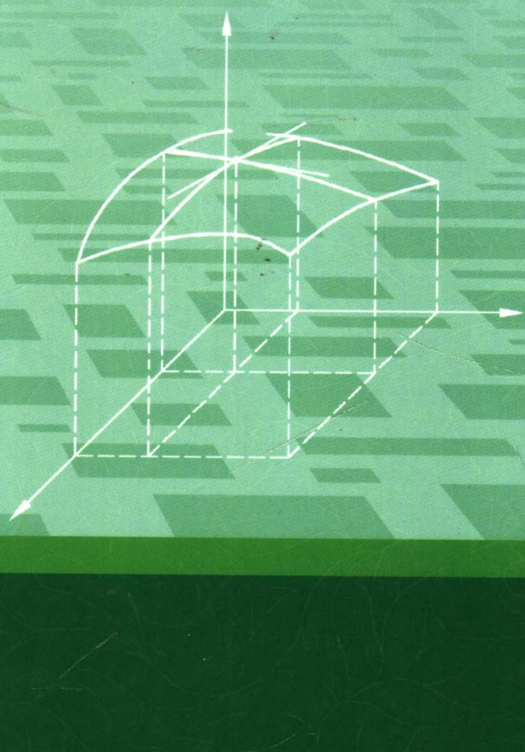
GAODENG SHUXUE

高等数学

下册

李作安 主编　　杜道渊 副主编



西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

GAODENG SHUXUE

高等数学

下册

高等数学

下册

李作安　主　编
杜道渊　副主编

西南交通大学出版社
·成都·

内容提要

本书根据"高等数学课程教学基本要求",并结合多年来的教学实践编写而成.全书分为上、下两册,共十章.下册内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程.为方便教学,每章附有复习题.本书也可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/李作安主编.—成都:西南交通大学出版社,2007.2
ISBN 978-7-81104-332-7

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019638 号

高 等 数 学

下 册

李作安 主编

*

责任编辑 张宝华
封面设计 本格设计
西南交通大学出版社出版发行
(成都市二环路北一段 111 号 邮政编码:610031 发行部电话:028-87600564)
http://press.swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷
*
成品尺寸:170 mm×230 mm 印张:12.125
字数:231 千字 印数:1—3 000 册
2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81104-332-7
定价:18.80 元

图书如有印装问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话:028-87600562

前 言

高等数学是高等工科院校的一门重要基础课，对学生后继课程的学习以及今后的发展有着深远的影响. 本书是结合多年来的教学实践，并根据“高等数学课程教学基本要求”编写而成的. 全书分为上、下两册，共十章. 下册四章，内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程、无穷级数. 由于学时的减少，我们对本书的部分内容进行了适当调整，各章都配有适当的例题和习题以及复习题. 可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书. 李作安同志主持本书（下册）编写工作，对本册进行统纂，对有的章节进行了改写. 参加本书编写工作的有：曾光菊和许文俊（第七章）、陈德勤（第八章）、杨勇（第九章）、杜道渊（第十章）.

许彪、黄蕴魁、曾祥龙、林灿等几位同志对原稿进行了认真审阅并提出了不少改进意见，对此表示衷心感谢！

同时，在本书的编写过程中，得到西南交通大学出版社的大力支持与帮助，在此一并表示衷心感谢！

限于编者水平，加之时间仓促，本书不足之处在所难免，敬请广大读者给予批评指正.

编者

2006 年 8 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第七章　多元函数微分学

以前我们讨论的一元函数只依赖于一个自变量的函数. 但在自然科学和工程技术中所遇到的函数,往往依赖于两个或两个以上的自变量,像这样的函数称为多元函数. 本章将在一元函数微分学的基础上,以二元函数为主,介绍多元函数的极限、连续等基本概念以及多元函数的微分法及其应用.

第一节　多 元 函 数

一、多元函数的概念

引例:一定质量的理想气体,其压强 p,体积 V,绝对温度 T 之间的关系为

$$p = \frac{RT}{V}$$

其中 R 是普适气体恒量.

当 V 和 T 在它们的变化范围内($V > 0, T > T_0$)任取一对值时,p 值就由上述依赖关系而唯一确定. 类似上述的一个变量与另两个变量的对应关系,在实际问题中广泛存在,我们抽去它的实际意义,给出如下二元函数的定义.

定义 7.1　设有三个变量 x,y,z,当 x,y 在它们的变化范围 D 内任取一对值(x,y) 时,变量 z 按一定的法则 f,总有唯一确定的值与它们对应,则称变量 z 是 x,y 的二元函数,记为

$$z = f(x,y)$$

其中,x,y 称为自变量,z 称为因变量,D 称为该函数的定义域. $W = \{z \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}$ 称为该函数的值域.

类似的,可定义三元函数及三元以上的函数. 一般的,把二元及其以上的函数统称为多元函数.

和一元函数类似,讨论用解析式表示的二元函数时,其定义域 D 是指使得该解析式有意义的一切点(x,y) 的集合.

例 1　求函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域.

解　要使这个解析式有意义,x,y 必须满足

$$\sqrt{1-x^2-y^2}>0$$

于是
$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

点集 D 在 xOy 平面上表示一个以原点为圆心的单位圆域,如图 7 - 1 所示.

例 2　求函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln(y-x)$ 的定义域.

解　要使这个解析式有意义,x,y 必须满足

$$x>0 \text{ 且 } y-x>0$$

于是
$$D=\{(x,y)\mid x>0,y>x\}$$

点集 D 表示 xOy 右半平面位于直线 $y=x$ 上方的部分,如图 7 - 2 所示.

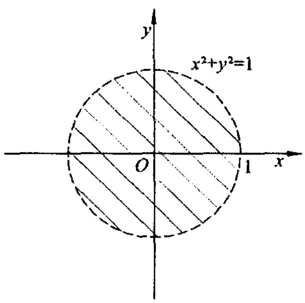


图 7-1

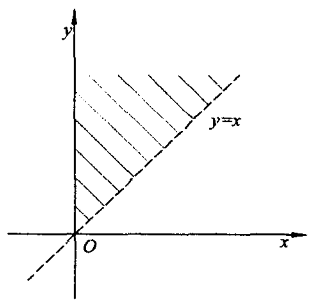


图 7-2

例 3　求函数 $z=\ln(y^2+x^2-1)-\sqrt{9-x^2-y^2}$ 的定义域.

解　要使这个解析式有意义,x,y 必须同时满足不等式

$$y^2+x^2-1>0 \text{ 和 } 9-x^2-y^2\geqslant 0$$

即
$$D=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 3\}$$

点集 D 在 xOy 平面上表示以原点为圆心的单位圆与以原点为圆心、半径为 3 的圆所围成的圆环域,如图 7 - 3 所示.

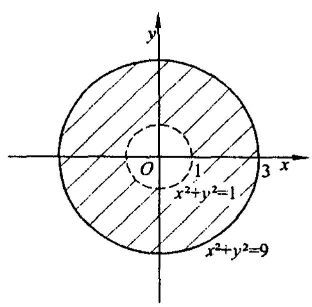


图 7-3

为了研究函数在某一点附近的性质,下面介绍邻域的概念.

定义 7.2　在 xOy 平面上与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距

离小于某一正数 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 表示 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心，δ 为半径的圆形区域，不包含边界曲线 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta^2$.

不包含点 P_0 的邻域称为去心邻域，记为 $U^\circ(P_0,\delta)$，即

$$U^\circ(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

包含边界的平面区域称为闭区域. 不包含边界上任何一点的区域称为开区域. 如果区域 D 可以被包含在以原点为圆心的某一圆域内，则称 D 是有界域，否则称 D 是无界域.

如例 1 中 D 是有界开区域；例 2 中 D 是无界开区域；例 3 中 D 是有界域，但它既不是开区域，也不是闭区域.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，任取一点 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$，这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$，当 (x,y) 取遍 D 上的一切点时，得一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形（见图 7-4）. 一般表示一张曲面.

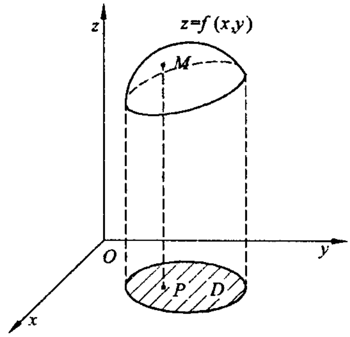


图　7-4

例 4　画出函数 $z=6-3x-2y$ 的图形.

解　由空间解析几何知道，这个线性函数的图形是一张平面，如图 7-5 所示.

例 5　画出函数 $z=5-x^2-2y^2$ 的图形.

解　由空间解析几何知道，它的图形是一张椭圆抛物面，如图 7-6 所示.

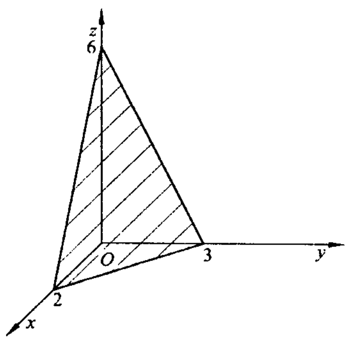


图　7-5

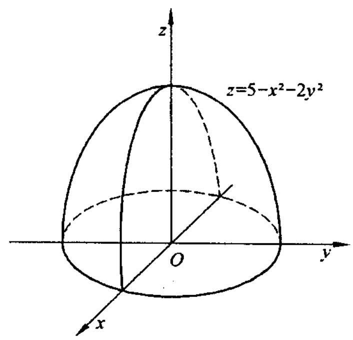


图　7-6

以上讨论的二元函数及平面区域的概念可以推广到三元函数及空间区域上去. 一般的,还可定义 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,它的定义域是 n 维空间的区域.

二、多元函数的极限

函数的极限是研究当自变量变化时,函数的变化趋势. 类似于一元函数的极限,我们研究当点 $P(x,y)$ 趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $z = f(x,y)$ 的变化趋势.

设二元函数 $z = f(x,y)$ 在 $U^{\circ}(P_0,\delta)$ 内有定义,如果当点 $P(x,y)$ 以任意方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,相应的,函数值 $z = f(x,y)$ 趋向于一个确定的常数 A,则称 A 是函数 $z = f(x,y)$ 当点 $P(x,y)$ 趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$(记为 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$)时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \quad 或 \quad \lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

为了定量描述极限概念中点 P 接近于点 P_0 的程度,可以用点 $P(x,y)$ 与 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离

$$\rho = |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

来衡量. 这样点 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 也可用 $\rho \to 0$ 来表示. 因此,下面给出二元函数极限的分析定义.

定义 7.3 设函数 $z = f(x,y)$ 在某 $U^{\circ}(P_0,\delta)$ 内有定义,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x,y)$,都有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

成立,其中 A 是一个确定的常数,则称 A 为函数 $z = f(x,y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \quad 或 \quad f(x,y) \to A \ (\rho \to 0)$$

在这里需要注意的是,二元函数和一元函数的极限定义,形式上看起来没什么区别,但上述定义指点 $P(x,y)$ 以任意方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数值 $z = f(x,y)$ 都要趋向于同一个常数,而点 P 趋向于点 P_0 的方式是多种多样的,所

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

以实际上二元函数的极限远比一元函数要复杂得多.但多元函数极限运算法则与一元函数类似.

例 6　设函数

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

求证:$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

证明　因为

$$\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2$$

所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时,有

$$\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立.

例 7　证明:极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

按照二元函数极限的定义,如果点 P 沿着一条特殊曲线趋向于点 P_0 时,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在,或者点 P 沿着两条不同的曲线趋向于点 P_0 时,对应的函数值 $f(x,y)$ 趋向于两个不同的常数,则可以断定$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在.

证明　当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋向于点 $O(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

当 k 取不同的数值时,上式的值就不相等,即当点 $P(x,y)$ 沿着不同的直线 $y=kx$ 趋向于点$O(0,0)$时,对应的函数值趋向于不同的常数,因此,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

例 8　求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$$

以上关于二元函数极限的概念,可相应的推广到 n 元函数 $u=f(P)$ 上去.

三、多元函数的连续性

定义 7.4　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $U(P_0,\delta)$ 内有定义,如果
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$
则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在开区域(或闭区域)D 内每一点都连续,则称函数在 D 内连续,或者称函数是区域 D 内的连续函数.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续,则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的不连续点或间断点.

与一元函数类似,如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处没有定义,或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在,或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 虽然存在但极限值不等于函数在该点的函数值 $f(x_0,y_0)$,那么 $P_0(x_0,y_0)$ 就是函数的间断点.

例如,函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$$
由例 7 知,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在,所以(0,0)就是该函数的间断点.

又如,函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y^2}$ 在抛物线 $y^2=x$ 上没有定义,则抛物线 $y^2=x$ 上每一点都是它的间断点.

以上关于二元函数连续性的概念,也可相应的推广到 n 元函数 $u=f(P)$上去.

与闭区间上一元连续函数一样,有界闭区域上的多元连续函数也有如下性质.

性质 1(最大最小值定理)　在有界闭区域 D 上连续的多元函数,在 D 上必定有最大值和最小值.

性质 2（介值定理）　在有界闭区域 D 上连续的多元函数，必能取得介于函数最大值和最小值之间的任何值至少一次.

前面已经指出：一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用．即多元连续函数的和、差、积均为连续函数，连续函数的商（分母不为零处）是连续函数，多元连续函数的复合函数也是连续函数.

把由多元多项式及一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成，并且能用一个解析式表示的多元函数称为多元初等函数. **一切多元初等函数在其定义域内连续**. 所以在求极限 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是多元初等函数，而点 P_0 是其定义域内的点，则

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

例 9　求极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \left(\ln(x-y) + \arcsin \dfrac{y}{x}\right)$.

解　$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \left(\ln(x-y) + \arcsin \dfrac{y}{x}\right) = \left(\ln(2-1) + \arcsin \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

习　题　7 - 1

1. 已知函数 $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y}$，求 $f(2,1)$ 和 $f(\sqrt{x}, x+y)$.

2. 已知函数 $f(x,y,z) = \arcsin \sqrt{x^2 + y^2 + \ln z}$，求 $f(x-y, x+y, xz)$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $z = \ln(x^2 + 2y - 1)$；　(2) $u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$；

(3) $z = \ln(y - x^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$；　(4) $u = \sqrt{x - \sqrt{y+z}}$

4. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \dfrac{1}{\sqrt{x} \arctan y}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\arcsin xy}{x}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{3 - \sqrt{xy + 9}}{xy}$.

5. 讨论下列极限的存在性：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$.

6. 讨论下列函数的连续性：

(1) $u = \tan \dfrac{1}{x+y}$；　(2) $u = \dfrac{x+y}{x - y^2}$.

第二节　偏　导　数

一、多元函数的偏导数

1. 偏导数的定义

一定质量的理想气体，如果固定压强 p（等压过程），且体积 V 随着绝对温度 T 变化的关系式为 $V=\dfrac{RT}{p}$（其中 R 为常数），则需要研究体积 V 关于温度 T 的变化率.

定义 7.5　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的，函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_x(x_0,y_0)$$

类似的，当 x 固定在 x_0，而 y 在 y_0 处有增量 Δy，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad 或\quad f_y(x_0,y_0)$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么，这个偏导数就是 x,y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x\quad 或\quad f_x(x,y)$$

类似的，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z_y \quad 或 \quad f_y(x,y)$$

以后，在不至于引起混淆的地方也把偏导函数简称为偏导数.

偏导数的概念可以推广到二元以上函数. 例如，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处对三个自变量的偏导数分别为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$$

由偏导数的概念可知，求二元函数的偏导数，不需要引进新的方法，因为这里只有一个自变量在变动，而另一个自变量看作常数，所以仍旧是一元函数微分法问题. 求$\frac{\partial z}{\partial x}$时，只要把 y 看作常数而对 x 求导数；求$\frac{\partial z}{\partial y}$时，只要把 x 看作常数而对 y 求导数. 显然，$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在(x_0,y_0)处的函数值，$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在(x_0,y_0)处的函数值.

例 10　求 $z=2x^2-3xy+2y^3$ 在点$(1,2)$处的偏导数.

解　把 y 看作常数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3y$$

把 x 看作常数，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3x+6y^2$$

把$(1,2)$代入上面的结果，得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=4\times 1-3\times 2=-2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=(-3)\times 1+6\times 2^2=21$$

例 11　设 $pV=RT$（R 为常数），求：$\frac{\partial p}{\partial V},\frac{\partial V}{\partial T},\frac{\partial T}{\partial p}$.

解　由于 $p=\frac{RT}{V}$，所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$$

由于 $V=\dfrac{RT}{p}$，所以

$$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$$

由于 $T=\dfrac{pV}{R}$，所以

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$$

显然$\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}=-\dfrac{RT}{V^2}\cdot\dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{V}{R}=-\dfrac{RT}{pV}=-1.$

这表明偏导数的记号是一个整体记号，绝对不能理解为分子与分母之商，这是与一元函数导数记号不同之处.

例 12 设 $z=x^y(x>0,x\neq1)$，求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$$

证明 由于$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=2z$$

例 13 设 $z=[\ln(xy)+1]^3$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3[\ln(xy)+1]^2\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{3}{x}[\ln(xy)+1]^2.$

此处，在函数表达式中将两个自变量 x,y 对调后，仍为原来的函数，称该函数对变量 x,y 具有对称性. 显然，只要在求得的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$中，将 x 换为 y 就能得到$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，即

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{y}[\ln(xy)+1]^2$$

例 14 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的偏导数，并讨论其在 $(0,0)$ 处的连续性.

解 这是一个分段函数，由于 $f(x,y)$ 在其定义域的不同部分表达式不同，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com