第三版

材料力學

(1)理論與題解

STRENGTH OF MATERIALS

PART I

Elementary Theory and Problems

S. TIMOSHENKO 詹彬義 編譯

復文書局

第三版

材料力學

(1)理論與題解

STRENGTH OF MATERIALS

PART I

Elementary Theory and Problems

S. TIMOSHENKO 詹彬義 編譯

復文書局

譯 序

1930年5月 TIMOSHENKO 所著之 STRENGTH OF MATERIALS 問世，其後經過了兩次之修訂，至1956年2月第二版亦正式推出，發行以來，廣受重視。修訂版中增添了大量之最新資料及例題詳解，其中篇幅增加最多的是扭力，塑性變形及材料之力學特性等章節。上述新增之內容有助於了解一些有關材料性質之實驗研究。

全書譯文，以盡可能接近原文字義爲主，而文字亦力求通順；所有名詞翻譯係以教育部公布之物理學名詞爲主，其未列入者，亦按其意義譯之，務期文意相符。

本書譯校，以時間短促，故仍不免疏漏，故祈教師及讀者諸君隨時指正，俾有所修訂，至深感荷！

譯者識

六十七年十月

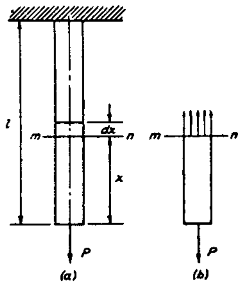
材料力學

目　　錄

第一册

第一章　彈性限度內之伸張及壓縮

1.彈性——任何物體均由小質點，或分子構成，在各分子間存在著作用力．此等分子力抵抗外力對此物體造成形變。在外力作用下，物體中的質點連續地移動直至。外力及內力平衡爲止。此時物體即處於應變狀態。在形變過程中，外力對物體作功，而功轉變成應變之位能。手錶彈簧即是一個應變物體積存位能的例子。若外力逐漸消失時，物體將全部或部分地回復原狀，而在回復原狀之過程中，累積之位能又被釋出而對外作功。



（圖 1）

例如，在圖 1 所示之角棒末端施以負荷[1]，則在負荷之作用下棒將會有些伸張，負荷作用點便會向下移動，而在移動中負荷就做了正功。當負荷減輕後，棒之伸張也隨著減少，負荷點向上運動，而位能就轉變成令負荷向上運動所需之功。

物體在移去負荷後回復原狀之性質稱爲彈性。若釋去負荷後物體完全恢復原狀則此物體爲“部份彈性體”，若變形不能完全消失則稱爲“部份彈性體”，在完全彈性體中，外力在形變過程中所作之功完全轉變爲應變位能[2]在非彈性體中，形變過程中外力所作之功有一部分以熱的形式散失，這是非彈性變形時所發生的。實驗證明在某些限度內，如鋼，木材及石頭等材料可以視爲完全彈性體，若作用於器材上之外力爲已知，則設計師的基本問題就是研究器材中各部分材料之性質而令它在各種實際狀況下接近於完全彈性體。如此才能維持器材之可靠性且避免各部分之彈性疲乏（*permanent set*）

2.虎克定律——由角柱之伸張實驗可知對許多種材料而言，在某種限度內，伸張與張力成正比例。這簡單的綫性關係爲英國科學家虎克[3] 在 1678

附註：
1. 假定負荷作用於棒之軸上。
2. 彈性變形時些微的溫度差異，及與環境之熱交換均予忽略不計。
3. *Robert Hooke*，倫敦，1967

年提出的。用下列之符號：

P＝令棒伸張之力，

l＝棒長，

A＝棒之橫截面積，

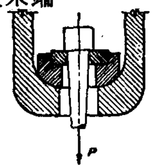
δ＝棒之總伸長量擔

E＝物質之彈性係數，

虎克定律可寫成

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \tag{1}$$

由上式知伸長量與張力及棒長成正比，又與橫截面積及彈性係數成反比。測量張力時須注意保持張力於中心綫上。圖 2 顯示如何將待測之圓形體末端固定於張力測量機中，此裝置可防止棒之彎曲；設若不考慮作用力點附近之區域[4]，則在伸張過程中，各角柱纖維之伸張量均可視爲相同，而伸張後垂直於棒軸之橫截面亦可視爲不變。



（圖 2）

討論內力大小時，我們先設想角柱被截面 mn 分爲兩半，而考慮棒的下半部的平衡狀況，（圖 1b）. 張力 P 施於棒之末端，此時均勻分布之力計有水壓、氣壓等。處理此類均勻分布之力時；"力强度"（*the intensity of force*，亦即單位面積上之力）之觀念極爲有用。在目前的軸向張力情況，所有纖維具相同之伸張量，而 mn 截面上力量之分佈將是均勻的。最後力將通過截面中心而沿棒軸施力，設平衡時之合力爲 P 且定橫截面上單位面積所受之力爲 a，則

$$a = \frac{P}{A} \tag{2}$$

此單位面積所受之力稱爲單位張應力（*unit tensile stress*）或簡稱爲"應力". 本書中，力之單位爲磅而面積之單位爲平方吋故應力之單位爲磅／吋^2。棒之單位長度伸張量由下式決定

$$\epsilon = \frac{\delta}{l} \tag{3}$$

稱爲單位伸長量或張應變（*tensile strain*）。由(1)，(2)，(3)式，虎克定律也可寫成下列形式

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

4. 作用力點附近之複雜應力分佈將在第二册中討論。

由上式可知彈性係數等於單位應力除以單位應變，而當應力及對應的單位伸張量已知時彈性係數可甚易計算而得。單位伸長量 ϵ 爲一純數，代表兩個長度的比值（第 3 式）；因此由(4)式知彈性係數之單位與應力 σ 相同，亦即磅／吋^2 。數種物質之平均彈性係數值列於表 1[5] 之第一行中。

(1)－(4)式亦可用於角柱受壓縮之情況。惟此時 δ 代表縱向收縮，ϵ 爲壓縮應變，而 σ 爲壓縮應變。

物質之機械性質

Material	E lb/in.^{2}	Yield Point lb/in.^{2}	Ultimate Strength lb/in.^{2}
Structural carbon steel 0.15 to 0.25% carbon	30×10^6	30×10^3–40×10^3	55×10^3–65×10^3
Nickel steel 3 to 3.5% nickel	29×10^6	40×10^3–50×10^3	78×10^3–100×10^3
Duraluminum	10×10^6	35×10^3–45×10^3	54×10^3–65×10^3
Copper, cold rolled	16×10^6		28×10^3–40×10^3
Glass	10×10^6		3.5×10^3
Pine, with the grain	1.5×10^6		8×10^3–20×10^3
Concrete, in compression	4×10^6		3×10^3

大多數物質壓縮及伸張之彈性係數均相同，而作計算時，伸張應力及應變取正值，而壓縮應力及應變取負值。

問　　題

1. 若鋼條之張應力爲 15×10^3 磅／平方吋，試計算其總伸長量。

解：$\delta = 1/80$ 吋

2. 若單位伸長量爲 0.7×10^{-3}，計算直徑 1 吋之圓柱鋼條之張力。

解：由式(4)

$$\sigma = \epsilon \,.\, E = 21 \times 10^3 \text{ 磅／平方吋}$$

3. 若在同樣張力作用下，兩條棒之單位伸長量比值爲 $1 : \dfrac{15}{8}$，則問此二物質彈性係數之比爲何？又若其中之一爲鋼，另一爲銅，且張力爲 10,000 磅／吋^2，問它們的伸長量各爲何？

解：彈性係數與伸長量成反比

$$\text{鋼：}\quad \epsilon = \frac{10,000}{3 \times 10^7} = \frac{1}{3,000}$$

5. 有關物質之機械性質之詳盡資料可見於第二冊中。

銅 $\epsilon=\dfrac{1}{1,600}$

4. 一長25吋之角鋼被伸張了$\dfrac{1}{40}$吋，若此角鋼之體積爲25吋^3，試求張力P之數值。

解：$P=30,000$ 磅

5. 已知張力$P=1,000$磅可令長度100呎之綫伸長1吋，若此綫之截面積爲0.04平方吋，試求此綫之彈性係數。

解：$E=30\times10^6$ 磅每平方吋

6. 棒AB之截面積爲$A=1$吋^2，且受二力$Q=10,000$磅，$P=5,000$磅之作用（圖3），試求其總伸長量

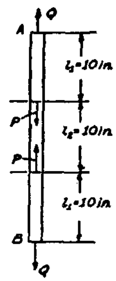
解：棒上方及下方之張力爲Q，中央之張力爲$Q-P$

故總伸長量爲

$$\delta=2\frac{Ql_1}{AE}+\frac{(Q-P)\,l_2}{AE}$$

$$=2\frac{10,000\times10}{1\times30\times10^6}+\frac{5,000\times10}{1\times30\times10^6}$$

$$=\frac{1}{150}+\frac{1}{600}=\frac{1}{120}=0.00833\text{ 吋}$$

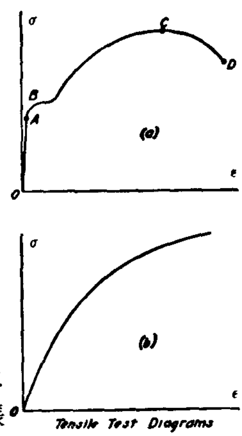


（圖 3）

7. 題6中，設物質爲硬鋁（*duraluminum*）且$P=Q=10,000$磅，則試求其解。

3.張力試驗圖——張力與對應伸長量之正比關係僅在某一應力極限內適用，此稱爲比例極限（*proportional limit*），此等極限決定於物質之性質。若超出此極限，伸長量與抗張力之關係將變得更爲複雜。以鋼條爲例，負荷與伸長量之正比關係可維持到$25\times10^3-30\times10^3$ 磅／吋^{2}的比例極限．而生鐵或軟鋼等物質的比例極限甚低，因此在低張力作用下虎克定律即已發生偏差。

在研究超過比例極限時之物質機械性質時，應變及應力之關係通常以張力試驗圖表示。圖4*a*所示爲鋼之張力試驗圖。伸張量繪於橫軸，對應之應力即是$OABCD$



（圖 4）

曲綫。由O至A，應力及應變成正比，在A點以外，虎克定律已不能適用；故A點之應力即爲比例極限，負荷超過此極限時，伸長量增加得更快，而形成曲綫圖形。在B點處，應力稍微增加即可造成大量的伸張。此現象在圖中以一近乎水平之曲綫顯示出來，稱爲物質之屈服（*yielding*）效應。B點之應力稱爲屈服點應力（*yield point*）。拉力再增加時，物質之抗力又回復了，且由圖知張力必須隨伸長量之增加而增加，直到C點，拉力達到最大值，此時之應力稱爲極限强度（*ultimate strength*），超出C點後，伸張在負荷減輕時才能發生，而到達D點時終於斷裂。

須注意的是當棒被拉長時，必伴隨著有橫方向之收縮，但是何以在計算時吾人却仍使用原始之橫截面積A？這個問題留待以後再詳細說明（參閱第二册）。

圖 4b 爲生鐵之張力試驗圖，此物質之比例極限甚低[6]，且無確切之屈服點。

各種物質之壓縮力試驗圖亦與張力試驗圖類似，而鋼之壓力特性點，諸如比例極限，屈服點等亦可由實驗測出。物質的張力和壓縮之機械性質將在第二册中詳細討論。

'. **工作應力**——張力試驗圖可給予我們有關物質機械性質的重要資料，一旦知道了比例極限、屈服點及極限强度後，則對任一特殊工程問題，吾人即可考慮何種數值之應力才可視爲安全應力。此等安全應力通常稱爲工作應力（*working stress*）。

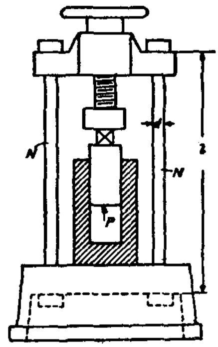
在選擇鋼之工作應力時，須注意當應力小於比例極限時物質可視爲完全彈性，若超過此極限則一部分應變在釋去負荷時無法回復原狀，亦即將會發生塑性（*permanent set*）。爲了使器材保持彈性狀態，而消除任何塑性之可能性，通常均使工作應力保持在比例極限下。但是以實驗測定此極值時，必須使用極精密之儀器（伸張計，*extensometers*），而此極限之正確性亦決定於測量之精確度。由於上述之困難，吾人通常使用屈服點或極限强度作爲選擇工作應力之基準，以 δ_W ，$\sigma_{Y.P}$ 及 σ_L 分別代表物質之工作應力，屈服點及極限强度，則工作應力之數值可由下式求得：

$$\sigma_W = \frac{\sigma_{Y.P}}{n} \text{ 或 } \sigma_W = \frac{\sigma_L}{n_1} \tag{5}$$

此處n 及n_1 爲常數，稱爲安全因數，它決定了工作應力之數值。在鋼質器

6. 此極限僅能以極精密之伸張計測得。

材之情況，用屈服點作爲計算工作應力之依據較爲適合，此乃因爲在屈服點應力作用下，明顯的彈性疲乏將產生，而在工程構造上這是決不允許的。在定值或靜態負荷作用於器材上時令安全因素 $n = 2$，即可定出一保守之工作應力值；在突加負荷或可變負荷時，則必須選擇相當大之安全因素。對易斷裂物質如生鐵、水泥、石塊，或類如木材等物質，則極限強度常用來作爲決定工作應力之依據。



（圖 5）

安全因數之數值決定於測量作用在器材上之外力之精確度、器材內各組成分子上應力測量之精確度，以及所用物質之均勻性。關於工作應力之重要問題將在第二册中更詳盡地討論。下面有幾個簡單例題可說明在已知工作應力下如何決定截面積安全尺度之問題。

問　題

1. 若一壓力機之最大壓力爲 $P = 100,000$ 磅（圖 5），試計算鋼質螺栓之半徑 d 至少爲何？已知鋼之工作應力爲 $\sigma_W = 10,000$ 磅／吋^2。又若螺栓的長度爲 $l = 50$ 吋，則試求在最大負荷下螺栓之總伸長量。

解：$A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{P}{2\sigma_W} = \dfrac{50,000}{10,000} = 5$ 吋^2

故 $d = 2.52$ 吋

由(3)及(4)

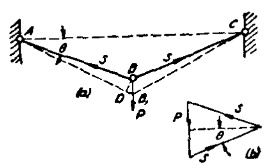
$$\delta = \epsilon l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{10^4 . 50}{30.16^6} = \frac{1}{60} \text{ 吋}$$

2. ABC 爲二條長 $15ft$ 之鋼棒（圖 6），其連接點 B 上承受一垂直負荷 P，若 $P = 5,000$ 磅，$\sigma_W = 10,000$ 磅／吋^2。原傾斜角爲 $\theta = 30°$，且棒本身之重量可忽略，則試問棒之橫截面積須爲若干？又 B 點偏移爲何？

解：圖 6b 表示連接點 B 之平衡情形。由圖知棒中之張力爲

$$S = \frac{P}{2\sin\theta} \qquad \because \theta = 30°$$

$S = P = 5,000$ 磅



（圖 6）

故橫截面積為

$$A=\frac{S}{\sigma_W}=\frac{5,000}{10,000}=\frac{1}{2}\text{吋}^2$$

又偏移 BB_1 可由直角三角形 DBB_1 求得，其中 BD 可視為以棒原長為半徑之弧，故 AB 之伸張量即是 B_1D，

$$B_1D=\epsilon . l=\frac{\sigma_W l}{E}=\frac{10,000\times 15\times 12}{30\times 10^6}=0.06\text{ 吋}$$

故 BB_1 為

$$BB_1=\frac{B_1D}{\sin\theta}=0.12\text{吋}$$

由此值可知偏移所造成之角度改變極小，故吾人計算 S 值時設 θ 為 30°是足夠精確的。

3. 圖 7 中構架 ABC 係由木質梁 BC 與鋼棒 AB 構成，已知硬木之工作應力為 $\sigma_W=160$ 磅／吋^2，鋼之 $\sigma_W=10,000$ 磅／吋^2，若 B 點之負荷 $P=6,000$ 磅，且忽略構架本身之重量，則試求 BC 及 AB 之截面積，及 B 點由於棒之變形所產生之垂直與水平位移各為何？

解：圖 7b 所示為 B 點之平衡狀況。因圖 7b 與 7a 相似，吾人得

$$S=\frac{P.15}{9}=10,000\text{磅}$$

$$S_1=\frac{P.12}{9}=8,000\text{ 磅}$$

故鋼棒及木棒之截面積各為

$$A=\frac{S}{\sigma_W}=\frac{10,000}{10,000}=1\text{ 吋}^2\ ,\ A_1=\frac{s_1}{\sigma_W}=\frac{8,000}{160}=50\text{ 吋}^2$$

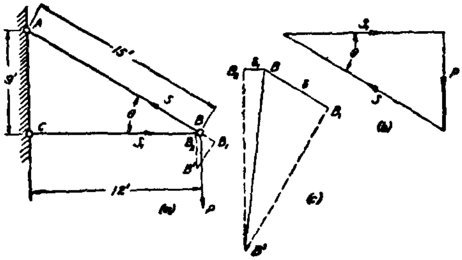
又鋼棒之總伸長量及木棒之總壓縮量各為

$$\delta=\frac{S.l}{E_SA}=\frac{10,000.15\cdot 12}{30\times 10^6}=0.060\text{ 吋}$$

$$\delta_1=\frac{s_1 l_1}{E_W A_1}=\frac{160\times 12\times 12}{1.5\times 10^6}=0.0154\text{ 吋}$$

若欲求 B 點之位移，吾人分別以 A，C 為圓心，伸張後之鋼棒，及壓縮後之木棒為半徑作二弧交於 B' 點，以圖 7c 說明，則 BB_1 為鋼棒之伸張量，BB_2 為木棒之壓縮量，圖中虛線即是弧線，而 BB'

即爲B點之位移。故此位移之分量甚易由圖形求得。



（圖7）

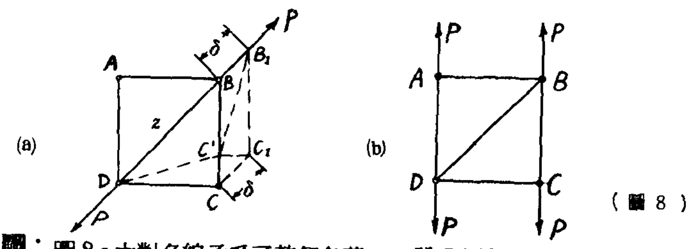
4. 試求前題中AB棒之傾斜角θ應爲若干，才能使AB之重量爲極小值。

解：若θ爲鋼棒及水平梁間之夾角，l_1爲梁之長度，則鋼棒長爲$l = l_1 / \cos$，又棒之張力爲$S = P / \sin\theta$而鋼棒必須之橫截面爲$A = P / \sigma_W \sin\theta$，故鋼棒體積爲

$$l \cdot A = \frac{l_1 P}{\sigma_W \sin\theta\cos\theta} = \frac{2l_1 P}{\sigma_W \sin 2\theta}$$

由此式可知棒之體積，亦即重量，在$\theta = 45°$時爲極小值。

5. 正方形構架$ABCD$（圖$8a$）中包含五條鋼棒其截面積約爲1吋^2，若受到二個$P = 10,000$磅之沿對角線之力，試求A及C點因形變而造成之角度改變，又若構架所受之力如圖$8b$所示則角度改變爲何?



（圖8）

解：圖$8a$中對角線承受了整個負荷P，設D點及對角線之方向固定則連接點B在對角線上之位移即爲伸長量δ，（$\delta = Pl / AE$）．連接點C之新位置C'可由圖中之虛線來決定。由小直角三角形CC_1C^1知$CC^1 = \delta / \sqrt{2}$．則DC棒旋轉之角度爲

$$\frac{CC'}{DC} = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2}l} = \frac{P}{1 \cdot E} = \frac{1}{3,000}\text{（弳度）}$$

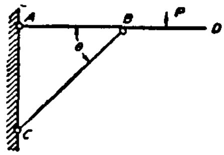
而 C 點之角度增加爲

$$2\times\frac{1}{3,000}=\frac{1}{1,500}\text{（弳度）}$$

圖 8b 之問題由讀者試行解答

6. 試問 P 作用在梁 ABD 上何處方能使 BC 棒上承受之力爲極大值。又在何等角度 θ 時棒 BC 之體積爲極小值。（圖 9）

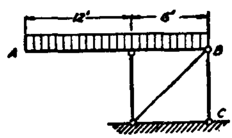
解：BC 棒承受之力在負荷 P 位於極右端之 D 點時達到極大值，而棒之體積於 $\theta=45°$ 時最小。



（圖 9）

7. 圖 10 中，若 BC 棒之工作應力爲 $\sigma_W=15,000$ 磅／吋^2，且梁 AB 上均勻分布之垂直負荷強度爲 $q=1,000$ 磅／呎，試求 BC 之橫截面積須爲若干？

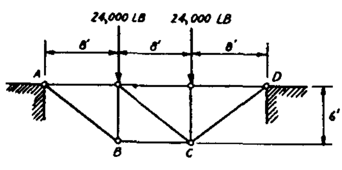
解：$A=0.6$ 吋^2



（圖 10）

8. 試求圖 11 所示之 AB 及 BC 棒所須之截面積 A 及 A_1。已知 $\sigma_W=16,000$ 磅每平方吋・

解：$A=2.5$ 吋^2，$A_1=2$ 吋^2

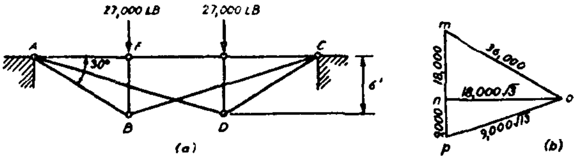


（圖 11）

9. 若圖 12a 中 AB 及 BC 棒之 $\sigma_W=16,000$ 磅／吋^2，試求其必須之截面積 A 及 A_1。

解：設圖 12b 中 Δmpo 代表作用於 B 點之力，若繪一水平線 on，則三角形 mno 及 npo 與三角形 BFA 及 FBC 爲相似形，因此，AB，BC 棒上之力及它們的水平及垂直分量均如圖 12b 所示，故所須之截面積爲

$$A=\frac{36,000}{16,000}=2.25\text{平方吋}，A_1=\frac{9,000\sqrt{3}}{16,000}=2.03\text{平方吋}$$



（圖 12）

10.　已知圖11中CD棒爲鋼質且$\sigma_W=16,000$磅／吋²，試求其必須截面積。

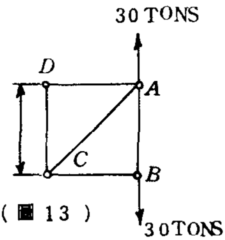
答：$A=2.5$平方吋，$\delta=0.064$吋

11.　題8中，若右方之負荷移去，則其解爲何？

答：$A=1.67$平方吋，$A_1=1.33$平方吋

12.　一方形構架之負荷如圖13所示，試求各棒之伸長量。已知棒之截面積爲1平方吋。

答：除AB外所有棒之伸長量均爲零。而棒AB之伸長量爲　$\delta=0.12$吋



（圖 13）

5. 由棒本身重量所產生之應力及應變－在圖1中討論棒之延伸時，吾人僅考慮負荷P之作用力，但是當棒甚長時，其本身之重量將產生相當大之額外應力。此時最大應力位于上方固定端之橫截面上。令γ代表棒之單位體積重量，總重量即爲$A\gamma l$，而最大應力爲

$$\sigma_{max}=\frac{P+A\gamma l}{A}=\frac{P}{A}+\gamma l \tag{6}$$

(6)式中之第二項代表重量所造成之應力

距底端x高度之mn截面以下部分（圖1）之重量爲$A\gamma x$，故該面上之應力爲

$$\sigma=\frac{P+A\gamma x}{A} \tag{7}$$

將(6)式的σ_{max}以σ_W代之，即可得計算安全截面之方程式爲

$$A=\frac{P}{\sigma_W-\gamma l} \tag{8}$$

值得注意的是當長度增加時，棒之重量愈形重要。因爲當棒長增加時式(8)右方之分母減少而必須的截面積A隨之增加。當$\gamma l=\sigma_W$，亦即由棒本身