

新世纪教改项目规划教材

经济 数学

学习指导与练习

财经类数学教材编写组



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

经济数学学习指导与练习

财经类数学教材编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学学习指导与练习/《经济数学学习指导与练习》编写组主编. —北京:高等教育出版社,2006.6

ISBN 7-04-019517-8

I. 经... II. 经... III. 经济数学—高等学校—教学参考资料 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 061415 号

责任编辑 徐 东 封面设计 吴 昊 责任印制 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总 机	010-58581000	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
		网上订购	http://www.landracom.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landracom.com.cn
排 版	南京理工出版信息技术有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	江苏如皋市印刷有限公司		
开 本	787×1092 1/16	版 次	2006 年 6 月第 1 版
印 张	11.75	印 次	2006 年 6 月第 1 次
字 数	300 000	定 价	14.00 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19517-00

财经类数学教材编委会

主任委员:周世武

副主任委员:罗 钊 朱东鸣 李世先

主 编:余 竞

副 主 编:罗 钊 胡青龙 杨晋浩

编 委:施 达 翼雅生 李 宏 喻朝阳

主 审:刘启宽

副 主 审:陈 聆 陈宗元

编 者 的 话

目前“经济数学”课程授课时数减少,内容又较多较难,在完成教学计划的基础上,教师要在课内给学生进行系统复习、辅导、详细评讲作业,难度很大.为帮助学生培养自学能力和巩固所学知识,帮助教师全面完成教学计划和提高教学质量,我们编写了《经济数学学习指导与练习》一书.本书以高等教育出版社出版的《经济数学(上)》(2002年8月第一版)教材为基础,以《经济数学》教学基本要求为依据,每章均分五个部分编写:

第一部分:学习要求;

第二部分:内容提要;

第三部分:典型例题分析及解答(难度略高于教材上例题);

第四部分:每章节习题选解;

第五部分:练习题及参考答案(大都选自考研题).

本书收入的例题、习题选解题、第五部分的练习题共约1200道.因此,本书既可作为《经济数学》教材的配套辅导书,又可作为一本独立的经济数学学习参考书,对于考研的学生本书也是一本不可多得的复习资料.

参加本书编写的有:罗钊,刘宗贵,施达,翼雅生,杨晋浩,张勇,李宏.本书由余竟任主编,罗钊、胡青龙和杨晋浩任副主编;由刘启宽任主审,陈聆、陈宗元任副主审.

由于编者水平有限和时间仓促,错误之处在所难免,恳请使用本书的广大师生批评指正.

财经类数学教材编写组

2006年1月

目 录

第一章 函数 极限与连续	1
§ 1.1 学习要求	1
§ 1.2 内容提要	1
§ 1.3 基本例题及分析	2
§ 1.4 教材习题选解	5
§ 1.5 练习题及参考答案	18
第二章 导数与微分	21
§ 2.1 学习要求	21
§ 2.2 内容提要	21
§ 2.3 基本例题及分析	23
§ 2.4 教材习题选解	26
§ 2.5 练习题及参考答案	35
第三章 导数的应用	42
§ 3.1 学习要求	42
§ 3.2 内容提要	42
§ 3.3 基本例题及分析	45
§ 3.4 教材习题选解	50
§ 3.5 练习题及参考答案	68
第四章 定积分与不定积分	74
§ 4.1 学习要求	74
§ 4.2 内容提要	74
§ 4.3 基本例题及分析	76
§ 4.4 教材习题选解	80
§ 4.5 练习题及参考答案	102
第五章 多元函数微积分	105
§ 5.1 学习要求	105
§ 5.2 内容提要	105

§ 5.3 基本例题及分析	108
§ 5.4 教材习题选解	113
§ 5.5 练习题及参考答案	131
第六章 无穷级数	135
§ 6.1 学习要求	135
§ 6.2 内容提要	135
§ 6.3 基本例题及分析	137
§ 6.4 教材习题选解	139
§ 6.5 练习题及参考答案	150
第七章 微分方程	153
§ 7.1 学习要求	153
§ 7.2 内容提要	153
§ 7.3 基本例题及分析	157
§ 7.4 教材习题选解	164
§ 7.5 练习题及参考答案	177

第一章 函数 极限与连续

本章重点讨论函数的相关概念,函数的极限,函数极限的计算及函数的连续性等内容.

§ 1.1 学习要求

1. 理解函数概念(会求函数的定义域,会计算函数值);了解分段函数、复合函数、函数的单调性、奇偶性等概念;能熟练列出简单实际问题的函数关系.
2. 了解函数极限的描述性定义;了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系,会对无穷小进行比较;会用无穷小的性质求极限;会用无穷小与无穷大的关系求极限.
3. 掌握极限的四则运算性质,会用极限的四则运算性质求极限;知道夹逼准则和单调有界数列极限存在准则,会用两个重要极限求极限.
4. 理解函数连续的概念,会判断间断点的类型;知道初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理,介值定理,根的存在定理).
5. 会用函数的连续性求极限;会求分段函数在分段点处的极限.

§ 1.2 内容提要

一、有关函数的一些概念

1. 函数定义:见教材 P1 定义 1.
2. 基本初等函数定义:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.
3. 复合函数定义:见教材 P4 定义 2.
4. 初等函数定义:由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合运算并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.
5. 经济活动中常见的函数:见教材 P5—P7.

二、极限概念

1. 数列极限定义:如果 n 无限增大时,无穷数列 $a_n = f(n)$ 的项 a_n 无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为数列 a_n 的极限,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

2. 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限定义:如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x \rightarrow \infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

注:类似地可给出 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时函数极限定义.

3. 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限定义:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右邻域内有定义(x_0 可以除外),如果当 x 无限接近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

注:类似地可给出左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$ 与右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$ 的定义.

4. 极限与左、右极限的关系: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

5. 极限的性质:唯一性、保号性,分别见教材 P15 定理 2、定理 3、定理 4.

6. 极限的四则运算法则:见教材 P18—19 法则 1、2、3.

7. 极限存在准则:(1)夹逼准则;(2)单调有界准则,分别见教材 P22—23 定理 2、定理 3.

三、无穷小量

1. 无穷小量的定义:见教材 P16 定义 1,可简述为:极限为 0 的变量称为无穷小量.

2. 无穷小量的运算性质:见教材 P16 的性质 1、2、3.

3. 极限与无穷小量的关系: $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha (\lim \alpha = 0)$ (P17 定理 1).

4. 无穷大量的定义:见教材 P17 定义 2.

5. 无穷小量与无穷大量的关系:见教材 P18 定理 2,可简述为:无穷大量的倒数为无穷小量,无穷小量的倒数(分母 $\neq 0$)为无穷大量.

6. 无穷小量的比较:见教材 P22 定义.

7. 等价无穷小量的代换定理:(P22 定理 1) 设 $\lim \alpha = \lim \alpha' = \lim \beta = \lim \beta' = 0$, $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在,则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$. (此性质可用于简化极限的计算)

四、两个重要极限:1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

五、函数的连续性

1. 函数在一点处连续及左、右连续的定义:见教材 P26 定义 2, P27 定义 2'、定义 3.

2. 函数在区间上连续的定义:见教材 P28 定义 4.

3. 一切基本初等函数在其定义域内连续,一切初等函数在其定义区间内连续.

4. 函数的间断点:见教材 P30 定义 5.

5. 闭区间上连续函数的性质:见教材 P32 定理 4、定理 5 及其推论.

§ 1.3 基本例题及分析

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

(2) $y = \sqrt{x^2 - 4} + \lg(x - 3)$;

(3) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求函数 $f(x^2)$ 的定义域.

分析 求函数定义域的基本原则是:若有分母,则分母不能为零;若有开偶次方的运算,则被

并方数大于等于零;若有对数函数,则真数大于零.

解 (1) 由 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \neq 0$, 解得 $x \neq 1, x \neq 2$, 故所求函数的定义域为:
 $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$;

(2) 由 $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases}$, 故所求函数的定义域为: $(3, +\infty)$;

(3) 由 $0 \leq x^2 \leq 1$ 解得 $-1 \leq x \leq 1$, 故所求函数的定义域为: $[-1, 1]$.

例 2 下列各题中的函数是否相同?

(1) $\ln x^2$ 与 $2\ln |x|$; (2) $\frac{x^2-1}{x+1}$ 与 $x-1$;

(3) $\sqrt{x^2}$ 与 x ; (4) $\sin(\arcsin x)$ 与 x .

分析 判断两个函数是否相同,根据函数定义,首先看它们的定义域是否相同.若相同,再考查它们的对应法则是否一样.方法是:在两个函数相同的定义域内任取一点,看分别算出的函数值是否相等,若相等,则两个函数相同,否则两个函数不相同.

略解 (1)相同;(2)不同,因为定义域不同;(3)不同,因为对应法则不一样;(4)不同,因为定义域与对应法则均不一样.

例 3 计算下列各题:

(1) 设 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 求 $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$;

(2) 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$;

(3) 设 $y = 1 + \lg(x+2)$, 求其反函数.

分析 计算函数值或复合函数,一定要搞清楚所给函数的对应关系;求反函数的方法是:由已知,先将 x 表为 y 的函数,再将 x 和 y 的位置调换,即得所求的反函数.

解 (1) $f(0) = \frac{1-0^2}{1+0^2} = 1$; $f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;
 $f(x+1) = \frac{1-(x+1)^2}{1+(x+1)^2} = \frac{-(x^2+2x)}{x^2+2x+2}$; $f(x)+1 = \frac{1-x^2}{1+x^2} + 1 = \frac{2}{1+x^2}$;
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad (x \neq 0)$; $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad (x \neq \pm 1)$.

(2) 由于 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, 令 $t = x + \frac{1}{x}$, 有 $f(t) = t^2 - 2$,

所以 $f(x) = x^2 - 2$.

(3) 由 $y = 1 + \lg(x+2)$ 得 $\lg(x+2) = y-1$, 故 $x+2 = 10^{y-1}$, $x = 10^{y-1} - 2$, 于是所求反函数为: $y = 10^{x-1} - 2$.

例 4 计算下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 2}{5n^3 + 2n - 5}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

分析 此例中(1)(3)小题均为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限,解题的一般方法是:分子分母同除以分母中变量的最高次幂,从而确定出极限;(3)小题也可结合“无穷小的倒数是无穷大,无穷大的倒数是无穷小”确定极限.(2)(4)小题均为 $\frac{0}{0}$ 型的极限,解题的一般方法是:想办法分离出零因式,约去后再确定出极限;(2)小题用分解因式的方法分离出零因式,(4)小题用有理化方法分离出零因式.

$$\text{解 (1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 2}{5n^3 + 2n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3}}{5 + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}} = \frac{1}{5};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{3};$$

$$(3) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-1}{x+2} = \infty;$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)} = -\lim_{x \rightarrow -8} \frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3} \\ &= -\frac{4-2\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{(-8)^2}}{\sqrt{1-(-8)}+3} = -\frac{12}{6} = -2. \end{aligned}$$

注:(4)小题解法的第四个等号成立是由于函数 $f(x) = \frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}$ 为初等函数,初等函数在其定义域内连续, $x=-8$ 属于 $f(x)$ 的定义域,故其极限等于 $f(-8)$. 此法是求极限的重要方法之一.

例 5 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{(\sin x)^2}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\sin x}.$$

分析 无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量,这是求极限的方法之一,(1)(2)小题用此法解决;而(3)(4)小题均为 $\frac{0}{0}$ 型极限,又含有三角函数,故应考虑用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 解决,此时应特别注意极限过程为“ $x \rightarrow 0$ ”.

$$\text{解 (1)} \text{ 因为对任意 } n \in \mathbf{N}_+, \sin n! \text{ 有界,而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0;$$

$$(2) \text{ 因为对任意 } x \in \mathbf{R}, \sin x \text{ 有界,而 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{(\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \frac{x^2}{(\sin x)^2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-1} = -1.$$

例 6 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{3x}$.

分析 这是 1^∞ 型的极限, 应考虑用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 求极限.

解 法一 令 $\frac{2x-5}{2x+1} = 1 + \frac{1}{u}$, 则 $x = -3u - \frac{1}{2}$, 且 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $u \rightarrow \infty$, 于是有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{3x} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{3(-3u - \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right]^{-9} \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{-\frac{3}{2}} = e^{-9}. \end{aligned}$$

法二
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{-6} \cdot (-9) - \frac{3}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-6}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{-6}} \right]^{-9} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{2x+1} \right)^{-\frac{3}{2}} = e^{-9}. \end{aligned}$$

例 7 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)$.

分析 这是 $\infty \cdot 0$ 型的极限, 在计算过程中可用等价无穷小替换求极限, 此例用到 $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$ 作替换.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \cdot \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \ln \left[2^x \left(1 + \frac{1}{2^x} \right) \right] \\ &= 3 \ln 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{2^x} \right) = 3 \ln 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{2^x} = 3 \ln 2. \end{aligned}$$

例 8 利用迫敛性定理求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

分析 利用迫敛性定理求极限, 应想办法将所给数列(或函数)放大、缩小, 使放大、缩小后所得数列(或函数)的极限是同一个值 A , 则所给数列(或函数)的极限即为 A .

解 因为
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$

由迫敛性定理即得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

§ 1.4 教材习题选解

习题 1-1

2. 若 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, $g(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, 证明:

(1) $f(x) \cdot f(y) = f(x+y);$ (2) $\frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y);$

$$(3) g(x) + g(y) = g(x \cdot y); \quad (4) g(x) - g(y) = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

证 (1) 左边 $= f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y) =$ 右边; 得证

(2) 左边 $= \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = f(x-y) =$ 右边; 得证

(3) 左边 $= g(x) + g(y) = \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y) = g(x \cdot y) =$ 右边; 得证

(4) 左边 $= g(x) - g(y) = \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} = g\left(\frac{x}{y}\right) =$ 右边. 得证

3. 某批发商店按照下列价格表成盒地批发销售某种盒装饮料:

当购货量小于或等于 20 盒时, 每盒 2.50 元;

当购货量小于或等于 50 盒时, 其超过 20 盒的饮料每盒 2.30 元;

当购货量小于或等于 100 盒时, 其超过 50 盒的饮料每盒 2.00 元;

当购货量大于 100 盒时, 其超过 100 盒的饮料每盒 1.80 元;

设 x 是销售量, y 是总价, 试建立总价 y 与销售量 x 之间的函数关系式, 并作出它的图像.

解 由已知, 当 $0 \leq x \leq 20$ 时, 总价 y 与销售量 x 之间的函数关系为: $y = 2.5x$;

同理, 当 $20 < x \leq 50$ 时, $y = 2.5 \times 20 + 2.3(x - 20) = 50 + 2.3(x - 20)$;

当 $50 < x \leq 100$ 时, $y = 2.5 \times 20 + 2.3 \times 30 + 2(x - 50) = 119 + 2(x - 50)$;

当 $x > 100$ 时, $y = 2.5 \times 20 + 2.3 \times 30 + 2 \times 50 + 1.8(x - 100) = 219 + 1.8(x - 100)$.

故所求函数关系为:

$$y = \begin{cases} 2.5x, & 0 \leq x \leq 20, \\ 50 + 2.3(x - 20), & 20 < x \leq 50, \\ 119 + 2(x - 50), & 50 < x \leq 100, \\ 219 + 1.8(x - 100), & x > 100. \end{cases}$$

图略.

4. 若 $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x = \varphi(t) = \lg(1+t)$, 求 $f[\varphi(t)]$.

解 $f[\varphi(t)] = 3[\varphi(t)]^2 - 2\varphi(t) = 3[\lg(1+t)]^2 - 2\lg(1+t)$.

6. 设某商品的市场供应函数 $Q = S(p) = -80 + 4p$, 其中 Q 为供应量, p 为市场价格. 商品的单位生产成本是 1.5 元, 试建立总利润 L 与市场价格 p 的函数关系式.

解 因为总利润 $L =$ 总收入 $R(Q) -$ 总成本 $C(Q)$. 由已知, $R(Q) = p \cdot Q$, $C(Q) = 1.5Q$, $Q = -80 + 4p$, 故所求函数关系为:

$$L = p \cdot Q - 1.5Q = (p - 1.5)Q = (p - 1.5)(4p - 80).$$

7. 用 p 代表单价, 某商品的需求函数为 $Q = D(p) = 7000 - 50p$, 当 Q 超过 1000 时成本函数 $C = 20000 + 25Q$. 试确定能达到损益平衡的价格(提示: 当总收入 = 总成本时, 便达到损益平衡).

解 因为 $R(Q) = Q \cdot p = (7000 - 50p)p$, $C(Q) = 20000 + 25Q = 20000 + 25(7000 - 50p)$ ($Q > 1000$). 由 $R(Q) = C(Q)$, 即

$$(7000 - 50p)p = 20000 + 25(7000 - 50p)$$

整理得 $p^2 - 165p + 3900 = 0$, 解得 $p_1 = 136.41$, $p_2 = 28.59$. 由于

$$Q|_{p_1=136.41} = (7\,000 - 50p)|_{p_1=136.41} = 179.5 < 1\,000,$$

故 p_1 不合题意,于是所求能达到损益平衡的价格为 28.59.

习题 1-2

3. 讨论下列各函数的极限:

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x; \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}.$$

解 (5) 任取 $\mu \in [-1, 1]$, 取 $x = 2k\pi + \arccos \mu$ ($k \in \mathbf{Z}$), 则

$$\cos x = \cos(2k\pi + \arccos \mu) = \cos(\arccos \mu) = \mu,$$

因此当 x 以 $x = 2k\pi + \arccos \mu$ 的方式无限增大(即 $k \rightarrow \infty$)时, $\cos x$ 无限接近于 μ . 由 μ 的任意性知 $\cos x$ 不是无限接近于一个确定的常数, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ 不存在.

(6) 由 $y = \operatorname{arccot} x$ 的图像可知 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$, 二者不相等, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x$ 不存在.

(12) 任取 $\mu \in [-1, 1]$, 取 $x = \frac{1}{2k\pi + \arccos \mu}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 则恒有

$$\cos \frac{1}{x} = \cos(2k\pi + \arccos \mu) = \mu,$$

类似于(5)小题的讨论知 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

4. 作出函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 3, \\ 2x-1, & x \geq 3 \end{cases}$ 的图像, 并求 $f(3-0)$ 和 $f(3+0)$.

解 图略. $f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x = 3,$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x-1) = 5.$$

5. 分别作出函数 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 的图像, 求 $f(0-0)$, $f(0+0)$, $\varphi(0-0)$, $\varphi(0+0)$, 并判别 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在?

解 图略. $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$, $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$;

$$\varphi(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \varphi(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1;$$

由于 $f(0-0) = f(0+0) = 1$, $\varphi(0-0) \neq \varphi(0+0)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (存在), 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ 不存在.

习题 1-3

1. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下列数列哪些是无穷小?

$$(1) a_n = \frac{1}{n^2}; \quad (2) a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}; \quad (3) a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}; \quad (4) a_n = \frac{1 - \cos n\pi}{n}.$$

解 (1) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, 所以 $a_n = \frac{1}{n^2}$ 是当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小;

(2) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} = 0$, 所以 $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$ 是当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小;

(3) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ 不存在, 所以 $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ 不是无穷小;

(4) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 而 $|1 - \cos n\pi| \leq 2$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} = 0$, 所以 $a_n = \frac{1 - \cos n\pi}{n}$

是当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n+1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x^2}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}.$$

解 (1) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $|\sin n| \leq 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n+1} = 0$;

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x^2} = 0$;

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$;

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$.

习题 1-4

2. 求下列各极限:

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - x - 2}; \quad (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 6}{x^4 - 3x^2 + 3};$$

$$(9) \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 + 2t + 3); \quad (11) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right); \quad (12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}.$$

解 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x + 2} = \frac{4 \times 0^2 - 2 \times 0 + 1}{3 \times 0 + 2} = \frac{1}{2}$;

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 6}{x^4 - 3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 0;$$

$$(9) \text{ 因为 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t^2}}{1 + \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0, \text{ 所以 } \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 + 2t + 3) = +\infty;$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2;$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. 试比较下列各组无穷小哪个的阶高?

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^3 + 1\,000x^2$ 与 x^2 ;

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1\,000x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1\,000) = 1\,000$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $x^3 + 1\,000x^2$ 与 x^2 是同阶无穷小.

(2) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1 - \sqrt{x}$ 与 $1 - x$;

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $1 - \sqrt{x}$ 与 $1 - x$ 是同阶无穷小.

(3) 当 $x \rightarrow 2$ 时, $x - 2$ 与 $\frac{1}{12}(x^3 - 8)$;

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\frac{1}{12}(x^3 - 8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12}{x^2 + 2x + 4} = \frac{12}{4 + 4 + 4} = 1$,

所以当 $x \rightarrow 2$ 时, $x - 2$ 与 $\frac{1}{12}(x^3 - 8)$ 是等价无穷小.

(4) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x^2}$.

解 令 $\frac{1}{x} = u$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \frac{u}{\sin u} = 0 \times 1 = 0,$$

从而有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \infty$, 即当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{1}{x}$ 是比 $\frac{1}{x^2}$ 低阶的无穷小.

4. 求下列各极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x;$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}};$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3};$

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-x-5};$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\sin^3 x};$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5} = 1 \times 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{nx}{\sin nx} \cdot \frac{m}{n} = 1 \times 1 \times \frac{m}{n} = \frac{m}{n};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{-x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3} = e^{-3};$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^3 = e^3;$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 = e \times 1^2 = e;$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{1+x}\right)^{-(1+x)} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-4} = e \times 1^{-4} = e;$$

$$(8) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^3}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \cdot \frac{x^2}{\sin x^2} \cdot x = 1^3 \times 1 \times 0 = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{(\sin x)^3} = \infty;$$

(9) 令 $y = \arcsin x$, 则 $x = \sin y$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

5. 利用等价无穷小求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 3x}{x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin 2x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\tan x^3}.$$

解 (1) 因为 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$, $\tan 3x \sim 3x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 6 = 6;$$

(2) 因为 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$;

(3) 因为 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan x^3 \sim x^3$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\tan x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

习题 1-5

1. 设函数 $y = -x^2 + 3x + 5$, 求下列情况下函数的增量: (1) x 从 1 变到 0.5; (2) x 从 2 变到 2.2; (3) x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$.

解 令 $y = f(x) = -x^2 + 3x + 5$, 则

$$(1) \Delta y = f(0.5) - f(1) = (-0.5^2 + 3 \times 0.5 + 5) - (-1^2 + 3 \times 1 + 5) = -0.75;$$

$$(2) \Delta y = f(2.2) - f(2) = (-2.2^2 + 3 \times 2.2 + 5) - (-2^2 + 3 \times 2 + 5) = -0.24;$$

$$(3) \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [-(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) + 5] - (-x_0^2 + 3x_0 + 5) \\ = (3 - 2x_0)\Delta x - (\Delta x)^2.$$

2. 设函数 $y = \sqrt{1+x}$, 求下列情况下函数的增量与自变量增量的比, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

(1) x 从 2 变到 1.8; (2) $x_0 = 3$, $\Delta x = -0.2$; (3) x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$.

解 令 $y = f(x) = \sqrt{1+x}$, 则

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1.8) - f(2)}{1.8 - 2} = \frac{\sqrt{1+1.8} - \sqrt{1+2}}{-0.2} = \frac{1.673\ 32 - 1.732\ 05}{-0.2} \approx 0.293\ 7;$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(3 - 0.2) - f(3)}{-0.2} = \frac{\sqrt{1+2.8} - \sqrt{1+3}}{-0.2} \approx 0.253\ 2;$$