平面应力问题

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \text{对} & \\ \mu & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

对于平面应变问题

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \text{对} & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

比较上述式(1.1.3)与式(1.1.4)可以看出,在平面应力的弹性矩阵 $[D]$ 中,只要把 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$,把 μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$,就可得到平面应变问题的弹性矩阵。

§ 1.2 有限元法计算步骤

结构的有限元分析涉及力学原理、数学方法和计算机程序等几个方面,诸方面互相配合才能形成这一完整的分析方法。但是,无论对于什么样的结构(如平面、三维、板壳等),有限元分析过程都是程序化了的,一般的典型步骤如下。

1.2.1 离散化——确定有限元计算简图

- (1) 用所选单元类型划分有限元网格,给节点和单元编号,确定支座的形式和位置;
- (2) 选定整体坐标系,测量节点坐标,准备好单元几何尺寸、材料常数;
- (3) 荷载移置,将每一单元所受的荷载(包括体力、面力和集中力)都按静力等效原则移置到节点上,成为等效节点荷载。

1.2.2 单元分析——建立单元刚度矩阵

(1) 在典型单元内选定位移函数,并将该函数表示成节点位移的插值形式,即建立单元内任一点的位移 $\{f\}$ 与单元节点位移 $\{\delta\}^e$ 之间的关系

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \quad (1.2.1)$$

式(1.2.1)中 N 为位移函数(即插值函数,亦称形函数), $[N]$ 称为形函数矩阵。

(2) 建立单元内任一点的应变 $\{\epsilon\}$ 与单元节点位移 $\{\delta\}^e$ 之间的关系

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e \quad (1.2.2)$$

式(1.2.2)中 $[B]$ 称为应变矩阵(亦称几何矩阵)。

(3) 建立单元内任一点的应力 $\{\sigma\}$ 与单元节点位移 $\{\delta\}^e$ 之间的关系

$$\{\sigma\} = [S]\{\delta\}^e \quad (1.2.3)$$

式(1.2.3)中 $[S]$ 称为应力矩阵。

(4) 建立单元节点力 $\{F\}^e$ 与单元节点位移 $\{\delta\}^e$ 之间的关系

$$\{F\}^e = [k]^e\{\delta\}^e \quad (1.2.4)$$

式(1.2.4)中 $[k]^e$ 称为单元刚度矩阵。单元分析的最终目的是建立单元刚度矩阵。

1.2.3 整体分析——形成和求解整体平衡方程组

(1) 根据单元刚度矩阵形成整体刚度矩阵 $[K]$,组装整体位移列向量 $\{\Delta\}$ 和整体荷载列向量 $\{F\}$,建立整体平衡方程组

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (1.2.5)$$

(2) 引入支承条件进行约束处理。在计算程序中亦可先进行约束处理,再建立整体平衡方程组。

(3) 解方程求位移。

(4) 单元应力计算。

在上述步骤中,对于不同的结构,尽管采用的单元形式不同,但其单元的分析方法和步骤都是相同的,差别仅在于单元刚度矩阵有所不同。掌握一种典型结构的有限元分析程序设计方法,就可以很方便地推广应用于各种结构。以下分别介绍上述各步骤的基本原理和

具体方法。

§ 1.3 连续体的离散化

用有限元法分析弹性力学平面问题时,首先是对连续体进行人为的离散化,即把连续的弹性体划分成有限个单元,让它们只在指定的节点处相互连接。例如,对于图 1.1.1 所示的平面问题,通过离散化这一过程,就把一个实际的弹性体简化成了图 1.3.1 所示的有限元计算模型。因此,离散化工作有时也称为确定结构的有限元计算简图。

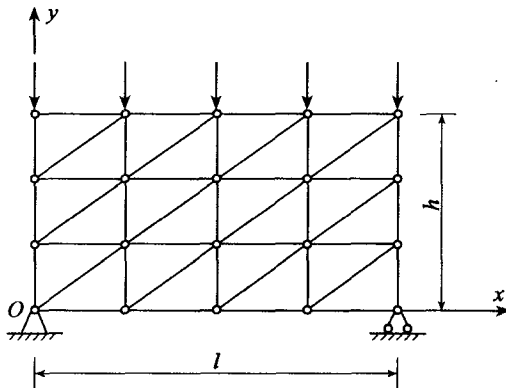


图 1.3.1 有限元计算简图

把结构离散成有限个单元时,需要选择单元的类型和数量。单元的划分,一般应满足以下几项要求:

- (1) 工程要求的计算精度;
- (2) 计算机的速度及容量;
- (3) 节省计算时间。

下面就单元如何划分,作进一步说明。

1.3.1 关于单元类型的选择

在平面问题中,最简单最常用的是常应变三节点三角形单元。除此之外,还有一些较复杂的单元,如双线性的矩形单元、六节点三角形单元、八节点等参单元等。常应变三节点三角形单元具有计算简单,易于适应边界的外形等优点,程序设计也较简单。在计算机容量较大的前提下,只要网格划分得比较细密,一般也都能满足精度的要求。矩形单元除了不易适应某些较复杂的边界外,比之三节点三角形单元具有明显的优点。特别是在网格密度相同的情况下,矩形单元比三节点三角形单元具有更高的精度。如果要求更高的精确度,还可以采用六节点三角形单元或八节点等参单元等。通常,如果采用高次单元(如六节点三角形单元,八、九节点等参单元等),或单元网格划分得较细密,则计算结果较为精确,但相应地要求计算机的存贮容量和计算时间均大幅度增加,故应综合权衡后确定。

对于某些可以简化为平面问题的钢筋混凝土结构,也可以采用有限元法进行分析。钢

钢筋混凝土结构中较常用的计算模型如图 1.3.2 所示。这种模型是把钢筋混凝土作为不同的单元来处理。钢筋部分采用轴力杆单元；混凝土部分则采用平面应力单元，如三节点三角形单元、矩形单元或等参单元等。尽管混凝土是一种非匀质的材料，但在线性分析时，通常可以把该材料作为匀质的来处理。只有在开裂之后，才考虑该材料的非匀质、非连续及各向异性等特性。此外，在钢筋混凝土结构的有限元分析中，有时还要用到模拟钢筋与混凝土之间的粘结特性的弹簧单元，以及反映叠合结构在叠合面上的混凝土的粘结特性的结合面单元（如滑移层模型、节理单元等），这些单元在文献[1]、[34]、[35]中作了详细论述，本书从略。

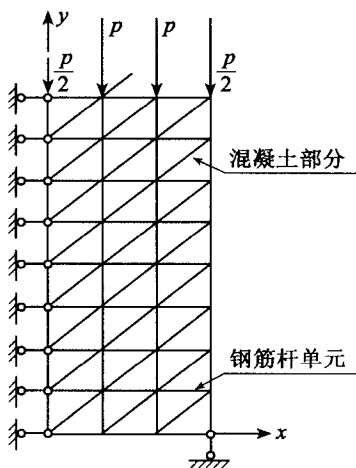
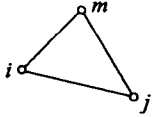
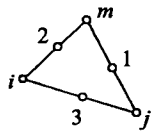


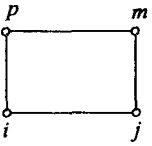
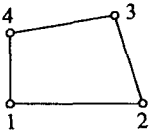
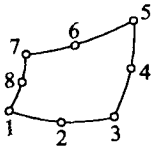
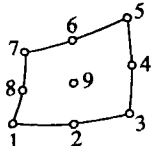
图1.3.2 钢筋混凝土深梁计算模型

表 1.3.1 给出了平面有限元分析中常用的各种单元的形式、自由度以及位移模式。

表 1.3.1 常用单元的类型及位移模式

| 单元 | 节点自由度 | 每个单元的自由度数 | 位移模式 |
|---|--------|-----------|--|
| 三节点三角形单元  | u, v | 6 | 完全的线性多项式： $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ $v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$ |
| 六节点三角形单元  | u, v | 12 | 完全的二次多项式： $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$ $v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2$ |

续表

| 单 元 | 节点自由度 | 每个单元的 自由度数目 | 位 移 模 式 |
|--|--------|----------------|--|
| 四节点矩形单元  | u, v | 8 | 不完全的二次多项式(双线性多项式): $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$ $v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$ |
| 四节点等参单元  | u, v | 8 | $u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$ $v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$ |
| 八节点等参单元  | u, v | 16 | $u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i$ $v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i$ |
| 九节点等参单元  | u, v | 18 | $u = \sum_{i=1}^9 N_i u_i$ $v = \sum_{i=1}^9 N_i v_i$ |

1.3.2 关于单元的大小

由有限元误差分析可知,在收敛的前提下,应力的误差与单元的尺寸成正比,位移的误差与单元尺寸的平方成正比,单元划分愈大,位移的误差就愈显著。从理论上说,单元分得越小,计算结果就越精确。但在实际工程中,要根据工程上对精度的要求,计算机容量及合理的计算时间等确定单元的大小。若过分地加密网格,将使计算容量激增,从而导致计算误差的增大。加密网格超过了一定的限度,不但不能提高精度,有时反而使精度降低。

对于不同的部位,可以采用大小不同的单元。必要时可以采用不同类型的单元以适应复杂边界条件和各种应力区域的变化。例如,对于应力和位移状态需要了解得比较详细的重要部位,应力变化较急剧的区域或边界比较曲折的部位等应该布置较细密的网格;相反,

对于次要的部位,以及应力和位移变化比较平缓的部位,单元可以划得大一些。如果应力事先难以估计,可以布置均匀的单元网格作一次试算,然后根据试算结果重新划分网格进行第二次计算。在细网格到粗网格的过渡区域内,单元的大小应逐步加大,避免网格过分不均匀。

1.3.3 关于三角形单元的形状

对于三角形单元,单元的内角不能相差悬殊,以免在计算中出现较大的误差。由误差分析可知,等边三角形的精度最高。但是对于比较规则的正交边界结构,采用直角三角形的有限元网格又是最方便的,而且精度也较高。因此,这两种类型的单元应尽量优先考虑。

1.3.4 结构厚度和弹性常数有突变时的单元划分

当结构中厚度有突变,或弹性常数有突变(如图 1.3.3(a)、(b)所示)时,必然伴随着结构的应力有突变。因此,在单元划分时,应当把厚度、弹性常数的突变线作为单元的分界线,而不能使突变线穿过单元。否则,将不能正确反映这些实际存在的应力突变。另外,还应当把有突变部位附近的单元取得较小一些,使之较好地反映这些应力的突变。

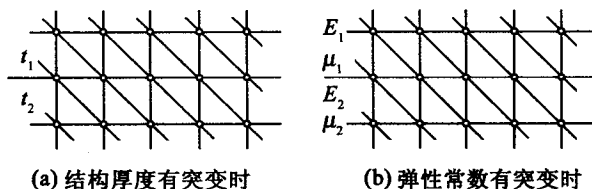


图 1.3.3 结构厚度和弹性常数有突变时的单元划分

1.3.5 结构对称性的利用

如果结构与荷载是对称的,那么单元划分也应该对称,计算时可以利用对称性取一半结构进行分析。这样计算与分析工作量将大为减少,在对称轴上当然应该设置节点和相应的约束链杆。

1.3.6 单元及节点编号原则

单元编号原则上可以任意编排,但为了整理应力成果时方便起见,单元编号一般可按“从左至右,自下而上”或“自下而上,从左至右”的顺序进行编排。

节点编号时则应特别注意,因为节点编号的好坏将直接影响总刚度矩阵 $[K]$ 的半带宽的大小。所谓半带宽是指 $[K]$ 中某一行最左非零元素到该行主对角元之间(包括它们自身)的元素个数。带宽过大,不仅浪费机时与存贮单元,而且有时还会影响计算精度。而节点编码的好坏,对半带宽的大小起决定性作用,相邻节点的最大“节点号差”越小,总刚度 $[K]$ 的半带宽就越小。平面问题最大半带宽 m 的一般计算公式为

$$m = 2 \times (\text{相邻节点编号的最大差值} + 1)$$

因此,节点编号原则上应该使相邻节点的最大“节点号差”尽可能地小。例如,图 1.3.4

(a)的节点编号次序比图 1.3.4(b)的节点编号次序要好得多,前者非零元素集中在以主对角线为中心的斜带形区域内,其半带宽是 8,而后者的非零元素分布则很分散,其半带宽是 12。对于规则结构,为使相邻节点编号的差值最小,节点编号应沿短边(节点少的方向)进行编号。

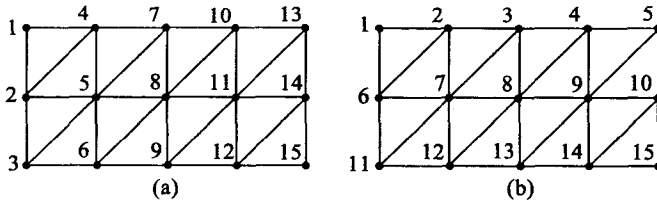


图 1.3.4 节点编号比较

§ 1.4 三节点三角形单元的有限元分析

本节以三节点三角形单元为例,讲述有限元法的具体应用和基本公式。

1.4.1 位移模式

从弹性理论知道,如果已知位移函数,可以从几何方程求得应变分量,再从物理方程求得应力分量。但是,如果只知道节点位移值,并不能直接求出单元内的应变和应力。因此,为了用节点位移表示单元内的应变和应力,必须假定一个适当的位移模式,即假定位移分量为坐标的某种函数,将单元内的位移表示成节点位移的插值形式。也就是说,假定了单元的某种位移函数以后,只要求得了节点的位移,即可以求得单元内任意一点的位移,进而求得任意一点的应变和应力。

位移模式必须具备两个条件:其一,位移模式在节点上的值要等于节点位移;其二,位移模式所采用的位移函数必须满足收敛准则。最简单的办法是把单元内任一点的位移 u 、 v 表示为坐标 x 、 y 的幂函数,即采用多项式的位移模式。这是因为绝大多数幂函数可以用泰勒(Taylor)级数展开,根据需要取前几项逼近真实的位移函数解;其次是多项式函数可以保持各向同性,不偏离某一坐标方向;多项式函数又便于积分和微分,使有限元公式简单、直观;最重要的是多项式函数很容易满足收敛准则。

选择二维多项式项数的方法是根据帕斯卡三角形对称性原则选用:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & x & y \\
 & & x^2 & & xy & y^2 \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & y^3 \\
 x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & y^4 \\
 x^5 & & x^4y & & x^3y^2 & & x^2y^3 & & xy^4 & y^5
 \end{array}$$

在二维多项式中,若包含有三角形对称轴一边的任意一项,则必须同时包含三角形对称

轴另一边的对应项。例如,如果想构造一个有 8 项的三次位移函数,则可选择所有的常数项、线性项以及二次项,再加上 x^3 与 y^3 ,或者加上 x^2y 与 xy^2 。

对于如图 1.4.1(a) 所示的简单三角形单元,3 个节点按逆时针方向的顺序编码为 i, j, m , 每个节点有 2 个位移分量。单元有 3 个节点,共有 6 个位移分量。单元节点位移可用列阵表示为

$$\{\delta\}^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T \quad (1.4.1)$$

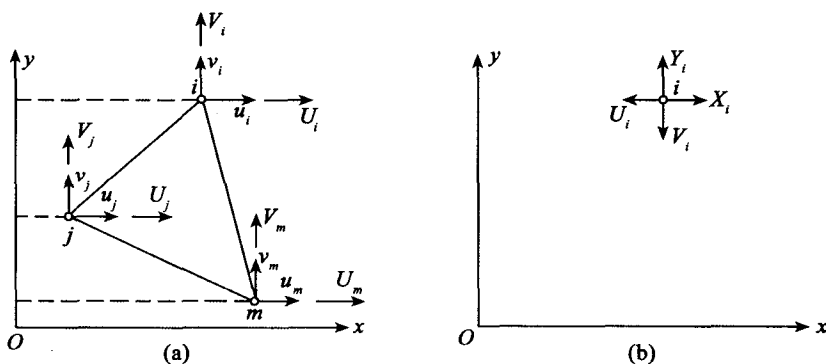


图 1.4.1 三角形单元的节点位移与节点力

为了求得单元内任一点的位移 u, v , 可以把 u, v 假设为坐标 x, y 的某种函数, 也就是选用适当的位移模式。简单三角形单元共有 6 个自由度, 单元内任一点的位移 u, v 应由 6 个节点位移完全确定, 因此, 在位移模式中应包含 6 个待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ 。为此, 可设单元内的位移为 x, y 的线性函数

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \quad (1.4.2)$$

式中的待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ 可用节点位移值来表示。以 i, j, m 三点的坐标值代入式 (1.4.2), 得

$$\begin{cases} u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \\ v_k = \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \end{cases} \quad (k = i, j, m) \quad (1.4.3)$$

(i, j, m) 表示轮换码, 实际上式 (1.4.3) 共表示 6 个方程式。经过简单的代数运算, 就可以得到待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2A_k} \sum_{k=i,j,m} a_k u_k \\ \alpha_2 = \frac{1}{2A_k} \sum_{k=i,j,m} b_k u_k \\ \alpha_3 = \frac{1}{2A_k} \sum_{k=i,j,m} c_k u_k \end{cases} \quad (1.4.4)$$

式中