普通高等院校规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

胡健 施泱 郑龙飞 主编

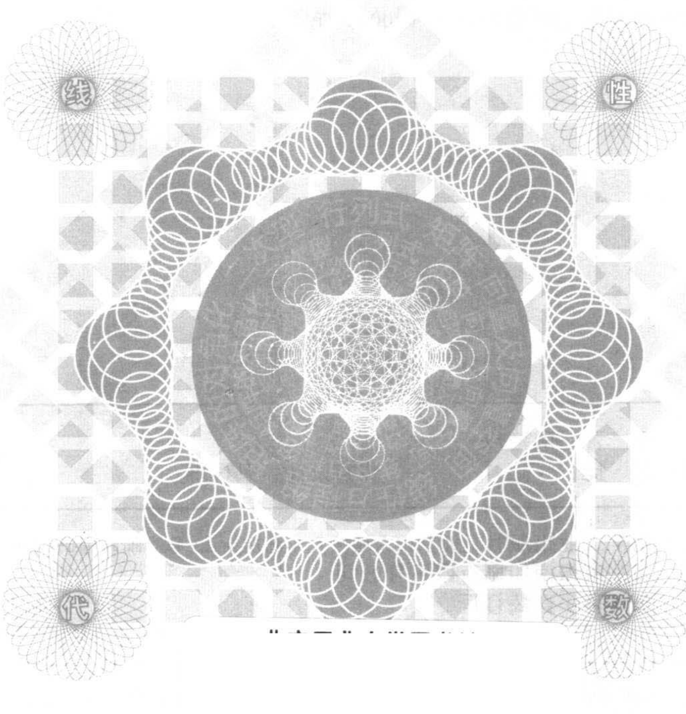
化学工业出版社

普通高等院校规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

胡健 施泱 郑龙飞 主编



化学工业出版社
·北京·

本书参照教育部颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求编写而成，科学系统地介绍了线性代数的行列式，矩阵及其运算，向量和向量空间，二次方程组，特征值与特征向量及二次型理论。本书难易适度，结构严谨，通俗易懂，综合性强，例题丰富，适用面广。本书适用于高等学校理工类，管理类专业学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/胡健，施泱，郑龙飞主编．—北京：化学工业出版社，2006.12
普通高等院校规划教材
ISBN 978-7-5025-9811-2

Ⅰ.线…　Ⅱ.①胡…②施…③郑…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第161376号

责任编辑：杨　菁　陶艳玲
责任校对：郑　捷　　　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
850mm×1168mm　1/32　印张6　字数169千字　2007年1月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：16.00元

前　言

线性代数是高等学校理工科各专业的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，并已成为自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具. 随着计算机日益普及，线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出，高等院校计算机、信息工程、自动控制等专业对线性代数的教学内容从广度和深度上的要求不断提高. 我们编写本书也是为满足这些要求，对已有教材的内容作了相应的补充和完善.

本书参照教育部颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求，总结多年的教学实践经验编写而成. 针对理工科非数学专业学生学习本课程的目的主要在于加强基础知识及实际应用，我们着重突出以下特点：①着重讲清基本概念、原理和计算方法，避免繁琐的理论推导，证明力求简明、准确；②内容安排上注重系统性、逻辑性，由浅入深，循序渐进；③通过配以较多的例子，开阔学生的思路，加深对基本概念、基本理论的理解；④适用范围较广，本书可作为本专科院校理工科线性代数课程的教材，也可作为网络教育、函授教育、自学考试学生的线性代数教材.

本书根据教学大纲，采用学生易于接受的方式，科学系统地介绍了行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量和二次型. 在编写过程中，吸收了多种线性代数教材的优点，努力做到重点突出，层次清晰，深入浅出，简明扼要，并注重学生对基础理论的掌握和思想方法的学习，以及对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力和自学能力的培养. 考虑到不同专业学生

的特点，在内容安排上可根据专业要求选用. 本书第 2 章由胡健编写，第 3 章、第 4 章由施泱编写，第 1 章、第 5 章、第 6 章由郑龙飞编写. 感谢山西大学刘桂荣博士为本书出版付出的心血.

由于编者水平所限，错误和缺陷在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2006 年 12 月

目　录

第1章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，其理论起源于线性方程组的求解，它在自然科学的许多领域都有广泛的应用，本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，此外还要介绍用行列式求解 n 元线性方程组的克兰姆（Cramer）法则．

1.1 二、三阶行列式

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得到方程组（1.1）的惟一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

式(1.2）中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组（1.1）的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组（1.1）中的位置，排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

将表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表（1.3）所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

式中，数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式(1.4) 的**元素**，元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为**行（足）标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列（足）标**，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆，参看图 1.1，把 a_{11}到 a_{22}的实联线称为**主对角线**，a_{12}到 a_{21}的虚联线称为**次对角线**，于是二阶行列式就是主对角线上的两元素之积减去次对角线上两元素之积所得的差.

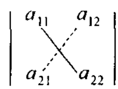


图 1.1 行列式的主对角线和次对角线

利用二阶行列式的定义，我们有

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(1.2) 可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

【例 1】 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 2x_1-3x_2=4. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\times(-3)-2\times2=-7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=1\times(-3)-2\times4=-11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-1\times2=2.$$

因此，$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{2}{-7}=-\dfrac{2}{7}$.

1.1.2 三阶行列式

定义 1.1 设由 9 个数 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

则称式(1.6) 为数表 (1.5) 所确定的**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式含有 6 项，且每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律如图 1.2 所示的对角线法则：图中有三条实线看作是平行于主对角线的联线，三条虚线看作是平行于次对角线的联线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素乘积冠负号．这种用来记忆三阶行列式定义的方法称为**对角线法则**（显然二阶行列式也适用对角线法则）.

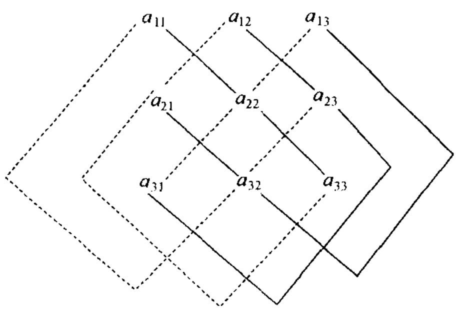


图 1.2 行列式的对角线法则

【例 2】 利用对角线法则计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$D=1\times2\times2+0\times0\times(-1)+(-1)\times1\times3-(-1)\times2\times(-1)-0\times1\times2-1\times0\times3=-1.$$

【**例 3**】 求解方程

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$D=3x^2+4x+18-12-2x^2-9x=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

1.2 排列及其逆序数

作为定义 $\boldsymbol{n}$ 阶行列式的准备，我们先来讨论排列及其逆序数．

定义 1.2 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**．

例如，2,1,3,4 是一个四级排列，5,3,2,1,4,6 是一个 6 级排列，我们知道，n 级排列的总数是 $n!$．其中，1，2，…，$\boldsymbol{n}$ 也是一个 $\boldsymbol{n}$ 级排列，这个排列具有自然顺序，即按递增的顺序排起来，称之为 **n 级自然排列**．其它的 $\boldsymbol{n}$ 级排列都或多或少地破坏自然顺序．

定义 1.3 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们称为一个**逆序**，并且将一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**．

例如 5 级排列 4,3,5,1,2 中，所有的逆序为 43,41,42,31,32,51,52，故其逆序数为 7. 自然排列的逆序数为 0.

排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数记为 $N(j_1,j_2,\cdots,j_n)$。如 $N(2,3,1,4)=2$，$N(1,2,\cdots,n)=0$.

定义 1.4 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**．

由上面的例子可知，4,3,5,1,2 是奇排列，2,3,1,4 和 $1,2,\cdots,n$ 都是偶排列．

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个对换．例如，经过 1，4 对换，

排列 2,1,3,4 就变成 2,4,3,1. 显然，如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了.

关于排列的奇偶性，我们有下面的结论.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证明从略。

定理 1.2 任意一个 n 级排列与自然排列 $1,2,\cdots,n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

证明 定理的前半部分是显然的，由定理 1.1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然排列 $1,2,\cdots,n$ 为偶排列，从而结论成立.

定理 1.3 所有 n 级排列中 ($n>1$)，奇、偶排列各占一半，即奇偶排列的个数都是$\frac{n!}{2}$.

证明 n 级排列的总数为 $n!$. 设奇排列为 p 个，偶排列为 q 个，将每一个奇排列都施以同一的对换，则由定理 1.1 知 p 个奇排列都变为偶排列，于是 $p\leqslant q$，同理可得，$p\geqslant q$，故 $p=q$，即奇、偶排列数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

1.3 n 阶行列式及其性质

1.3.1 n 阶行列式的定义

从二阶和三阶行列式的定义中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成的. 对于二阶行列式，由不同行不同列的元素构成的乘积只有其展开式中的两项；对于三阶行列式，由不同行不同列的元素构成的乘积也只有其展开式中的 6 项，从而，二阶行列式与三阶行列式都是由所有位于不同行不同列的元素的乘积的代数和. 这是二阶和三阶行列式的特征的一个方面，另一方面，每一项乘积都带有符号，这符号又是如何确定的呢？在三阶行列式的展开式中，项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 j_1，j_2，j_3 是 1，2，3 的一个排列．可以看出，当 j_1，j_2，j_3 是偶排列时，对应的项带有正号，当 j_1，j_2，j_3 是奇排列时带有负号．此外，二阶行列式显然也符合这个原则．

现在，把上述规则推广到 n 阶行列式上去，从而给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.5 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和．这里，$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 都按下列规则带有符号：当 j_1，j_2，$\cdots$，j_n 是偶排列时，带正号；当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是奇排列时，带负号．

这一定义还可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n} (-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

式中，$\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和．

由定义可知，n 阶行列式展开式满足：①共有 $n!$ 项；②其中 $\frac{n!}{2}$ 项带正号，$\frac{n!}{2}$ 项带负号；③每项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积；④把构成每一项的 n 个元素按行标排成自然顺序，若列标是偶排列，则该项带正号，否则带负号．

由定义可知，若 n 阶行列式中有一行（或一列）元素全为 0，则此行列式等于 0.

下面来看几个例子．

【例 1】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，其展开式为 $4!=24$ 项．但是由于该行列式中有许多元素为 0，从而使得展开式的 24 项中有许多项为 0. 下面我们只考虑不为 0 的项. 展开式中项的一般形式为

$$(-1)^{N(j_1,j_2,j_3,j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

由于每项中的 4 个元素 a_{1j_1}，a_{2j_2}，a_{3j_3}，a_{4j_4} 取自不同行不同列，从而为了使得该项不为 0，只有 $j_1=4$，$j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$. 这就是说，该行列式展开式中只有这一项不为 0，又由于 $N(4,3,2,1)=6$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

【例 2】 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 我们只考虑该行列式展开式的 $n!$ 项中不为 0 的项，又每一项的一般形式为

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{nj_n}.$$

由于该行列式第 n 行的元素除 a_{nn} 外全为 0，从而 $j_n=n$，在第 $n-1$ 行中，除 $a_{n-1,n-1}$ 与 $a_{n-1,n}$ 外，其它元素全为 0，故 $j_{n-1}=n-1$ 或 $j_{n-1}=n$. 但 $j_{n-1}\neq j_n$，所以 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步推下去，不难看出，展开式中除

$$(-1)^{N(1,2,\cdots,n)} a_{11} a_{22} a_{nn}$$

这一项外，其余的项全是 0，又 $N(1,2,\cdots,n)=0$，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

从上面这个例题可以看出，上三角形行列式等于**主对角线**（从左上角到右下角这条对角线）上元素的乘积．同样我们也可得到**下三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

并且作为上三角形行列式与下三角形行列式的特殊情形，有**对角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

定义 1.6 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 $\boldsymbol{D}$ **的转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'．即

$$若\ D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，则\ D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.3.2 *n* 阶行列式的性质

行列式的计算是一个很重要的问题，但是我们知道 n 阶行列式一共有 $n!$ 项，从而当 n 较大时，直接用定义来计算行列式几乎是不可能的事．下面我们将讨论行列式的性质，并用这些性质来简化行列式的计算．

性质 1 行列互换，行列式不变，即行列式与它的转置行列式相等．

这个性质不作证明．例如

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix}.$$

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是一样的，从而凡是对行成立的性质，对列也同样成立．因此下面我们所谈的行列式的性质是对行来说的，对于列也有相同的性质，就不重复了．

性质 2　行列式中一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行就相当于用这个数乘此行列式．即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

由行列式定义，此性质是显然成立的，例如，

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\2\times3 & 2\times4\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}.$$

在性质 2 中，令 $k=0$，就有，**若行列式中一行为零，则此行列式为零**．

性质 3　互换行列式的两行，行列式变号．

这个性质不作证明．例如

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{vmatrix}.$$

推论 1　若行列式中有两行完全相同，则此行列式为零．

证　设行列式 D 的第 i 行与第 j 行相同，互换这两行，则有 $D=-D$，故 $D=0$.

推论 2　若行列式中两行成比例，则此行列式为零．

由性质 2 和推论 1 可知此推论是成立的，例如 $\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=0.$

性质 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式定义，性质 4 显然成立．此性质说明行列式中某一行（列）的元素均是两数之和时，该行列式就可按此行（列）拆成两个行列式．例如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+x & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}.$$

性质 5 把一行的倍数加到另一行，行列式不变．

由性质 4 及其推论 2 可知性质 5 是成立的，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 2，性质 3 和性质 5 介绍了行列式关于行和关于列的三种运算，为了更明确地表示出这三种运算，我们引用记号：$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示交换第 i 行（列）和第 j 行（列）；$r_i \times k (c_i \times k)$ 表示第 i 行（列）乘以数 k；$r_i + kr_j (c_i + kc_j)$ 表示以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，利用这些运算可简化行列式的计算，特别是利用运算 $r_i + kr_j$（或 $c_i + kc_j$）可以将行列式中许多元素化为 0，而计算行列式常用的一种方法就是利用运算 $r_i + kr_j$（或 $c_i + kc_j$）把行列式化为上三角形或下三角形行列式，从而计算出行列式的