中世鸿图

新题型 奥数题库 一日三练

主编/雷家骅 尹秀华

八年级

内蒙古人民出版社

新题型

奥数题库

一日三练

主编/管家骅 尹秀华

八年级

编委 特级教师（排名不分先后）

徐志明 孙恒运 臧怀成 苗凯鹏 杨同华 郭方明
夏京春 周一军 孔祥林 冯祝国 胡自强 王开康
丁永乐 沈学军 张建治 刘　振 崔利弓 王洛海
周延发 胡光焱 贾云锋 王沪城 李广义 陈永凌
常振新 张桂如 董哲文 张艺军 柴光明 梁兆庆
李　媛 蒋庭华

内蒙古人民出版社

奥数题库一日三练

雷家骅　尹秀华　主编

*

内蒙古人民出版社出版发行
(呼和浩特市新城区新华大街祥泰大厦　邮编:010010)
淄博恒业印务有限公司印刷
开本:880×1230　1/32　印张:80　字数:1300千
2006年3月第1版　2006年3月第1次印刷
印数:1—10000册
ISBN 7—204—08096—3/G・2015
定价:106.80元(全十册)

奥数题库 YIRISANLIAN

顾　　问　曹秀云　国家数学奥林匹克竞赛委委员
主　　编　雷家骅　北京师范大学教授
执行主编　尹秀华　北京师范大学副教授
执行副主编　陈　泠　北京师范大学副教授　硕士生导师

雷家骅简介

LEIJIAHUA JIANJIE

1950年生，北京师范大学教授。中国数学奥林匹克首批高级教练员。长期从事数学竞赛的命题、解题、辅导和理论研究工作。已为全国小学联赛、初高中联赛提供多道正式命题。曾受到中国数学奥委会与中国数学普委会的联合表彰。主编的小学、中学、大学数学奥赛丛书受到广泛欢迎。其主要代表作有《中小学数学奥林匹克教材读本》《奥林匹克数学教材》《奥林匹克数学举一反三教程》《数学竞赛导论》。


新题型
奥数题库
一日三练

前 言

奥数竞赛是当前中小学开展数学学科素质教育的高层次的学科知识技能竞赛。奥数试题命题思想新颖，思路开阔，内容广泛，重视启迪学生思维，开发学生智力，培养学生的探究、创新和实践能力；奥数题反映了当今深入开展素质教育的要求，试题内容与当今世界先进的数学教学接轨，所提供的各种信息极大地丰富了数学的教学内容，对调动学生学习数学的积极性，推动数学课程改革、深化课堂教学改革，提高数学课堂教学效率和质量都具有积极的意义。

奥数不是每个学生都要参加，但要强调兴趣。关键是学生有了兴趣，即能学好课内知识，在课内基础上学习课外知识。有兴趣，他们自然就不会感到有负担。其次，奥数的原则是强调课内课外的结合与一致，课内是基础，课外是补充；第三，奥数不要让参于活动的学生感到高不可攀，而是让每个参与的学生，不同层次其础的学生，均获得收获和提高。第四，奥数竞赛活动的目的是为学生营造一个环境和氛围，提供处理方法上的指导，使学生在积极参与的基础上，通过典型的、探索性很强的问题的认识有一个“升华”，其必然就是素质的提高。

本书具有以上所述的双重作用和效力，它不仅仅是学生参加奥数的辅导用书，也是平时课堂课本数学内容、知识应用的补充与深化。

本书主编，由培养了众多国际奥林匹克金牌、银牌得主的全国一流奥赛教练联袂特级教师、教练编写，必将为同学们参加奥数竞赛或各种考试起到相当大的辅导作用。

本书编写得到曹秀云老师、雷家骅教授、尹秀华副教授、徐志明特级教师等的热情关怀和精神上的鼓舞，谨向他们致以衷心的感谢。

编　者

Contents

奥数题库

一日三练

第1讲 因式分解

学法指导

多项式的因式分解是代数式恒等变形的基本形式之一，它被广泛地应用于初等数学之中，是我们解决许多数学问题的有力工具。因式分解方法灵活，技巧性强，学习这些方法与技巧，不仅是掌握因式分解内容所必需的，而且对于培养学生的解题技能，发展学生的思维能力，都有着十分独特的作用。

例1 把多项式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 分解因式.

【分析与解答】 此题可以考虑用配完全立方的办法分解因式。

因为 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+3xy(x+y)+y^3$，

所以 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$。

因此 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$

$=[(x+y)^3+z^3]-3xy(x+y+z)$

$=[(x+y)+z][(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy]$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

名题训练1

把下列各式分解因式

1. m^4+4n^4

2. $(n^2+3n+1)^2-1$

3. $(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

例2 分解因式：$(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)$。

【分析与解答】 本题含有两个字母，且当互换这两个字母的位置时，多项式保持不变，这样的多项式叫作二元对称式。对于较难分解的二元对称式，经常令 $u=x+y$，$v=xy$，用换元法分解因式。

原式 $=[(x+y)^2-xy]^2-4xy[(x+y)^2-2xy]$。

令 $x+y=u$，$xy=v$，则

原式 $=(u^2-v)^2-4v(u^2-2v)$

$=u^4-6u^2v+9v^2=(u^2-3v)^2$

$=(x^2+2xy+y^2-3xy)^2=(x^2-xy+y^2)^2$。

名题训练 2

把下列各式分解因式

1. $x^3+ax^2+bx^2+cx^2+abx+bcx+acx+abc$

2. $x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1$

2. $(a^2-b^2)x^2-4abx-a^2+b^2$

例3 把下面式子分解因式

$$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2。$$

【分析与解答】 若先展开再分解非常麻烦，我们看到前两项是完全平方差的形式。因此可以套用公式逐步去做。

$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2$

$=[(2x^2+6x+2)+(x^2+x-4)][(2x^2+6x+2)$

$\quad-(x^2+x-4)]-(x^2+5x+6)^2$

$=(3x^2+7x-2)(x^2+5x+6)-(x^2+5x+6)^2$

$=(x^2+5x+6)[(3x^2+7x-2)-(x^2+5x+6)]$

$=(x^2+5x+6)(2x^2+2x-8)$

$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4)$

名题训练3

把下列各式分解因式

1. $x^4-x^2(a^2+1)+a^2$
2. $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$
3. $x^2+2xy-8y^2+2zx+14yz-3z^2$

例4 分解因式：$6x^4+7x^3-36x^2-7x+6$。

【分析与解答】

方法一：本解法实际上是将 x^2-1 看作一个整体，但并不设立新元来代替它，即熟练使用换元法后，并非每题都要设置新元来代替整体。

$$\begin{aligned}原式&=6(x^4+1)+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6[(x^4-2x^2+1)+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6[(x^2-1)^2+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6(x^2-1)^2+7x(x^2-1)-24x^2\\&=[2(x^2-1)-3x][3(x^2-1)+8x]\\&=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)\\&=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3)。\end{aligned}$$

方法二：

$$\begin{aligned}原式&=x^2\left(6x^2+7x-36-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}\right)\\&=x^2\left[6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36\right]。\end{aligned}$$

令 $x-\frac{1}{x}=t$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$，于是

$$\begin{aligned}原式&=x^2[6(t^2+2)+7t-36]\\&=x^2(6t^2+7t-24)=x^2(2t-3)(3t+8)\\&=x^2\left[2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right]\left[3\left(x-\frac{1}{x}\right)+8\right]\end{aligned}$$

$=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)$

$=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3)$。

名题训练 4

1. 求出在 1 到 100 之间的整数 n，使 x^2+x-n 能分解为两个整系数一次因式的乘积。

2. 已知 $21x^2+ax+21$ 在正整数范围内可以分解为两个一次因式的积，求出满足条件的整数 a。

3. 已知乘法公式：

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

利用上述公式把 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ 分解因式。

例 5 分解因式：$(1+x+x^2+x^4)^2-x^8$。

【分析与解答】 将多项式"部分还原"或"还原"后重新分组，方法比较灵活，需要一定的数学技巧，因此，在做题时，要认真观察、综合分析。

原式 $=(1+x+x^2)^2+2x^4(1+x+x^2)+x^8-x^8$

$=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^3(x-1)(x^2+x+1)$

$=(1+x+x^2)(1+x+x^2+2x^3+x^4-x^3)$

$=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$。

名题训练 5

1. 分解因式 $x^2+4xy-4+4y^2=$ ________。

2. 设 $x^3+3x^2-2xy-kx-4y$ 可分解为一次与二次因式之积，则 $k=$ ________。

3. 分解因式 $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y$

$-z)^3=$ ________。

例6 分解因式

(1)$x^4-2002x^2+2003x-2002$

(2)$(a-b)^4+(a+b)^4+(a^2-b^2)^2$

【分析与解答】 换元的关键是使引进新元后的式子在形式上尽可能的简单、明了。(1)中把绝对值较大的常数进行换元,(2)中把 $a+b$、$a-b$ 分别用不同的字母换元,换元后解法便一目了然。

(1)设 $2002=y$,则 $2003=y+1$

$$\begin{aligned}原式&=x^4-x^2y+x(y+1)-y\\&=x^4-x^2y+xy+x-y\\&=(x^4+x)-(x^2y-xy+y)\\&=x(x+1)(x^2-x+1)-y(x^2-x+1)\\&=(x^2-x+1)(x^2+x-y)\\&=(x^2-x+1)(x^2+x-2002)\end{aligned}$$

(2)设 $a+b=x$,$a-b=y$。则

$$\begin{aligned}原式&=x^4+y^4+x^2y^2\\&=(x^2+y^2)^2-(xy)^2\\&=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)\\&=[(a+b)^2+(a-b)^2-(a+b)(a-b)]\\&\quad[(a+b)^2+(a-b)^2+(a+b)(a-b)]\\&=(2a^2+2b^2-a^2+b^2)(2a^2+2b^2+a^2-b^2)\\&=(a^2+3b^2)(3a^2+b^2)\end{aligned}$$

名题训练6

1. 分解因式 x^4+4。

2. 分解因式$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$。

3. 分解因式 $x^3-19x-30$。

例7 分解因式：

(1)$m^4+m^2-2mn-n^2+1$；

(2)$p^4-4p^3+8p^2-8p+4$。

【分析与解答】 (1)式中含有“$-2mn-n^2$”，于是可把“m^2”拆成“$2m^2-m^2$”，经过配方，化为平方差形式，再分解因式。过程如下：

$$\begin{aligned}&m^4+m^2-2mn-n^2+1\\=&m^4+2m^2-m^2-2mn-n^2+1\\=&(m^4+2m^2+1)-(m^2+2mn+n^2)\\=&(m^2+1)^2-(m+n)^2\\=&[(m^2+1)+(m+n)][(m^2+1)-(m+n)]\\=&(m^2+m+n+1)(m^2-m-n+1)\end{aligned}$$

(2)式可通过拆项的方法直接配成完全平方式。

$$\begin{aligned}&p^4-4p^3+8p^2-8p+4\\=&(p^4-4p^3+4p^2)+(4p^2-8p)+4\\=&p^2(p-2)^2+4p(p-2)+4\\=&[p(p-2)+2]^2\\=&[p^2-2p+2]^2\end{aligned}$$

名题训练7

1. 分解因式 $a^{3n}+a^n+1$。

2. 分解因式$(x-y)(x+y)+4(y-1)$。

3. 分解因式 $x^3+6x^2+11x+6$。

第2讲 因式分解应用

学法指导

因式分解在解题中的应用非常广泛。在方程、函数、不等式及求值、化简、证明等方面都有重要作用。将因式分解作为一种解题方法，是因为用它解决某些数学问题时，比起解决这一类问题的常规方法更简捷、巧妙。因式分解法的特点是有利于降次、消元，有利于把握多项式的特点，从而将问题化繁为简，化难为易。因式分解的妙处则更充分地蕴含于当前的数学思想及竞赛题中。

例1 因式分解 $x^3+8x^2+17x+10$。

【分析与解答】 多项式特点是奇次项系数和等于偶次项系数和。即 $1+17=8+10$，由此可得四个关系式：①$1=8+10-17$，②$17=8+10-1$，③$8=1+17-10$，④$10=1+17-8$ 从而得到以下拆项分解方法：

方法一：由 $1=8+10-17$，拆首项 $x^3=8x^3+10x^3-17x^3$。

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=8x^3+10x^3-17x^3+8x^2+17x+10\\
&=(8x^3+8x^2)+(10x^3+10)+(-17x^3+17x)\\
&=8x^2(x+1)+10(x+1)(x^2-x+1)-17x(x+1)(x-1)\\
&=(x+1)(x^2+7x+10)\\
&=(x+1)(x+2)(x+5)。
\end{aligned}
$$

方法二：由 $17=8+10-1$，拆一次项为 $17x=8x+10x-x$。

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=x^3+8x^2+8x+10x-x+10\\
&=(x^3-x)+(8x^2+8x)+(10x+10)\\
&=x(x+1)(x-1)+8x(x+1)+10(x+1)\\
&=(x+1)(x^2+7x+10)\\
&=(x+1)(x+2)(x+5)。
\end{aligned}
$$

名题训练 1

1 计算 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2001^2}\right)=$________。

2 计算 $2002^2-2001^2+2000^2-1999^2+\cdots+2^2-1^2=$________。

1 当 $x-y=1$ 时，$x^4-xy^3-x^3y-3x^2y+3xy^2+y^4$ 的值是________。

例 2 分解因式：$2x^2+5xy-3y^2+3x+5y-2$。

【分析与解答】

方法一： 设 $2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$

比较系数得
$$\begin{cases} a_1b_2=2, \\ a_1b_2+b_1a_2=-5, \\ b_1b_2=-3, \\ a_2c_1+a_1c_2=3, \\ b_1c_2+b_2c_1=5, \\ c_1c_2=-2; \end{cases}$$

解此方程组得
$$\begin{cases} a_1=2, \\ b_1=1, \\ c_1=-1, \\ a_2=1, \\ b_2=-3, \\ c_2=2. \end{cases}$$

$\therefore$ 原式 $=(2x+y-1)(x-3y+2)$。

方法二： 设 $2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2$

$=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$

令 $x=0$ 得　$-3y^2+5y-2=(b_1y+c_1)(b_2y+c_2)$

$(-3y+2)(y-1)=(b_1y+c_1)(b_2y+c_2)$

$\therefore \begin{cases} b_1=-3, \\ c_1=2; \end{cases} \begin{cases} b_2=1, \\ c_2=-1。\end{cases}$　①

令 $y=0$ 得　$2x^2+3x-2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$

$(2x-1)(x+2)=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$

$\therefore \begin{cases} a_2=2, \\ c_2=-1; \end{cases} \begin{cases} a_1=1 \\ c_1=2。\end{cases}$　②

名题训练 2

❶ 若 $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=0$，则 $x^6=$__________。

❶ 设有关于 x 的恒等式 $\dfrac{Mx+N}{x^2+x-2}=\dfrac{2}{x+a}-\dfrac{c}{x+b}$，这里 $\dfrac{Mx+N}{x^2+x-2}$ 是最简分式，且 $a>b$，$a+b=c$，则 $N=$__________。

❸ 若 $x-y=m$，$y-z=n$，

则 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=$__________。

例 3 分解因式：$3x^3-4x+1$。

【分析与解答】 多项式的特征是各项系数和为零，即 $3-4+1=0$，由此可得三个关系式：①$3=4-1$；②$-4=-3-1$；③$1=4-3$。从而可得以下三种拆项分解的方法。

方法一：由 $3=4-1$，拆首项 $3x^3=4x^3-x^3$，

故　原式 $=4x^3-x^3-4x+1$

$=(4x^3-4x)-(x^3-1)$

$=4x(x+1)(x-1)-(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x-1)(3x^2+3x-1)$。

方法二：由 $-4=-3-1$，拆一次项为：$-4x=-3x-x$。