



北京高等教育精品教材

BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

高职高等数学系列教材

*Gaozhi jiaoyu*

主 编 刘书田

# 高等数学

第二版

编著者 刘书田 冯翠莲 侯明华



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京高等教育精品教材

高职高等数学系列教材

# 高等数学

(第二版)

主 编 刘书田

编著者 刘书田 冯翠莲 侯明华



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/刘书田,冯翠莲,侯明华编著. —2版. —北京:北京大学出版社,2004.6

(北京高等教育精品教材)

(高职高等数学系列教材)

ISBN 7-301-07435-2

I. 高… II. ①刘… ②冯… ③侯… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 041331 号

**书 名: 高等数学(第二版)**

**著作责任者: 刘书田 冯翠莲 侯明华 编著**

**责任编辑: 刘 勇**

**标准书号: ISBN 7-301-07435-2/O · 0592**

**出版发行: 北京大学出版社**

**地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871**

**网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>**

**电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021**

**电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)**

**印 刷 者: 北京大学印刷厂**

**经 销 者: 新华书店**

787mm×960mm 16开本 22.75印张 494千字

2001年6月第1版 2004年6月第2版

2005年7月第3次印刷(总第9次印刷)

**印 数: 42401—46400册**

**定 价: 29.00元**

## 内 容 简 介

本书被评为北京高等教育精品教材,是高等职业、高等专科学校教育“高等数学”基础课教材.该书依照教育部制定的高职高专“数学课程教学基本要求”,并结合作者多年来为工科类、经济类、管理类高职、高专学生讲授“高等数学”课所积累的教学经验编写而成.全书共分九章,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数.书中加“\*”号的内容,仅对工科类学生讲授,有些内容任课教师可酌情选用.每章按节配置足够数量的习题,书末附有答案和解法提示,并在附录中给出了常用的数学公式、曲线图形.为了便于学生学习,本教材有同步配套的《高等数学学习辅导》书.

本书能针对学生的接受能力、理解程度,按大纲要求讲述“高等数学”课的基本内容,叙述通俗易懂,例题丰富,图形直观,富有启发性,便于自学,注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养.

本书可作为高等职业、高等专科学校工科类、经济类、管理类学生“高等数学”课的教材,也可作为参加自学考试、文凭考试、职大师生讲授和学习“高等数学”课程的教材或教学参考书.对数学爱好者本书也是较好的自学教材.

## 高职教育高等数学系列教材 出版委员会

主任：刘 林

副主任：关淑娟

委员(以姓氏笔画为序)：

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 冯翠莲 | 田培源 | 刘 林 | 刘书田 |
| 刘雪梅 | 关淑娟 | 林洁梅 | 胡显佑 |
| 赵佳因 | 侯明华 | 高旅端 | 唐声安 |

### 高职高等数学系列教材书目

|                         |        |            |
|-------------------------|--------|------------|
| 高等数学(第二版)               | 刘书田等编著 | 定价 29.00 元 |
| 微积分(第二版)(经济类、管理类适用)     | 冯翠莲 编著 | 定价 19.00 元 |
| 线性代数(第二版)               | 胡显佑等编著 | 定价 16.00 元 |
| 概率统计(第二版)               | 高旅端等编著 | 定价 16.00 元 |
| 高等数学学习辅导(第二版)           | 刘书田等编著 | 定价 26.00 元 |
| 微积分学习辅导(第二版)(经济类、管理类适用) | 冯翠莲 编著 | 定价 18.00 元 |
| 线性代数学习辅导(第二版)           | 胡显佑等编著 | 定价 16.00 元 |
| 概率统计学习辅导(第二版)           | 高旅端等编著 | 定价 15.00 元 |

### 高职高专高等数学系列教材(少学时)书目

|                       |        |            |
|-----------------------|--------|------------|
| 新编经济数学基础(经济类、管理类适用)   | 冯翠莲 主编 | 估价 25.00 元 |
| 新编工科数学基础(工科类适用)(即将出版) | 冯翠莲 主编 | 估价 28.00 元 |

## 第二版序言

为满足迅速发展的高职教育的需要,我们于2001年1月编写了《高职高等数学系列教材》。这套教材包括《高等数学》、《微积分》、《线性代数》和《概率统计》,供高职教育工科类、经济类和管理类不同专业的学生使用。本套教材的出版受到广大教师和学生的的好评,受到同行专家、教授的赞许。2003年,本套教材被北京市教委列入“北京市高等教育精品教材立项项目”,2004年被评为“北京高等教育精品教材”。为了不断提高教材质量,适应当前高职教育的发展趋势,我们根据三年多来使用本套教材的教学实践和读者的反馈意见,对第一版教材进行了认真的修订。

修订教材的宗旨是:以高职教育的总目标——培养高素质应用型人才——为出发点,遵循“加强基础、培养能力、突出应用”的原则,力求实现基础性、实用性和前瞻性的和谐与统一。具体体现在:

(1) 适当调整了教材体系。在注意数学系统性、逻辑性的同时,对数学概念和基本定理,着重阐明它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值。有些内容重新改写,使重点突出、难点分散;调整了部分例题、练习题,使之更适合高职教育的总目标。

(2) 在教材内容的取舍上,删减了理论性较强的内容,减少了理论推导,增加了在工程、物理、经济方面具有实际应用的内容,立足实践与应用,使在培养学生应用数学知识解决实际问题能力方面得到进一步加强。

(3) 兼顾教材的前瞻性。本次修订汲取了国内高职数学教材的优点,注意到数学公共课与相关学科的联系,为各专业后续课打好坚实的基础。

本套教材在修订过程中,得到北京市教委,同行专家、教授的大力支持,在此一并表示诚挚的感谢。参加本书编写和修订工作的还有唐声安、赵连盛、李月清、梁丽芝、徐军京、高旅端、胡显佑等同志。

我们期望第二版教材能适合高职数学教学的需要,不足之处,恳请读者批评指正。

编者

2004年5月于北京

2005年7月略作修改

## 前 言

为了适应我国高等职业教育、高等专科学校教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,我们依照教育部制定的高职、高专“数学课程教学基本要求”,为高职、高专工科类及经济类、管理类学生编写了本套高等数学系列教材. 本套书分为教材四个分册:《高等数学》(上、下册)、《微积分》、《线性代数》、《概率统计》, 配套辅导教材四个分册:《高等数学学习辅导》(上、下册)、《微积分学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》, 总共 8 分册. 书中加“\*”号的内容, 对非工科类学生可不讲授.

编写本套系列教材的宗旨是: 以提高高等职业教育教学质量为指导思想, 以培养高素质应用型人才为总目标, 力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”. 本套系列教材具有以下特点:

1. 教材的编写紧扣高职、高专“数学课程教学基本要求”, 慎重选择教材内容. 既考虑到高等数学本学科的科学性, 又能针对高职班学生的接受能力和理解程度, 适当选取教材内容的深度和广度; 既注重从实际问题引入基本概念, 揭示概念的实质, 又注重基本概念的几何解释、物理意义和经济背景, 以使教学内容形象、直观, 便于学生理解与掌握, 并达到“学以致用”的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容, 我们编写了配套的辅导教材, 教材与辅导教材的章节内容同步, 但侧重点不同. 辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点; 内容提要提示重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念, 解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明, 并给出解题方法的归纳与总结; 配置自测题的目的是检测学生独立解题的能力. 教材与辅导教材相辅相成, 同步使用.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性, 便于自学; 注意用语确切, 行文严谨.

本套系列教材的编写和出版, 得到了北京大学出版社的大力支持和帮助, 同行专家和教授提出了许多宝贵的建议, 在此一并致谢!

限于编者水平, 书中难免有不妥之处, 恳请读者指正.

编 者

2001 年 1 月于北京

# 目 录

|               |      |
|---------------|------|
| 第一章 函数·极限·连续  | (1)  |
| § 1.1 函数      | (1)  |
| 一、实数概述        | (1)  |
| 二、函数概念        | (4)  |
| 三、函数的几何特性     | (8)  |
| 四、反函数         | (11) |
| 习题 1.1        | (14) |
| § 1.2 初等函数    | (15) |
| 一、基本初等函数      | (15) |
| 二、复合函数        | (18) |
| 三、初等函数        | (19) |
| 习题 1.2        | (20) |
| § 1.3 极限概念    | (21) |
| 一、数列的极限       | (21) |
| 二、函数的极限       | (25) |
| 三、无穷小与无穷大     | (30) |
| 四、极限的性质       | (32) |
| 习题 1.3        | (32) |
| § 1.4 极限运算    | (33) |
| 一、极限运算法则      | (33) |
| 二、两个重要极限      | (37) |
| 三、复利与贴现       | (40) |
| 四、无穷小的比较      | (42) |
| 习题 1.4        | (43) |
| § 1.5 函数的连续性  | (45) |
| 一、连续性概念       | (45) |
| 二、初等函数的连续性    | (48) |
| 三、闭区间上连续函数的性质 | (49) |
| 习题 1.5        | (50) |
| § 1.6 曲线的渐近线  | (51) |
| 习题 1.6        | (52) |

|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| <b>第二章 导数与微分</b>                | (53)  |
| § 2.1 导数概念                      | (53)  |
| 一、两个实例                          | (53)  |
| 二、导数概念                          | (55)  |
| 习题 2.1                          | (61)  |
| § 2.2 初等函数的导数                   | (62)  |
| 一、导数公式与运算法则                     | (62)  |
| 二、高阶导数                          | (68)  |
| 习题 2.2                          | (70)  |
| § 2.3 隐函数的导数 · * 由参数方程所确定的函数的导数 | (73)  |
| 一、隐函数的导数                        | (73)  |
| * 二、由参数方程所确定的函数的导数              | (76)  |
| 习题 2.3                          | (77)  |
| § 2.4 微分                        | (78)  |
| 一、微分概念                          | (78)  |
| 二、微分计算                          | (80)  |
| * 三、微分的应用                       | (82)  |
| 习题 2.4                          | (83)  |
| § 2.5 边际概念 · 函数的弹性              | (84)  |
| 一、经济学中常见的几个函数                   | (84)  |
| 二、边际概念                          | (86)  |
| 三、函数的弹性及其经济意义                   | (88)  |
| 习题 2.5                          | (92)  |
| <b>第三章 中值定理 · 导数应用</b>          | (93)  |
| § 3.1 微分中值定理                    | (93)  |
| 习题 3.1                          | (95)  |
| § 3.2 洛必达法则                     | (96)  |
| 习题 3.2                          | (99)  |
| § 3.3 函数的单调性与极值                 | (100) |
| 一、函数单调性的判别法                     | (100) |
| 二、函数的极值                         | (101) |
| 习题 3.3                          | (105) |
| § 3.4 曲线的凹向与拐点 · 函数作图           | (105) |
| 一、曲线的凹向与拐点                      | (105) |
| 二、函数作图                          | (108) |
| 习题 3.4                          | (111) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| § 3.5 最大值与最小值及应用问题 ..... | (111) |
| 一、函数的最大值与最小值 .....       | (111) |
| 二、几何应用问题 .....           | (113) |
| 三、经济应用问题 .....           | (114) |
| 习题 3.5 .....             | (120) |
| * § 3.6 曲线的曲率 .....      | (122) |
| 一、曲线的曲率 .....            | (122) |
| 二、曲率圆 .....              | (125) |
| 习题 3.6 .....             | (126) |
| <b>第四章 不定积分</b> .....    | (127) |
| § 4.1 不定积分概念与性质 .....    | (127) |
| 一、不定积分概念 .....           | (127) |
| 二、不定积分的性质 .....          | (131) |
| 三、基本积分公式 .....           | (131) |
| 习题 4.1 .....             | (133) |
| § 4.2 换元积分法 .....        | (133) |
| 一、第一换元积分法 .....          | (134) |
| 二、第二换元积分法 .....          | (137) |
| 习题 4.2 .....             | (140) |
| § 4.3 分部积分法 .....        | (141) |
| 习题 4.3 .....             | (145) |
| <b>第五章 定积分及其应用</b> ..... | (147) |
| § 5.1 定积分概念与性质 .....     | (147) |
| 一、两个实例 .....             | (147) |
| 二、定积分概念 .....            | (150) |
| 三、定积分的性质 .....           | (153) |
| 习题 5.1 .....             | (156) |
| § 5.2 定积分的计算 .....       | (156) |
| 一、微积分学基本定理 .....         | (156) |
| 二、定积分的换元积分法 .....        | (159) |
| 三、定积分的分部积分法 .....        | (161) |
| 习题 5.2 .....             | (162) |
| § 5.3 广义积分 .....         | (163) |
| 一、无限区间上的积分 .....         | (164) |
| 二、无界函数的积分 .....          | (166) |
| 习题 5.3 .....             | (168) |

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| § 5.4 定积分的应用 .....           | (168) |
| 一、微元法 .....                  | (168) |
| 二、定积分的几何应用 .....             | (169) |
| *三、定积分的物理应用 .....            | (177) |
| 四、积分学在经济中的应用 .....           | (179) |
| 习题 5.4 .....                 | (183) |
| <b>第六章 微分方程</b> .....        | (186) |
| § 6.1 微分方程的基本概念 .....        | (186) |
| 习题 6.1 .....                 | (190) |
| § 6.2 一阶微分方程 .....           | (190) |
| 一、可分离变量的微分方程 .....           | (190) |
| 二、齐次微分方程 .....               | (191) |
| 三、一阶线性微分方程 .....             | (193) |
| 习题 6.2 .....                 | (196) |
| § 6.3 二阶常系数线性微分方程 .....      | (197) |
| 一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法 .....     | (197) |
| 二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 .....    | (200) |
| 习题 6.3 .....                 | (206) |
| § 6.4 微分方程应用举例 .....         | (207) |
| 一、几何应用问题 .....               | (207) |
| *二、物理应用问题 .....              | (209) |
| 三、经济应用问题 .....               | (212) |
| 习题 6.4 .....                 | (215) |
| <b>第七章 向量代数与空间解析几何</b> ..... | (216) |
| § 7.1 空间直角坐标系 .....          | (216) |
| 一、空间直角坐标系 .....              | (216) |
| 二、两点间的距离 .....               | (218) |
| 习题 7.1 .....                 | (218) |
| *§ 7.2 向量代数 .....            | (219) |
| 一、向量及其表示 .....               | (219) |
| 二、向量的线性运算 .....              | (219) |
| 三、向量的坐标表示法 .....             | (221) |
| 四、向量的数量积和向量积 .....           | (224) |
| 习题 7.2 .....                 | (229) |
| § 7.3 空间曲面及其方程 .....         | (230) |
| 一、曲面与方程 .....                | (230) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 二、几种常见的曲面 .....          | (231) |
| 习题 7.3 .....             | (235) |
| * § 7.4 平面及其方程 .....     | (236) |
| 一、平面及其方程 .....           | (236) |
| 二、平面外一点到平面的距离 .....      | (238) |
| 三、两平面间的夹角 .....          | (238) |
| 习题 7.4 .....             | (239) |
| * § 7.5 空间曲线及其方程 .....   | (240) |
| 一、空间曲线的方程 .....          | (240) |
| 二、空间曲线在坐标面上的投影 .....     | (241) |
| 三、空间直线的方程 .....          | (242) |
| 习题 7.5 .....             | (243) |
| <b>第八章 多元函数微积分</b> ..... | (244) |
| § 8.1 多元函数的基本概念 .....    | (244) |
| 一、平面区域 .....             | (244) |
| 二、多元函数概念 .....           | (245) |
| 三、二元函数的极限与连续性 .....      | (247) |
| 习题 8.1 .....             | (249) |
| § 8.2 偏导数 .....          | (249) |
| 一、偏导数 .....              | (249) |
| 二、高阶偏导数 .....            | (252) |
| 三、全微分 .....              | (253) |
| 习题 8.2 .....             | (255) |
| § 8.3 复合函数与隐函数的微分法 ..... | (256) |
| 一、复合函数的微分法 .....         | (256) |
| 二、隐函数的微分法 .....          | (259) |
| 习题 8.3 .....             | (261) |
| § 8.4 多元函数的极值 .....      | (262) |
| 一、多元函数的极值 .....          | (262) |
| 二、条件极值 .....             | (265) |
| 三、最小二乘法 .....            | (268) |
| 习题 8.4 .....             | (270) |
| § 8.5 二重积分概念及其性质 .....   | (271) |
| 一、两个实例 .....             | (272) |
| 二、二重积分概念 .....           | (273) |
| 三、二重积分的性质 .....          | (274) |
| 习题 8.5 .....             | (275) |

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| § 8.6 二重积分的计算与应用        | (275) |
| 一、在直角坐标系下计算二重积分         | (276) |
| 二、在极坐标系下计算二重积分          | (280) |
| 三、二重积分应用举例              | (283) |
| 习题 8.6                  | (287) |
| <b>第九章 无穷级数</b>         | (290) |
| § 9.1 无穷级数概念及其性质        | (290) |
| 一、无穷级数概念                | (290) |
| 二、无穷级数的基本性质             | (293) |
| 习题 9.1                  | (294) |
| § 9.2 正项级数              | (295) |
| 一、收敛的基本定理               | (295) |
| 二、正项级数的收敛判别法            | (296) |
| 习题 9.2                  | (299) |
| § 9.3 任意项级数             | (299) |
| 一、交错级数                  | (299) |
| 二、绝对收敛与条件收敛             | (300) |
| 习题 9.3                  | (301) |
| § 9.4 幂级数               | (302) |
| 一、函数项级数概念               | (302) |
| 二、幂级数                   | (303) |
| 习题 9.4                  | (306) |
| § 9.5 函数的幂级数展开          | (306) |
| 一、泰勒级数                  | (306) |
| 二、泰勒公式                  | (308) |
| 三、函数的幂级数展开式             | (309) |
| 习题 9.5                  | (312) |
| * § 9.6 傅里叶级数           | (312) |
| 一、三角函数系的正交性             | (312) |
| 二、以 $2\pi$ 为周期的函数的傅里叶级数 | (313) |
| 三、奇函数与偶函数的傅里叶级数         | (316) |
| 四、以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数   | (319) |
| 习题 9.6                  | (321) |
| 附录一 初等数学中的常用公式          | (322) |
| 附录二 双曲函数和反双曲函数          | (326) |
| 附录三 常见的一些曲线的图形          | (327) |
| 习题参考答案与提示               | (329) |

# 第一章 函数 · 极限 · 连续

函数是高等数学最基本的概念. 本章从讨论函数概念开始, 通过对一般函数特性的概括, 并引进本教材主要讨论的初等函数, 为学习“高等数学”打下基础.

极限与连续也是高等数学最基本的概念. 在高等数学中, 极限是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法. 为了便于理解和掌握极限概念, 我们从讨论一种最简单的情况——数列的极限入手, 进而讨论函数的极限. 函数的连续性与函数的极限密切相关, 这里要讨论函数连续性概念和连续函数的重要性质. 连续函数是高等数学中着重研究的一类函数.

## § 1.1 函 数

### 一、实数概述

高等数学主要在实数范围内研究函数, 我们先讲述学习本课程必须具备的一些实数知识.

#### 1. 实数与数轴

**实数**由有理数与无理数两大类组成. 有理数包括零、正负整数和正负分数. 有理数都可用分数形式  $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  为整数,  $q \neq 0$ ) 表示, 也可用有限小数或无限循环小数表示. 无限不循环小数是无理数. 全体实数构成的集合称为实数集, 记作  $R$ .

若在一一直线上(通常画水平直线)确定一点为原点, 标以  $O$ , 指定一个方向为正方向(通常把指向右方为正方向), 并规定一个单位长度, 则称这样的直线为**数轴**. 任一实数都对应数轴上惟一的一点; 反之, 数轴上每一点都惟一地表示一个实数. 正由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系, 所以在以下的叙述中, 将把“实数  $a$ ”与“数轴上的点  $a$ ”两种说法看作有相同的含义, 而不加以区别.

#### 2. 实数的绝对值

设  $a$  是一个实数, 则记号  $|a|$  称为  $a$  的**绝对值**, 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

例如, 数  $0$  的绝对值  $|0| = 0$ ; 数  $5$  ( $5 > 0$ ) 的绝对值  $|5| = 5$ ; 数  $-5$  ( $-5 < 0$ ) 的绝对值  $|-5| = -(-5) = 5$ .

**数  $a$  的绝对值  $|a|$  的几何意义:** 在数轴上,  $|a|$  表示点  $a$  到原点的距离. 不论点  $a$  在原点的左侧 ( $a < 0$ ), 还是点  $a$  在原点的右侧 ( $a > 0$ ), 以及在原点 ( $a = 0$ ), 都如此(图 1-1).

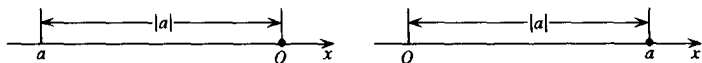


图 1-1

设  $a, b$  是两个实数, 则由上述绝对值的定义可得

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & a \geq b, \\ b - a, & a < b. \end{cases}$$

由绝对值的定义, 易得下列**绝对值的性质**:

(1)  $|a| = \sqrt{a^2}$ .

(2)  $|a| = |-a| \geq 0$ , 当且仅当  $a=0$  时等号成立.

(3)  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

这是因为: 当  $a < 0$  时, 有  $-|a| = a < |a|$ ; 当  $a > 0$  时, 有  $-|a| < a = |a|$ ; 当  $a = 0$  时, 有  $-|a| = a = |a|$ . 将上三式合并在一起, 就是  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

(4) 设  $h > 0$ , 则  $|a| < h$  等价于不等式  $-h < a < h$ ;  $|a| > h$  等价于不等式  $a < -h$  或  $a > h$ .

从绝对值的几何意义看(图 1-2), 这个性质是显然的. 因  $|a| < h$  表示到原点的距离小于  $h$  的所有点  $a$  的集合; 而这正是不等式  $-h < a < h$  的几何说明. 同样可解释后一个等价的两个关系式(图 1-3).

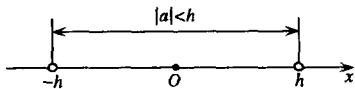


图 1-2

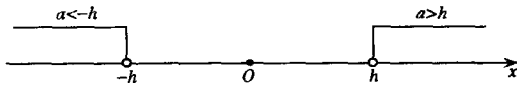


图 1-3

(5) 对实数  $a, b$  有不等式

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq |a| - |b|,$$

即和的绝对值不大于各项绝对值的和, 差的绝对值不小于各项绝对值的差.

(6) 对实数  $a$  和  $b$ , 有等式

$$|a \cdot b| = |a| |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0),$$

即乘积的绝对值等于绝对值的乘积, 商的绝对值等于绝对值的商.

**例 1** 解绝对值不等式  $|x - 5| < 3$ .

**解** 根据绝对值的性质(4), 由  $|x - 5| < 3$  得

$$-3 < x - 5 < 3 \quad \text{即} \quad 2 < x < 8.$$

由图 1-4 知,  $|x - 5| < 3$  的几何意义是: 表示数轴上与点 5 的距离小于 3 个单位的所有点  $x$  的集合.

一般言之,  $|x-x_0|$  表示两点  $x$  与  $x_0$  之间的距离; 而  $|x-x_0|<h$  ( $h>0$ ) 则表示数轴上到点  $x_0$  的距离小于  $h$  个单位的所有点  $x$  的集合(图 1-5).

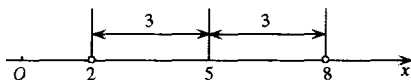


图 1-4

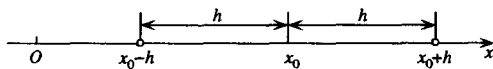


图 1-5

**例 2** 解绝对值不等式  $|x+1|\geq 2$ .

**解** 根据绝对值的性质(4), 由  $|x+1|\geq 2$  得

$$x+1\leq -2 \text{ 或 } x+1\geq 2, \text{ 即 } x\leq -3 \text{ 或 } x\geq 1.$$

由上述结果表明,  $|x+1|\geq 2$  的几何意义是: 表示数轴上与点  $-1$  的距离不小于 2 个单位的所有点  $x$  的集合.

一般言之,  $|x-x_0|\geq h$  ( $h>0$ ) 表示数轴上到点  $x_0$  的距离不小于  $h$  个单位的所有点  $x$  的集合.

### 3. 区间

#### (1) 区间

区间可理解为实数集  $\mathbf{R}$  的子集. 区间分为有限区间和无限区间.

**有限区间** 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a < b$ .

集合  $\{x|a < x < b\}$  可记作  $(a, b)$ , 称为以  $a, b$  为端点的**开区间**(图 1-6(a)).

集合  $\{x|a \leq x \leq b\}$  可记作  $[a, b]$ , 称为以  $a, b$  为端点的**闭区间**(图 1-6(b)).

集合  $\{x|a \leq x < b\}$  和  $\{x|a < x \leq b\}$  可记作  $[a, b)$  和  $(a, b]$ , 这是**半开区间**(图 1-6(c), (d)).

以上各有限区间的长度都为  $b-a$ .

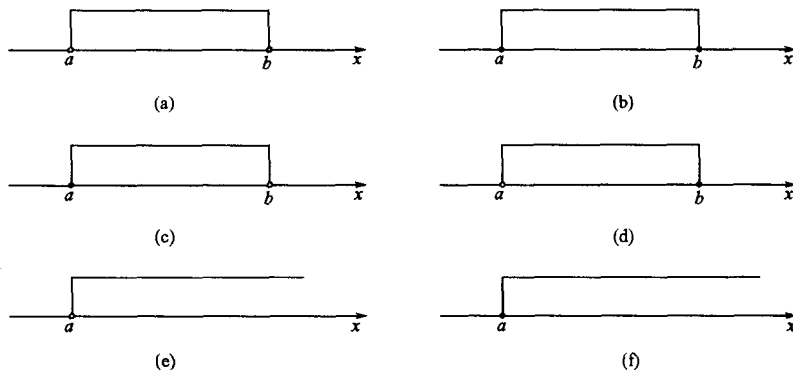


图 1-6

#### 无限区间

集合  $\{x|a < x < +\infty\} = \{x|a < x\}$ , 记作  $(a, +\infty)$ , 这是无限区间(图 1-6(e)); 类似的记号  $[a, +\infty)$ (图 1-6(f)),  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$  都是无限区间; 实数集  $\mathbf{R}$  记作  $(-\infty, +\infty)$ .

本教材在以后的叙述中,若我们所讨论的问题在任何一个区间上都成立时,将用**字母 I** 表示这样一个泛指区间.

## (2) 邻域

设  $\delta$  为某一个正数,称开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域,称  $x_0$  为邻域的中心,称  $\delta$  为邻域的半径.邻域的长度为  $2\delta$ ,点  $x_0$  的  $\delta$  邻域用不等式表示为(图 1-7)

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{或} \quad |x - x_0| < \delta.$$

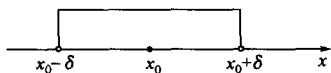


图 1-7

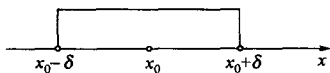


图 1-8

若把邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中的中心点  $x_0$  去掉,由余下的点构成的集合,称为点  $x_0$  的空心邻域,常表示为(图 1-8)

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad \text{或} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

## 二、函数概念

### 1. 函数的定义

在我们的周围,变化无处不在.我们所看到的事物都在变化.这些变化着的现象中的许多现象可以用数学有效地来描述.其中,有一些变化着的现象中存在着两个变化的量,简称**变量**.这两个变化着的量不是彼此孤立的,而是相互联系、相互制约的.观察下面的例子.

**例 3** 圆的半径  $r$  和它的面积  $A$  之间有关系

$$A = \pi r^2 \quad (r > 0),$$

其中,  $r$  和  $A$  是变量,只要  $r$  取定一个正数值,面积  $A$  就有一个确定的值与之对应.因此,上述公式表明了变量  $r$  和  $A$  之间的数量关系.

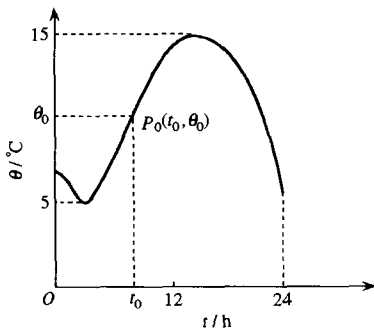


图 1-9

**例 4** 在气象观测站,气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1-9 所示的曲线.曲线上某一点  $P_0(t_0, \theta_0)$  表示时刻  $t_0$  的气温是  $\theta_0$ .观察这条曲线,可以知道在这一天内,时间  $t$  从 0 点到 24 点气温  $\theta$  的变化情形.时间  $t$  和气温  $\theta$  都是变量,这两个变量之间的数量关系是由一条曲线确定的.

**例 5** 银行储蓄,1 年定期整存整取,年利率为 1.98%,存款金额与一年所得利息列表如下: