图灵数学·统计学丛书

A First Course in Probability

概率论基础教程

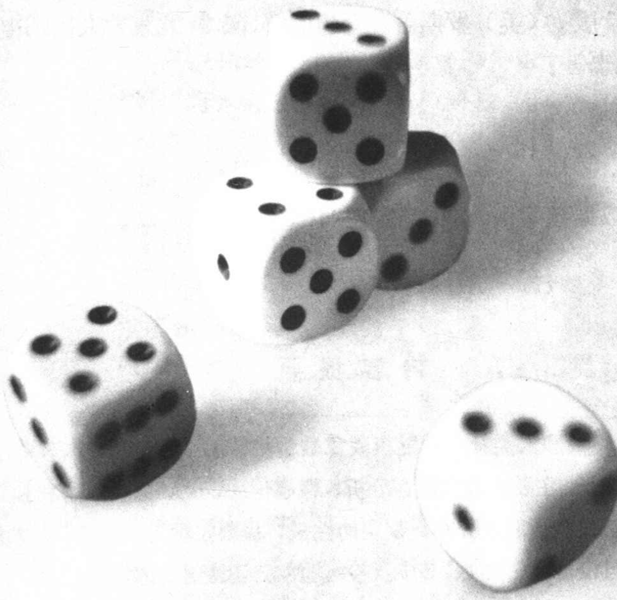
（第7版）

[美] Sheldon M. Ross 著

郑忠国 詹从赞 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图灵数学·统计学丛书



A First Course in Probability

概率论基础教程

（第7版）

[美] Sheldon M. Ross 著

郑忠国 詹从赞 译

人民邮电出版社

北 京

图书在版编目（CIP）数据

概率论基础教程：第7版 /（美）罗斯著；郑忠国等译. —北京：人民邮电出版社，2007.3
（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 978-7-115-15404-0

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①罗…②郑…　Ⅲ. 概率论　Ⅳ. 0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 120464 号

内容提要

概率论是研究自然界和人类社会中随机现象数量规律的数学分支. 本书通过大量的例子讲述了概率论的基础知识, 主要内容有组合分析、概率论公理化、条件概率和独立性、离散和连续型随机变量、随机变量的联合分布、期望的性质、极限定理等. 本书附有大量的练习, 分为习题、理论习题和自检习题三大类, 其中自检习题部分还给出全部解答.

本书作为概率论的入门书, 适用于大专院校数学、统计、工程和相关专业（包括计算科学、生物、社会科学和管理科学）的学生阅读, 也可供应用工作者参考.

图灵数学·统计学丛书

概率论基础教程（第7版）

◆ 著　[美] Sheldon M.Ross
　译　郑忠国　詹从赞
　责任编辑　明永玲　王　利

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：25.75
　字数：544 千字　2007年3月第1版
　印数：1–4 000 册　2007年3月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2005-5227 号

ISBN 978-7-115-15404-0/O1·5

定价：49.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223

版权声明

译者序

概率论是研究自然界和人类社会中随机现象数量规律的数学分支. 概率论的理论和方法与数学的其他分支、自然科学、工程、人文及社会科学各领域相互交叉渗透, 已经成为这些学科中的基本方法. 概率论 (或概率统计) 和高等数学一样已经成为我国高等院校各专业普遍设立的一门基础课.

目前, 这方面的教材已经很多, 但这本由 Sheldon M.Ross 编写的《概率论基础教程》确实是一本很有特点的好教材. 如在介绍概率的概念时, 作者还用流畅的笔调介绍了这些概念的发展历史, 从独立重复试验事件发生频率的极限到近代概率论的公理, 同时引用大量例子介绍如何利用概率的公理进行概率的计算. 这种讲法, 使得即使是只具有初等微积分知识的读者, 也会获益匪浅, 对概率的概念有一个正确的和深刻的认识. 在介绍数学期望的概念时, 作者用大量的例子, 强调应用期望的性质, 特别是利用可加性进行期望计算, 从而使读者加深了对期望的认识, 也提高了运算技巧. 从本书第 1 章到第 8 章, 讲授的主题着重于概率论最基本的概念, 如概率、条件概率、期望、大数定律和中心极限定理等. 本书附有大量的有意义的练习, 分为习题、理论习题和自检习题三大类, 其中自检习题部分还给出全部解答, 以供参考. 从以上分析看出, 本书完全实现了作者在他的前言中的目标 —— 试图成为概率论的入门书.

本书第 1 版出版于 1976 年, 1981 年在国内曾出过第 1 版的中文翻译版. 此书经过作者历次修改, 内容大大扩充. 这个翻译本是根据 2006 年原文第 7 版翻译. 我们认为这个版本是作者积累了几十年教学经验基础上的定型版, 是一本优秀的教材. 此外作者的另一本著作《随机过程》已经成为国内概率统计界推崇的教材. 我们相信本教材也一定会受到国内各界的欢迎.

由于译者的学识和中英文水平有限, 译文难免会有不妥之处, 欢迎广大读者批评指正.

译者谨识

2006 年 5 月

前 言

法国著名数学家和天文学家拉普拉斯侯爵 (人称“法国的牛顿”) 曾经说过:“我们发现概率论其实就是将常识问题归结为计算. 它使我们能够精确地评价凭某种直观感受到的、往往又不能解释清楚的见解……值得注意的是, 概率论这门起源于机会游戏的科学, 早就应该成为人类知识中最重要的组成部分……生活中那些最重要的问题绝大部分恰恰是概率论问题. ”尽管许多人认为, 这位对概率论的发展作出过重大贡献的著名侯爵说话有点过头, 然而今日, 概率论已经成为几乎所有的科学工作者、工程师、医务人员、法律工作者以及企业家们手中的基本工具, 这是一个不争的事实. 事实上, 现代人们不再问“是这样么? ”而是问“这件事发生的概率有多大? ”

本书试图成为概率论的入门书. 读者对象是数学、统计、工程和其他专业 (包括计算机科学、生物学、社会科学和管理科学) 的学生. 他们的先修知识只是初等微积分. 本书试图介绍概率论的数学理论, 同时通过大量例子说明这门学科的广泛的应用.

第 1 章介绍了组合分析的基本原理, 它是计算概率的最有效的工具.

第 2 章介绍了概率论的公理体系, 并且指出如何应用这些公理进行概率计算.

第 3 章讨论概率论中极为重要的概念, 即事件的条件概率和事件间的独立性. 通过一系列例子说明当部分信息可利用时, 条件概率就会发挥它的作用; 即使在没有这部分信息时, 条件概率也可以使概率的计算变得容易、可行. 利用“条件”计算概率这一极为重要的技巧还将出现在第 7 章, 在那里我们用它来计算期望.

在第 4、5、6 章, 我们引进随机变量的概念, 第 4 章讨论离散随机变量, 第 5 章讨论连续随机变量, 而将随机变量的联合分布放在第 6 章. 在第 4 章和第 5 章中讨论了随机变量的期望和方差, 并且对许多常见的随机变量, 求出了相应的期望和方差.

第 7 章讨论了期望值和它的一些重要的性质. 书中引入了许多例子, 解释如何利用随机变量和的期望等于随机变量期望的和这一重要规律来计算随机变量的期望, 本章中还有几节介绍条件期望 (包括它在预测方面的应用) 和矩母函数等. 最后一节介绍了多元正态分布, 同时给出了来自正态总体的样本均值和样本方差的联合分布的简单证明.

在第 8 章我们介绍了概率论的主要的理论结果. 特别地, 我们证明了强大数定律和中心极限定理. 关于强大数定律的证明, 我们假定随机变量具有有限的四阶矩.

在这种假定之下, 证明十分简单. 在中心极限定理的证明中, 我们假定了莱维 (Lévy) 的连续性定理成立. 在本章中, 我们还介绍了若干概率不等式, 如马尔可夫不等式、切比雪夫不等式和切尔诺夫界. 在最后一节, 我们给出用随机变量的相应概率去近似独立伯努利随机变量和的相关概率的误差界.

第 9章介绍了一些附加课题, 如马尔可夫链、泊松过程以及信息编码理论初步. 第 10 章介绍了统计模拟.

第 7 版将教材内容进一步扩充与调整, 加入了很多新的习题和例子. 其中第 3 章例 3h 进一步展示了 e 的无处不在; 第 3 章例 5f 讨论了信息的序贯修正; 第 4 章例 7d 利用泊松近似的方法, 证明了 n 次抛掷硬币试验中, 正面朝上的最大游程的长度以 0.86 的概率落入 $\log_2(n) \pm 2$ 的区域内. 同时引入了关于优惠收集的若干新的例子 (第 3 章例 4i, 第 7 章例 3d 和例 3f 等) 和多项分布的例子 (第 6 章例 4c). 本版还加入了许多新内容. 例如增加了第 2 章命题 4.4 的附注. 在关于事件和的概率等式中, 若取前面若干项可依次得到事件和的概率的上下界. 7.3 节是新编入的一节, 它讨论一串事件发生次数的矩的计算方法. 作为例子, 导出了二项、超几何、配对问题以及负几何随机变量的矩的公式. 关于二元正态分布, 也加入了若干新材料, 在第 6 章例 5c, 导出了它的条件分布和边缘分布. 第 7 章例 5f 中计算了两个变量的相关系数, 并利用相关系数分析了第 7 章例 8b 中的贝叶斯统计的例子.

与前几版一样, 每章后面附了三组练习题, 它们分别命名为**习题**、**理论习题**和**自检习题**. 在附录 B 中提供了自检习题的全部解答, 以供学生检验他们的理解能力.

本书前几版曾带有磁盘, 包含有概率模型部分的材料, 现在这些内容可从本书配套网站下载：http://www.prenhall.com/Ross.[1]

学生利用网站可在以下 6个方面快速计算和模拟：

- 有 3 个模块可进行二项、泊松和正态随机变量的计算.
- 另一个模块演示中心极限定理, 考虑取 0,1,2,3,4 共 5 个值的随机变量, 容许使用者输入相应的分布和样本量 n. 模块将显示 n 个独立随机变量和的分布列, 当 n 增加时, 能“看”到其分布列收敛到正态分布的密度函数的形状.
- 其他 2 个模块演示强大数定律, 使用者可以输入 5 个可能值的概率以及样本量 n. 模块利用随机数模拟具有指定分布的一组样本. 模块将各个结果出现的次数用图形显示出来, 同时给出样本均值. 两个模块在显示试验结果上稍有差别.

我们感谢下列对本书各个版本给出十分有价值的意见的人们：

Robert Bauer(伊利诺伊大学厄巴纳 - 尚佩恩分校), Arthur Benjamin(Harvey Mudd 学院), Geoffrey Berresford(长岛大学), Baidurya Bhattacharya(特拉华大学), Shahar Boneh(丹佛城市州立学院), Nicolas Christou(加州大学洛杉矶分校), Scott Emerson(华盛顿大学), Larry Harris(肯塔基大学), Julia L.Higle(亚利桑那大学), Mark

1. 本书配套材料也可从图灵网站 www.turingbook.com 下载.

Huber(杜克大学), Hamid Jafarkhani(加州大学厄文分校), Chuanshu Ji(北卡罗来纳大学 Chapel Hill 分校), Joe Naus(罗格斯大学), Nhu Nguyen(新墨西哥州立大学), Ellen O'Brien(乔治 · 梅森大学), Jim Propp(威斯康星大学), Malcolm Sherman(纽约州立大学奥尔巴尼分校), Murad Taqqu(波士顿大学), Eli Upfal(布朗大学).

我们同时感谢下列人员对于这一版的修改提出的有益的建议和意见:

Anastasia Ivanova(北卡罗来纳大学), Richard Bass(康涅狄格大学), Ed Wheeler (田纳西大学), Jean Cadet(纽约州立大学石溪分校), Jim Propp(威斯康星大学), Mike Hardy(麻省理工学院), Anant Godbole(密歇根科技大学), Zakkhula Govindarajulu(肯塔基大学), Richard Groeneveld(爱荷华州立大学), Bernard Harris(威斯康星大学), Stephen Herschkorn(罗格斯大学), Robert Keener(密歇根大学), Thomas Liggett(加州大学洛杉矶分校), Bill McCormick(佐治亚大学), Kathryn Prewitt(亚利桑那州立大学).

特别要感谢 Hossein Hamedani(Marquette 大学) 和 Ben Perles 对手稿的仔细校对.

我们也要感谢本书的早期版本的校阅者:

Thomas R.Fischer(德州农机大学), Jay DeVore(圣路易斯－奥比斯波的加州技术大学), Robb J.Muirhead(密歇根大学), David Heath(康奈尔大学), Myra Samuels(普度大学), I.R Savage(耶鲁大学), R.Miller(斯坦福大学), K.B Athreya(爱荷华州立大学), Phillip Beckwith(密歇根科技大学), Howard Bird (圣克劳德州立大学), Steven Chiappari(圣克拉拉大学), James Clay(亚利桑那大学图森分校), Francis Conlan(圣克拉拉大学), Fred Leysieffer(佛罗里达州立大学), Ian McKeague(佛罗里达州立大学), Helmut Mayer(佐治亚大学), N.U. Prabhu(康奈尔大学), Art Schwartz(密歇根大学安阿伯分校), Therese Shelton(西南大学), Allen Webster(布拉德利大学).

S.R.

smross@usc.edu

目　录

第 1 章　组合分析

1.1　引　言

首先，我们提出一个与概率论有关的有趣的经典问题：一个通信系统含 n 个天线，顺序地排成一排，只要没有两个连续的天线都失效，那么这个系统就可以接收到信号，此时称这个通信系统是*有效的*. 已经探明这 n 个天线里，恰好有 m 个天线是失效的，问此通信系统仍然有效的概率是多大？举例来说，设 $n=4, m=2$，通信系统是否有效取决于这 n 个天线的设置方式（它们的排列次序）. 这 4 个天线一共有 6 种可能的设置方式

$$\begin{array}{ccc} 0\ 1\ 1\ 0 & 1\ 0\ 1\ 0 & 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 \end{array}$$

其中，1 表示天线有效，0 表示天线失效. 可以看出前 3 种情况整个通信系统仍然有效，而后 3 种情况系统将失效，因此，若天线的设置方式是随机排列的，所求的概率应该是 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. 对于一般的 n 和 m 来说，用类似上述方法可以计算出所求概率. 也即，先计算使得系统仍有效的设置方式有多少种，再计算总共有多少种设置方式，两者相除即为所求概率.

从上所述可看出，一个有效地计算事件发生结果数目的方法是非常有用的. 事实上，概率论里的很多问题只要通过计算一个事件发生结果的数目就能得以解决. 关于计数的数学理论通常称为*组合分析*(combinatorial analysis). 1

1.2　计数基本法则

对我们的整个讨论来说，以下关于计数的法则是基本的. 粗浅地说，若一个试验有 m 个可能结果，而另一个试验又有 n 个可能结果，则两个试验一共有 mn 个结果.

> **计数基本法则**
> 有两个试验，其中试验 1 有 m 种可能发生的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有 n 种可能发生的结果，则对这两个试验来说，一共有 mn 种可能结果.

基本法则的证明　通过列举两个试验所有可能的结果来证明这个问题，结果

如下：

$$\begin{array}{cccc}(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n)\\(2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\(m,1) & (m,2) & \cdots & (m,n)\end{array}$$

其中, (i,j) 表示第一个试验结果是第 i 种、第二个试验结果是第 j 种. 因此, 所有可能结果组成一个矩阵, 共有 m 行 n 列, 结果的总数为 $m\times n$, 这样就完成了证明.

例 2a　一个小团体由 10 位妇女组成, 每位妇女又有 3 个孩子. 现在要从其中选取一位妇女和她的一个孩子评为“年度母亲和年度儿童”, 问一共有多少种可能的选取方式?

解: 将选择妇女看成第一个试验, 而接下来选择这位母亲的一个孩子看作第二个试验, 那么根据计数基本法则可知, 一共有 $10\times 3=30$ 种选择方式. ■

当有 2 个以上的试验时, 基本法则可以推广如下：

推广计数法则

一共有 r 个试验. 第一个试验有 n_1 种可能结果; 对应于第一个试验的每一种试验结果, 第二个试验有 n_2 种可能结果; 对应于头两个试验的每一种
2 试验结果, 第三个试验有 n_3 种可能结果; 等等. 那么, 这 r 个试验一共有 $n_1\cdot n_2\cdots n_r$ 种可能结果.

例 2b　一个大学计划委员会由 3 名新生、4 名二年级学生、5 名三年级学生、2 名毕业班学生组成, 现在要从中选 4 个人组成一个分委员会, 要求来自不同的年级, 一共有多少种选择方式?

解: 可以把它理解为从每个年级选取一个代表, 从而有 4 个试验, 根据推广计数法则, 一共有 $3\times 4\times 5\times 2=120$ 种可能的选择结果. ■

例 2c　车牌号是 7 位的, 如果要求前 3 个位置必须是字母, 后 4 个必须是数字, 一共有多少种编排车牌号的方式?

解: 根据推广计数法则, 可知道答案为: $26\times 26\times 26\times 10\times 10\times 10\times 10=175\ 760\ 000$. ■

例 2d　对于只定义在 n 个点上的函数, 如果函数取值只能为 0 或 1, 这样的函数有多少?

解: 设这 n 个点为 $1,2,\cdots,n$, 既然对每个点来说, $f(i)$ 的取值只能为 0 或者 1, 那么一共有 2^n 个这样的函数. ■

例 2e　在例 2c 中, 如果不允许字母或数字重复, 一共有多少种可能的车牌号?

解: 这种情况下, 一共有 $26\times 25\times 24\times 10\times 9\times 8\times 7=78\ 624\ 000$ 种可能的车牌号. ■

1.3 排 列

按随意顺序来排列字母 a, b, c, 一共有多少种排列方式? 通过直接列举, 可知一共有 6 种: abc, acb, bac, bca, cab 以及 cba. 每一种都可以称为一个排列 (permutation). 因此, 3 个元素一共有 6 种可能排列方式. 这个结果能通过计数基本法则得到: 在排列中第一个位置可供选择的元素有 3 个, 第二个位置可供选择的元素是剩下的两 3
个之一, 第三个位置只能选择剩下的 1 个元素, 因此一共有 $3\times2\times1=6$ 种可能的排列.

假设有 n 个元素, 那么用上述类似的方法, 可知一共有 $n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$ 种不同的排列方式.

例 3a 一个垒球队一共有 9 名队员, 问一共有多少种击球顺序?

解: 一共有 $9!=362\ 880$ 种可能的击球顺序. ■

例 3b 某概率论班共有 6 名男生、4 名女生, 有次测验是根据他们的表现来排名次, 假设没有两个学生成绩一样.

(a) 一共有多少种排名次的方式?

(b) 如限定男生、女生分开排名次, 一共有多少种排名次的方式?

解:

(a) 每种排名方法都对应着一个 10 人的排列方式, 故答案是: $10!=3\ 628\ 800$.

(b) 男生一起排名次有 $6!$ 种可能, 女生一起排名次有 $4!$ 种, 根据计数基本法则, 一共有 $6!\times4!=720\times24=17\ 280$ 种可能结果. ■

例 3c 把 10 本书放到书架上, 其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在要求相同类别的书必须紧挨着放, 问一共有多少种放法?

解: 如果数学书放在最前面, 接下来放化学书, 再下来放历史书, 最后放语文书, 那么一共有 $4!3!2!1!$ 种排列方式. 而这 4 种书的顺序一共又是 $4!$ 种, 因此, 所求答案是 $4!4!3!2!1!=6912$. ■

接下来讨论如果有 n 个元素, 其中有些是不可区分的, 这种排列数如何计算? 看下面的例子. 4

例 3d 用 PEPPER 的 6 个字母进行排列, 一共有几种不同的排列方式?

解: 如果3个字母 P 和 2 个字母 E 都是可以区分的 (标上号), 也即 $P_1E_1P_2P_3E_2R$, 一共有 $6!$ 种排列方式. 然而, 考察其中任一个排列, 比如 $P_1P_2E_1P_3E_2R$, 如果分别将 3 个字母 P 和 2 个字母 E 重排, 那么得到的结果仍然是 PPEPER, 也就是说, 总共有 $3!2!$ 种排列

$$
\begin{array}{llll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R & P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R & P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R & P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}
$$

这些排列都是同一种形式: PPEPER. 因此一共有 $6!/(3!2!)=60$ 种不同的排列方

式. ■

一般来说，利用上述同样的方法可知：n 个元素，如果其中 n_1 个元素彼此相同，另 n_2 个彼此相同，$\cdots$，n_r 个也彼此相同，那么一共有 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ 种排列方式.

例 3e 一个棋类比赛一共有 10 个选手，其中 4 个来自俄罗斯，3 个来自美国，2 个来自英国，另 1 个来自巴西. 如果比赛结果只记录选手的国籍，那么一共有多少种可能结果?

解：一共有 $\dfrac{10!}{4!3!2!1!} = 12\,600$ 种可能结果. ■

例 3f 有 9 面小旗排列在一条直线上，其中 4 面白色、3 面红色和 2 面蓝色，颜色相同的旗是一样的. 如果不同的排列方式代表不同的信号，那么一共有多少种可能的信号?

5 **解**：一共有 $\dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$ 种不同的信号. ■

1.4 组 合

从 n 个元素当中取 r 个，一共有多少种取法? 这也是一个有趣的问题. 比如，从 A,B,C,D 和 E 这 5 个元素中选取 3 个组成一组，一共有多少种取法? 解答如下：取第一个有 5 种取法，取第 2 个有 4 种取法，取第三个有 3 种取法，所以，如果考虑选择顺序的话，那么一共有 $5\times4\times3$ 种取法. 但是，每一个包含 3 个元素的组（比如包含 A,B,C 的组）都被计算了 6 次，(也即，如果考虑顺序的话，所有的排列 ABC,ACB, BAC,BCA,CAB,CBA 都被算了一次.) 所以，组成方法数为：

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$$

一般来说，如果考虑顺序的话，从 n 个元素中选择 r 个组成一组一共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种方式，而每个含 r 个元素的小组都被重复计算了共 $r!$ 次. 所以，能组成不同的组的数目为：

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

记号与术语

对 $r \leqslant n$，我们定义 $\dbinom{n}{r}$ 如下：

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

并且说 $\dbinom{n}{r}$ 表示了从 n 个元素中一次取 r 个的可能组合数. [1]

1. 为了方便，0! 被定义为 1，因此，$\dbinom{n}{0}=\dbinom{n}{n}=1$. 当 $i<0$ 或者 $i>n$ 时，有时也认为 $\dbinom{n}{i}$ 等于 0.

因此, $\binom{n}{r}$ 就表示了从 n 个元素中一次取 r 个元素的可能取法的数目, 如果不考虑抽取顺序的话.

例 4a 从 20 人当中选择 3 人组成委员会, 一共有多少种选法? 6

解: 一共有 $\binom{20}{3} = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$ 种选法. ■

例 4b 有个 12 人组成的团体, 其中 5 位女士, 7 位男士, 现从中选取 2 位女士, 3 位男士组成一个委员会, 问有多少种取法? 另外, 如果其中有 2 位男士之间有矛盾, 并且坚决拒绝一起工作, 那又有多少种取法?

解: 有 $\binom{5}{2}$ 种方法选取女士, 有 $\binom{7}{3}$ 种方法选取男士, 根据基本计数法则一共有 $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 350$ 种方式选取 2 位女士 3 位男士.

现在来看如果有两位男士拒绝一起工作, 那么选取 3 位男士的 $\binom{7}{3} = 35$ 种方法中, 有 $\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$ 种同时包含了该两位男士, 所以, 一共有 $35 - 5 = 30$ 种选取方法不同时包含那两位有矛盾的男士; 另外, 选取女士的方法仍是 $\binom{5}{2} = 10$ 种, 所以, 一共有 $30 \times 10 = 300$ 种选取方式. ■

例 4c 假设一排 n 个天线中, 有 m 个是失效的, 另 $n - m$ 个是有效的, 并且假设所有有效的天线之间不可区分, 同样, 所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种排列方式, 使得没有两个连续的天线是失效的?

解: 先将 $n - m$ 个有效天线排成一排, 既然没有连续两个失效的, 那么两个有效天线之间, 必然至多放置一个失效的. 也即, 在 $n - m + 1$ 个可能位置中 (如图 1.1 中的星号), 选择 m 个来放置失效天线. 因此有 $\binom{n-m+1}{m}$ 种可能方式确保在两个失效天线之间至少存在一个有效天线.

* l * l * l ··· * l * l *

l: 有效天线 7

*: 放最多一个失效天线

图 1.1 天线的排列

以下是一个非常有用的组合恒等式:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \leqslant r \leqslant n \tag{4.1}$$

上述恒等式可用分析的方法证明, 也可从组合的角度来证明. 设想从 n 个元素中取 r 个, 一共有 $\binom{n}{r}$ 种取法. 从另一个角度来考虑, 不妨设这 n 个元素里有一个特殊的, 记为元素 1, 那么取 r 个元素就有两种结果, 取元素 1 或者不取元素 1. 取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种 (从 $n-1$ 个元素里面取 $r-1$ 个); 不取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r}$ 种 (从去掉元素 1 的剩下 $n-1$ 个元素中取 r 个). 两者之和就是从 n 个元素里取 r 个的方法之和, 所以恒等式成立.

值 $\binom{n}{r}$ 经常也称为*二项式系数*(binomial coefficient), 这是因为它们是以下的二项式定理中重要的系数.

二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{4.2}$$

以下提供二项式定理的两个证明方法, 其一是数学归纳法, 其二是基于组合考虑的证明.

二项式定理的归纳法证明 $n=1$ 时, (4.2) 式化为 $x+y=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0=y+x$ 假设 (4.2) 式对于 $n-1$ 成立, 那么对于 n

8

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

在前面的求和公式里令 $i=k+1$, 后面的求和公式里令 $i=k$, 那么

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i y^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]x^i y^{n-i} + y^n \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} + y^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\end{aligned}$$

这样就证明了等式. ■

二项式定理的组合法证明 考虑乘积 $(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$ 展开后一

共包含 2^n 项, 每一项都是 n 个因子的乘积, 而且每一项都包含因子 x_i 或 y_i, 例如:

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2$$

这 2^n 项和里面, 一共有多少项含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i?

含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i 的每一项对应了从 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 里取 k 个元素的取法. 因此一共有 $\binom{n}{k}$ 个这样的项. 这样, 令 $x_i=x, y_i=y, i=1,\cdots,n$, 可以看出

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$ ■

例 4d 展开 $(x+y)^3$.

解:

$$\begin{aligned}(x+y)^3&=\binom{3}{0}x^0y^3+\binom{3}{1}x^1y^2+\binom{3}{2}x^2y+\binom{3}{3}x^3y^0\\&=y^3+3xy^2+3x^2y+x^3\end{aligned}$$ ■

9

例 4e 一个有 n 个元素的集合共有多少子集?

解: 含有 k 个元素的子集一共有 $\binom{n}{k}$ 个, 因此所求答案为:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n.$$

该结果还可以这样得到: 给该集合里的每个元素都标上 1 或 0, 每种标法都一一对应了一个子集, 例如, 当把所有元素都标为 1 时候, 就对应着一个含有所有元素的子集. 因为一共有 2^n 种标法, 所以一共有 2^n 个子集.

上述结论包含了一个元素都没有的子集 (也即空集), 所以至少有一个元素的子集一共有 2^n-1 个. ■

1.5 多项式系数

本节考虑如下问题: 有 n 个不同的元素, 分成 r 组, 每组分别有 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 个元素, 其中 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$, 一共有多少种分法? 注意到, 第一组成员有 $\binom{n}{n_1}$ 种选取方法, 接下来, 选定第一组成员后, 选第二组成员时只能从剩下的 $n-n_1$ 个元素中选, 一共有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种取法, 接下来第三组有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种取法, 等等. 因此, 根据推广计数法则, 将 n 个元素分成 r 组的分法总数一共是:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$