保险精算学通论

范兴华　邹公明　编著

清华大学出版社

保险精算学通论

范兴华　邹公明　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本教材主要讲述寿险精算学及非寿险精算学，涵盖精算学的系列基础知识，例如利息理论及生存模型的构造理论，书中还编有一些计算机程序，便于学生测试保费。同时还可为CFA(金融分析师)们进行理财提供工具，这样能使学生更加深入地掌握精算学的用途，减少学生的计算量，并且增加学习的趣味性与应用性。这些程序还可供从事精算实务的工作人员使用，具有很高的实用价值。

图书在版编目(CIP)数据

保险精算学通论/范兴华、邹公明编著. 北京：清华大学出版社，2007.1
ISBN 978-7-302-13867-9

Ⅰ. 保… Ⅱ. 邹… Ⅲ. 保险—精算学 Ⅳ. F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 114158 号

责任编辑：徐学军
责任校对：王凤芝
责任印制：何 芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：24　**字　数**：475千字
版　　次：2007年1月第1版　　**印　　次**：2007年1月第1次印刷
印　　数：1~4000
定　　价：38.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：023538-01

目　录

ONTENTS

第1篇　复利数学

第 2 篇　生存模型的构造理论

第 3 篇 寿险精算模型

第1篇 复利数学

第1章

CHAPTER 1

利息的度量

学习目标

- 掌握积累函数与金额函数
- 掌握实际利率的定义
- 掌握单利与复利的含义
- 掌握现值与实际贴现率的含义
- 掌握名义利率与名义贴现率、利息效力与贴效力的含义
- 了解利息度量的简单运用

1.1 引言

利息可定义为资本借入者向资本借出者由于借出资本而支付的报酬。对于资本借出者而言,利息就是借出资本的租金收入;对于资本借入者而言,利息就是借入资本而付出的代价。从理论上讲,资本和利息不一定是同类的东西。譬如,农夫张拖借给农夫李麦一台拖拉机用于收割小麦,李麦就可以小麦为利息,作为对张拖借出拖拉机的回报。显然,拖拉机与小麦并非同类。但本书讨论的资本都是货币资本,并且借出资本与利息都是同一类型的货币资本,从而消除计量单位和汇率的麻烦与干扰。

影响利息的因素通常有本金的大小、借期的长短、通货膨胀及风险的大小等。显然,在其他条件相同时,借 10 个单位的资金与借 100 万个单位的资金会有不同的单位利息(每单位借出资金所获的利息),银行也有大额与小额存款之分,这种划分的依据就源于本

金对利息的影响。借期的长短对利息数额也有重要影响，银行的存款利息表就是有力的例证。对于固定利息的资金借出者而言，在严重的通货膨胀时期，借出者的资金会贬值。当然，理性并且预期到未来通货膨胀的资金借出者为了预防其借出资金的贬值，他会提高单位资本所获得的利息。风险的因素对利息的影响更为众人所知，“高风险高收益”这句俗语就是这个意思。银行对客户进行贷款时，通常会关注客户的信用等级，不同客户的信用等级就决定了银行出借的资金价格，这个价格通常就是出借的单位资金获得的利息。

实际上，影响利息的因素远不止以上四种。借贷双方的心理博弈、效用的作用、宏观环境的变化、世界上重要金融资产价格的浮动、政局的稳定性等都会影响到单位资金利息的获得能力。可这些影响的量化处理涉及复杂的经济、政治、数学甚至心理等诸多学科的高深理论。为了简化处理，除非特别说明，本书假定以上讨论的因素不影响单位资金的租金价格。本书讨论的范畴将局限在一定的单位资金的租金价格下，本金及时间因素对利息的影响。

专栏 1.1

资金价格的决定与一般商品价格的决定有显著的不同。一般商品价格由供求关系也就是生产者与消费者的行为共同决定，某个商品的价格决定不会对宏观经济指标产生大的影响，属于微观经济的范畴。可是资金的价格决定不仅与供求双方有关，而且与众多的宏观经济变量息息相关，资金价格的决定甚至对整个经济的平衡产生重要影响。鉴于资金价格的特殊性，许多经济学家对资金价格的决定理论进行了探索。二百余年来，形成了诸多的理论派别。下面对主要的资金价格的决定理论予以介绍。

首先，是马克思的资金价格决定论。他认为利息是社会平均利润的一部分，并以该利润作为最高限。其次，是资本边际生产力资金价格决定论。该理论认为资金的价格由资本的边际生产力决定，利息是资本生产力创造的收入。这种理论是西方经济学家最主要的看法。这种对利息来源的结论与马克思的理论有着本质的不同。现代西方经济学古典学派创始人马歇尔首先提出资金的价格由投资和储蓄的均衡点决定。瑞典学派创始人魏克赛尔提出的自然利率理论是对马歇尔理论的发展，他认为资金的价格与货币和物价的关系比较密切。最具革命性影响的理论是凯恩斯的流动性偏好理论，他认为资金的价格作为货币现象是由货币量的供求关系决定的。利息是在一定时期内牺牲流动性偏好的报酬。熊彼特首先在他的创新理论中提出可贷资金价格决定论，该理论被罗伯逊进一步完善，他们认为凯恩斯流动性偏好理论决定的资金价格是一个短期价格。在短期内货币数量增加会使资金价格下降，但在长期内，货币数量的增加会引起货币贬值及通货膨胀，从而导致资金价格利率的增长。最后，希克斯与汉森在可贷资金决定论的基础上提出了一般市场均衡资金价格决定论，他们认为劳动力市场、商品市场、金融市场会一起决定资金的价格。

这些理论可使我们从不同侧面了解资金价格的决定因素，更为准确地把握市场脉搏，使我们的宏观经济快速、平稳地运行。

1.2　积累函数与金额函数

在一项金融业务中，用来生息的初始投资金额称为本金。如果这笔业务在投资期内没有追加或抽回一定数额的资金，到投资期结束，投资者收到的总金额称为积累值。积累值与本金的差额就是利息金额，简称利息。

如果期初投资额即本金为 1 单位，并且在任何时刻没有追加或抽回资本，那么在纯利息的效应下在时刻 t 时的积累值定义为积累函数 $a(t)$。这个函数具有如下性质：

(1) $a(0)=1$。

(2) $a(t)$通常是递增的。

常数的 $a(t)$ 意味着利息为零；递减的 $a(t)$ 则表明利息为负，意味着一笔投资在经历了一段时间后亏损了。

(3) 如果利息连续增加，则 $a(t)$ 也是连续的。但如果有付息日的规定，则 $a(t)$ 在付息日处是间断的。

函数 $a(t)$ 的图像通常如图 1-1 所示。

一般情况下，本金并不为 1。若本金为 k，则积累到时刻 t 的积累值被定义为金额函数 $A(t)$。$A(t)$ 具有如下性质：

(1) $A(0)=k$。

(2) $A(t)=ka(t)$。

(3) $A(t)$ 通常是递增的。

(4) $A(t)$ 的连续性与 $a(t)$ 相一致。

显然 $A(t)$ 是由 $a(t)$ 派生出来的，其图像可由 $a(t)$ 的图像压缩或拉伸 k 倍得到。$a(t)$ 与 $A(t)$ 两个函数是度量利息的基本函数，由此定义可以得到度量利息的基本概念。

例 1.1　设 $a(t)=at^2+b$，且 $a(6)=73$，期初本金为 10 个单位，求 $A(8)$。

解　由 $a(0)=1$ 可知

$$a(0)=a\cdot 0^2+b=b=1$$

由 $a(6)=73$ 可知

$$a(6)=36\cdot a+b=36a+1$$

$$a=(73-1)/36=2$$

故

$$A(8)=10a(8)=10\times(2\times 8^2+1)=1\,290$$

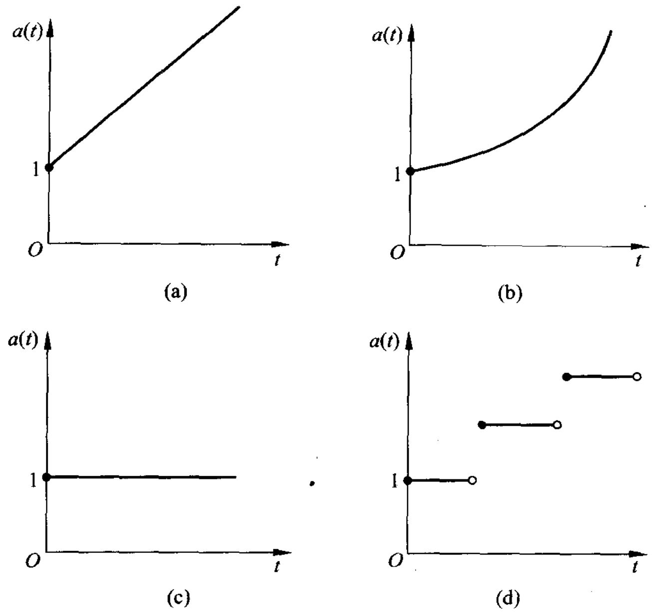

图 1-1 函数 $a(t)$的图像

1.3 实际利率

实际利率是本书讨论的第一种利息度量工具,它定义为:

某一时期开始时投资 1 单位本金,在该时期末所获利息数额就是该时期的实际利率,记为 i,并常用百分数来表示。显然

$$i = a(1) - a(0) = a(1) - 1$$

或

$$a(1) = 1 + i$$

对此定义给出如下说明:

(1) 实际利率度量的利息是在所考察的度量期的期末支付的。

(2) 本金在度量期内不发生改变,即在度量期无本金抽回也无新的本金加入。

(3) 由定义可知

$$i = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)}$$

其中 I_1 表示投入一定数量的本金在第一度量期末所获利息。

由此可得实际利率的另一等价定义：

实际利率是某时期内得到的利息金额与此时期开始时投资的本金金额之比。

实际利率可以在任何度量时期进行计算。设 i_n 为从投资日起的第 n 个时期的实际利率，则有

$$i_n = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}$$

其中 n 为大于等于 1 的整数，I_n 的含义与前 I_1 的含义类似，当然也可定义为 $A(n)-A(n-1)$。

例 1.2　若 $A(4)=1\,000$ 及 $i_n=0.01n$，求 $A(6)$。

解　由 $i_5=\dfrac{A(5)-A(4)}{A(4)}$ 可知

$$A(5) = i_5 \cdot A(4) + A(4) = 0.05 \times 1\,000 + 1\,000 = 1\,050$$

同样，由 $i_6=\dfrac{A(6)-A(5)}{A(5)}$ 可知

$$A(6) = (1+i_6)\cdot A(5) = (1+0.06)\times 1\,050 = 1\,113$$

专栏 1.2　LIBOR

伦敦银行间同业拆借利率（London Inter Bank Offered Rate，简称 LIBOR）在国际金融市场中是应用最广泛的市场基准利率，绝大多数资金交易、商业信贷、债券等资金利率水平都是参照 LIBOR 确定的。在期限上 LIBOR 有 1 天、7 天、14 天、1 个月～12 个月等共 15 个品种，在币种上包括美元、日元、英镑、欧元、瑞士法郎、加拿大元、澳大利亚元等世界主要自由兑换货币。LIBOR 具有权威性、科学性及实用性。除了 LIBOR 之外，美国联邦基金利率，即美国金融机构之间相互拆借在联邦储备银行的储备资产形成的利率又是一重要的主导型基准利率，这是由于美国在世界经济金融体系的特殊地位使然。在我国，全国银行间同业拆借利率（CHIBOR）是我国商业银行利率投资的重要依据，该利率有 1 天、7 天、20 天、30 天、60 天、90 天、120 天 7 个交易期限。CHIBOR 是由借贷双方根据市场资金供求情况自行决定的，从而可以反映全国范围内的资金供求状况。

1.4　单利与复利

对于 $a(t)$ 有 $a(0)=1$ 及 $a(1)=1+i$，满足这两个条件的积累函数有无数个，在金融实务中有两种最为重要，那就是本节所讨论的单利与复利。

对于线性积累函数 $a(t)=1+i\cdot t$ 产生的利息称为**单利**。

若单利 i 为常数，容易求出第 n 期的实际利率 i_n。

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{(1+i\cdot n)-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)}=\frac{i}{1+i(n-1)}$$

显然 i_n 在 $n\geqslant 1$ 时是 n 的递减函数。因此可得出结论：常数单利意味着实际利率随期限的延伸是递减的。

单利定义中的 $a(t)=1+i\cdot t$ 当 t 为整数时，理解该定义还比较顺利，可是当 t 为大于等于零的实数时，单利就难以想象了。此时相当于把利息按比例分配给度量时期的任何部分。在这种情况下，积累函数是线性的。

例 1.3　某项资金的单利率为 4%，问在多长的时期里它会等价于 2.5%的实际利率？

解　依题意可知

$$\begin{cases} i_n=2.5\%=\dfrac{i}{1+i(n-1)} \\ i=4\% \end{cases}$$

解得：$n=16$

故在 16 个积累期里 4%的单利会等价于 2.5%的实际利率。

很显然，在前面积累期内的单利并不作为本金再产生附加利息，而即将定义的复利则会“利滚利”。

积累函数 $a(t)=(1+i)^t$ 产生的利息称为**复利**。

假设各积累期内的复利利率为常数 i，则第 n 期的实际利率 i_n 为

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{(1+i)^n-(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}=i$$

可知复利利率与实际利率是相等的。

对于 $a(t)=(1+i)^t$ 当 t 为整数时，更容易解释复利“利滚利”的特点。$a(t)=(1+i)^t$ 可分解为

$$a(t)=\underbrace{(1+i)(1+i)\cdots(1+i)}_{t\text{个}(1+i)}=a(t-1)(1+i)$$

这说明前期的利息也以利息率 i 参与了积累。一般而言，超过 1 年的长期金融业务都用复利，1 年以内的短期业务也常用复利，有时会用单利来近似复利。在本书中除非特别说明，我们用复利而不用单利。

例 1.4　在 6%的年利率之下，期初投资 10 000 元，投资期为 10 年，试计算第 10 年末在复利与单利两种情况下的积累值之差。

解　在单利情况下：$A(10)=10\,000(1+10\times 6\%)=16\,000$（元）

在复利情况下：$A(10)=10\,000(1+6\%)^{10}=17\,908.48$（元）

故所求为：17 908.48－16 000＝1 908.48(元)

例 1.4 中的结果表明了两种方式下期末获得的利息之差，该数额已占到单利方式下期末所获利息总额的 32%，可见两种积累方式有显著差异。

1.5　现值

问题 1　期初投资 1 个单位，到期末得到 $1+i$ 个单位。如果想在期末得到 1 单位，期初应该投资多少个单位呢？

问题 2　期初投资 1 个单位，到 t 时积累到 $a(t)$ 个单位。如果想在 t 时得到 1 个单位，期初应该投资多少个单位呢？

问题 2 显然是问题 1 的推广。先解问题 1。设期初投资 v 个单位数，则有

$$\frac{1}{1+i}=\frac{v}{1}$$

故

$$v=\frac{1}{1+i}$$

这里的 v 称为折现因子。

对于问题 2，设期初投资的数额为 $v(t)$，则有

$$\frac{1}{a(t)}=\frac{v(t)}{1}$$

故

$$v(t)=\frac{1}{a(t)}=a^{-1}(t)$$

这里的 $a^{-1}(t)$ 称为折现函数。

在单利情况下：　$a^{-1}(t)=\dfrac{1}{1+i\cdot t}\quad t\geqslant 0$

在复利情况下：　$a^{-1}(t)=\dfrac{1}{(1+i)^t}=v^t\quad t\geqslant 0$

从对以上两个问题的解答，可知积累与折现是一个相反的过程。$(1+i)^t$ 是期初投资 1 到 t 时的积累值，而 v^t 是到 t 时正好积累到 1 的折现值，只是侧重点不同而已。以上两个问题也可认为是投资者所关心问题的浓缩与抽象。因为投资者往往会关心投资的一笔金融业务，经过一段时间会积累到多少。而如果投资者想在将来的某时达到某个经济目的，那么应准备多少资金以实现它呢？

例 1.5　若年利率 $i=9\%$，在第 4 年末能积累到 1 000 元。试问：

(1) 在单利方式下期初投资额是多少？

(2) 在复利方式下期初投资额是多少？