高等学校教材

线性代数

Linear Algebra

李宏伟 李 星 李志明 编

中国地质大学出版社

线 性 代 数

李宏伟　李　星　李志明　编

中国地质大学出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部高等学校线性代数课程的教学基本要求编写的．全书共分六章，内容包括：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换．在各章后附有习题，习题分为 A、B 两类，既作为练习，又是正文的补充，习题参考答案附于书末．

本书可供理工科院校各专业作为教材使用，也可用作考研参考书，还可供科技工作者阅读和参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李宏伟，李星，李志明编．—武汉：中国地质大学出版社，2003.9

ISBN 7-5625-1781-9

Ⅰ．线…

Ⅱ．①李…②李…③李…

Ⅲ．线性代数-高等学校教材

Ⅳ．O151.2

线性代数 李宏伟 李 星 李志明 编

责任编辑：段连秀 责任校对：张咏梅

出版发行：中国地质大学出版社（武汉市洪山区鲁磨路 31 号） 邮编：430074

电话：（027）87482760 传真：87481537 E-mail：cbo @ cug.edu.cn

开本：880 毫米×1230 毫米 1/32 字数：257 千字 印张：9.25

版次：2004 年 3 月第 1 版 印次：2004 年 3 月第 2 次印刷

印刷：武汉市教文印刷厂 印数：1501—1700 册

ISBN 7-5625-1781-9/O・58 定价：18.00 元

前　言

线性代数是高等学校理工科学生的一门重要基础课，它既是学习后续的数学课程和专业课程的必备基础，也是自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具．随着计算机在各个领域的日益普及，线性代数在理论和应用两方面的重要性越来越突出，同时使得高等学校计算机、物理、信息工程、通信、自动控制、系统工程等专业对线性代数课程在内容的深度和广度上都提出了更高的要求．

本书是根据教育部高等学校线性代数课程的教学基本要求，参考全国硕士研究生数学入学考试大纲，并结合我们长期从事高等代数和线性代数课程教学改革的研究与实践，为适用不同专业对线性代数的教学要求而编写的．在编写过程中，我们认真阅读了多种线性代数教材和硕士研究生入学考试复习教程，充分吸收众家之长，形成了以下特点：

1．突出矩阵和向量两大主要内容．本书重点建立矩阵和向量空间两大理论工具，并将它们贯穿于全书，以突出线性代数课程的核心内容．

2．在结构上进行了精心编排和重组．本书将矩阵的概念、运算、秩和初等变换集中介绍，而向量组的线性相关性的讨论以矩阵为工具进行，线性方程组的求解是矩阵和向量理论的应用．在线性空间理论中增加了线性空间同构和 Euclid 空间两部分内容．

3．例题和习题丰富．本书配备了丰富的例题和习题，以帮助加深对概念和理论的理解和掌握．习题按章安排，分 A、B 两类，其中 A 类题是基本题，B 类题具有理科特色，以适应对线性代数要求较高的专业的教学需要．书末附有习题参考答案，便于学生练习检验．

4．能够适应不同专业对线性代数的教学需要．本书前五章适应于理工科本科专业 40 学时左右的教学；全书内容和习题适应于

理工科本科专业60学时左右的教学.

在本书的编写过程中，我们得到了中国地质大学教务处、出版社、计算机科学与技术系、数学与物理系的领导和老师的大力支持. 谢兴武教授详细审阅了全稿，并提出了许多宝贵的意见和建议. 段连秀编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动. 谨在此向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中难免有不妥之处和缺点，敬请读者批评指正.

编 者

2003年8月

目　　录

第一章　行列式

行列式是在线性方程组的求解中产生的，它现在已发展成为一种重要的数学工具，在许多学科领域中有着广泛的应用．本章主要介绍行列式的定义、性质和计算方法，最后介绍求解 n 元线性方程组的 Cramer 法则．

§ 1.1　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，x_1, x_2 为未知量，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为未知量系数，b_1, b_2 为常数项．用消元法解方程组（1.1）得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到方程组（1.1）的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{12}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了叙述和记忆的方便，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

称 D 为二阶行列式，简记为 $D=\det(a_{ij})$.

数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式 D 的元素．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表示该元素位于第 j 列．

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆（参见图 1.1），称 a_{11} 到 a_{22} 的实联线为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚联线为副对角线．二阶行列式便是主、副对角线元素乘积的代数和，其中主对角线元素乘积取正号，副对角线元素乘积取负号．

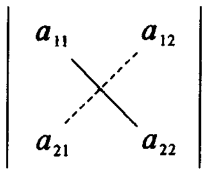

图 1.1

根据二阶行列式定义，式（1.2）中的分子也可用二阶行列式表示．若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则有

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.4}$$

注意，这里的分母就是由方程组（1.1）的系数保持相对位置不变所确定的二阶行列式（称为系数行列式）．$x_i\,(i=1,2)$ 的分子 D_i 是 D 的第 i 列换成方程组（1.1）中的常数列得到的．这样，使得记忆十分方便．由于引入二阶行列式，求解二元一次线性方程组，只需计算三个二阶行列式即可．

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=10, \\ \ \ x_1-4x_2=6. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-4)-3\times 1=-11,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=10\times(-4)-3\times 6=-58,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=2\times 6-10\times 1=2.$$

因此，

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{58}{11}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{2}{11}.$$

二、三阶行列式

设有三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

利用消元法，逐次消去 x_3, x_2，得到

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\
&=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.
\end{aligned}
$$

若记

$$
\begin{aligned}
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},
\end{aligned}\tag{1.6}
$$

则称 D 为三阶行列式.

上述定义的三阶行列式是 6 个乘积项的代数和，每一个乘积项的三个因子均为不同行不同列的三个元素，乘积项的符号可按以下对角线法则来记忆.

如图 1.2，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为副对角线；三条实线看作平行于主对角线的联线，三条虚线看作平行于副对角线的联线；实线上三元素的乘积取正号，虚线上三元素乘积取负号.

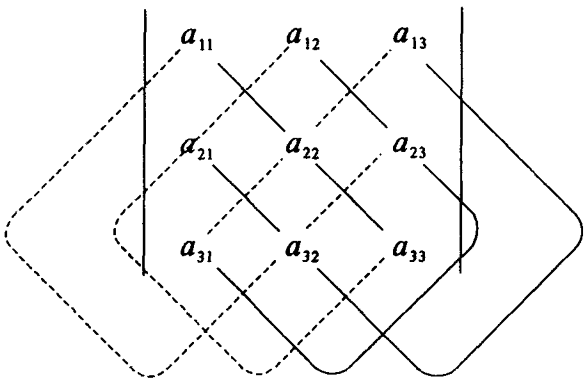

图 1.2

称式（1.6）的行列式D为三元线性方程组（1.5）的系数行列式．根据三阶行列式的定义，有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}$$

$$-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

若$D\neq 0$，则有

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

这里，$D_i(i=1, 2, 3)$是将系数行列式D中第i列换为线性方程组（1.5）右边的常数列所得到的行列式．

类似于二元线性方程组情形，对于三元线性方程组，若其系数行列式$D\neq 0$，则可用三阶行列式求解，且只需计算四个行列式的值．

例 2　求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=1, \\ 2x_1+\ \ x_2-2x_3=2, \\ x_1+2x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

解　按对角线法则计算行列式，得到

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=1\times1\times2+2\times2\times1+1\times(-2)\times(-1)$$

$$-1\times1\times1-(-1)\times2\times2-1\times2\times(-2)$$

$$=15\neq 0.$$

类似地，

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-3.$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{15},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{4}{15},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{1}{5}.$$

用对角线法则计算二阶与三阶行列式，直观方便，但对于四阶或更高阶行列式，对角线法则就不合适了．为了求解四元以上线性方程组，需要将二、三阶行列式的概念推广．下面先介绍有关全排列及其逆序数的知识．

§ 1.2　全排列及其逆序数

一、排列与逆序数

定义 1　由$1, 2, \cdots, n$按一定的次序排成一排，称为一个n元

排列，记为 $p_1p_2\cdots p_n$.

例如，4231是一个四元排列，45213是一个五元排列.

n 元排列的总数是

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!.$$

例如，1, 2, 3共有3!个排列，它们是

123、 132、 213、 231、 312、 321.

显然，$12\cdots n$ 是一个 n 元排列，它具有自然顺序（按递增的顺序排列），称为自然排列. 我们将自然排列规定为标准次序.

定义 2 在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数（即与标准次序不同），则称这两个数有一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，一个四元排列4231中出现的所有逆序是42、43、41、21、31，所以 $\tau(4231)=5$. 而自然排列中没有逆序，其逆序数为0.

下面讨论排列逆序数的计算方法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，逐个考虑元素 p_i，如果比 p_i 大且排在它前面的元素有 t_i 个，就说元素 p_i 的逆序数为 t_i，全体元素的逆序数总和就是这个排列的逆序数，即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 3 求下列排列的逆序数

（1）32154；　　　　（2）$n(n-1)\cdots 21$.

解

（1）在排列32154中，3、2、1、5、4的逆序数分别是0、1、2、0、1，于是这个排列的逆序数为

$$\tau(32154)=0+1+2+0+1=4.$$

（2）在排列 $n(n-1)\cdots21$ 中，n、$n-1$、…、2、1 的逆序数分别是 0、1、2、…、$n-2$、$n-1$，于是，

$$\tau[n(n-1)\cdots21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}.$$

二、逆序数的性质

定义 3 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例如，4231 是奇排列；32154 是偶排列；$12\cdots n$ 的逆序数是零，因而是偶排列.

定义 4 将一个排列中两个元素的位置互换，其余元素不动，将得到一个新的排列，称这种变换为一次对换. 将相邻两个元素对换，称为相邻对换.

定理 1 一个排列中任意两个元素进行一次对换，排列改变奇偶性.

证明 首先证明相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换元素 a 与 b 后得到的新排列为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，元素 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 在对换前后的排列中的逆序数没有改变，只有元素 a 或 b 的逆序数有改变. 当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加1，b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少1. 因此，无论何种情形，对换后新排列与原排列的逆序数相差1，排列奇偶性改变.

再证一般情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_m$，元素 a、b 之间相隔 k 个元素，对换后的新排列为 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_m$，它可以看作

对元素 a 作 $k+1$ 次相邻对换后调成 $a_1 \cdots a_l b_1 \cdots b_k bac_1 \cdots c_m$，然后对 b 作 k 次相邻对换后调成 $a_1 \cdots a_l bb_1 \cdots b_k ac_1 \cdots c_m$．这样，新排列可以看作是原排列经 $2k+1$ 次相邻对换后得到的，所以，这两个排列的奇偶性相反．□

推论 1　奇（偶）排列调成自然排列的对换次数为奇（偶）数．

推论 2　全体 n 元排列（$n>1$）的集合中，奇排列与偶排列的个数各占一半．

§1.3　n 阶行列式的定义

我们首先考察二阶和三阶行列式的结构，然后加以推广，引出 n 阶行列式的定义．

二阶和三阶行列式分别定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以看出：

（1）行列式的每一项都是由不同行不同列的数作乘积，二阶行列式是两个数作乘积，三阶行列式是三个数作乘积；

（2）行列式的每一项的行标排成自然排列时，列标是相应元素的某一排列，这样，共有 $n!$ 种排列（$n=2,3$），对应的行列式是 $n!$ 个乘积项的代数和；

（3）行列式中乘积项的符号由相应的列标排列（行标按自

然排列）的奇偶性决定．例如：三阶行列式中，项$a_{13}a_{21}a_{32}$和项$a_{11}a_{23}a_{32}$的列标排列分别是312（偶排列）和132（奇排列），因此，这两项分别取正、负号（偶排列时取正号，奇排列时取负号）．

于是，三阶行列可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中，$\sum$表示对三个元素1、2、3的所有排列$p_1\,p_2\,p_3$求和．相应地，二阶行列式也有类似的表达式．

依此可以将行列式推广到一般情形．

定义 5 将n^2个数a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$排成n行n列，在其左右两侧加竖线，按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.7}$$

表示的所有$n!$项的代数和称为n阶行列式，简记为$D=\det(a_{ij})$，其中，$\sum$表示对1, 2, …, n的所有排列求和，a_{ij}称为D的元素．

式（1.7）右边的每一乘积项$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$中的$n$个因子取自于$D$中不同行不同列的元素；行标成自然排列，相应的列标是$1, 2, \cdots n$的一个n元排列$p_1p_2\cdots p_n$，若它是偶排列，则对应项带正号；若它是奇排列，则对应项带负号，用$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$统一表示．

按定义5也可以定义二阶、三阶行列式，它们与§1.1中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的．特别要注意的是，对于一阶行列式有$|a_{11}|=a_{11}$，这里的$|a_{11}|$不表示a_{11}的绝对值．

我们称主对角线以下（上）的元素都是零的行列式为上（下）