普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

申亚男 张晓丹 李为东 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

申亚男　张晓丹　李为东　编
吴昌悫　审

机械工业出版社

本书是根据高等院校工科各专业的“线性代数课程基本要求”编写的，主要内容包括矩阵、方阵的行列式、向量空间、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、线性变换等7章。本书选编了较多不同层次的例题和习题供教师选择，并引入了数学软件 MATLAB，以提高学生的学习兴趣和应用能力。书中部分章节打了“*”，教师可以根据学时选讲或不讲，不影响整个体系。

本书内容丰富，阐述简明易懂，注重理论联系实际，可作为高等院校理工科各专业线性代数课程的教材（适合 36～54 学时）或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/申亚男，张晓丹，李为东编. —北京：机械工业出版社，2006.10

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 7-111-19809-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①申…②张…③李… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 098222 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

责任编辑：郑 丹 版式设计：张世琴 责任校对：申春香

封面设计：鞠 杨 责任印制：洪汉军

北京瑞德印刷有限公司印刷

2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm · 7.875 印张 · 301 千字

定价：20.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话 （010）68326294

编辑热线电话（010）88379716

前 言

线性代数是理工科大学生重要的数学基础课程之一，主要研究能够进行线性运算的量及其相互之间的联系及规律。

线性代数课程的主要内容包括矩阵理论、行列式理论、向量空间理论、线性方程组理论、二次型理论及矩阵的特征值问题等。本教材是以这些内容为主体编写的。

矩阵是研究线性运算的主要工具，在线性代数中处于核心地位，因此，本书强调和突出了矩阵的作用，第 1 章花费了较大的篇幅介绍了矩阵的概念和运算，特别加强了初等变换、矩阵相抵、分块矩阵的运算等内容，并附有大量的例题。使学生通过学习本章知识认识和掌握矩阵这一有力的数学工具。

行列式一直在线性代数中占有重要地位，虽然今天它较之矩阵已经退居次要地位，但仍在线性方程组求解、矩阵秩的计算、矩阵求逆、矩阵特征值计算中发挥着重要作用，是线性代数研究中不可缺少的工具。本书第 2 章详细介绍了行列式的理论与应用。

第 3 章从几何空间切入，引入 n 维向量的概念及线性运算，使学生对线性相关、线性无关等概念有直观的几何理解。在向量组的基础上引入向量空间，之后再引入一般的线性空间的概念，使学生对抽象的空间概念有一个初步的认识。通过类比及推广的方法，使学生认识和领悟抽象线性空间的实质。第 4 章系统讨论了线性方程组解的结构及求解。

本书后 3 章在介绍了矩阵的特征值理论及二次型理论之后，用例题和习题的形式给出了线性递推关系、线性微分方程（组）、二次曲线及二次曲面的标准化问题。虽然，这些内容不是本书的核心，但是花一定的篇幅介绍这些知识，可以使学生尝试用线性代数工具解决一些其他领域的数学问题。

本书注意概念的引入背景，配备了较多不同层次的例题，同时配备了 A、B、C 三类习题，分别是基础题、较难的题及拓展知识题，使教师有较大的选择余地，同时引导有兴趣的学生去思考和探索数学问题。

学习数学的目的之一是使用数学技术解决其他学科及生产、生活实际中的问题，结合线性代数的内容，我们介绍了数学软件 MATLAB 的使用方法，使学生在掌握知识的同时，学会使用数学技术及现代工具，让计算机逐步真正走进我们的教学。

本书由张晓丹编写第 1、2 章，申亚男编写第 3、4 章，李为东编写第 5、6、

7 章，申亚男负责全书的统稿工作。

在本书编写过程中，北京航空航天大学李心灿教授给予了热情的关心和真诚的帮助，北京信息科技大学吴昌悫教授认真审阅了书稿，提出了不少中肯的修改意见，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平所限，错漏之处在所难免，望读者不吝指正。

编　者

2006 年 1 月

目　　录

第1章 矩　阵

矩阵是数学中的一个重要概念，是线性代数的重要研究对象. 线性代数的许多内容都可借助于矩阵进行讨论. 矩阵作为一种重要的数学工具，不仅广泛应用于数学的其他分支，在其他学科中也有着广泛的应用.

本章从实际问题入手，引入矩阵的概念，然后介绍矩阵运算、分块矩阵、可逆矩阵、矩阵的初等变换等内容，最后简单介绍数学软件 MATLAB 在矩阵中的应用.

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　矩阵的概念

在很多实际问题中，人们经常要处理一些数，不仅要描述它们，还要研究它们之间的相互关系.

【例 1.1】　某城市有 4 个县城，市政府决定修建公路网. 图 1.1 所示为公路网中各段公路的里程数（单位：km），其中，五个圆分别表示城市 O 与四个县城 E_1，E_2，E_3，E_4，图中两圆连线上的数字表示两地之间公路的总里程.

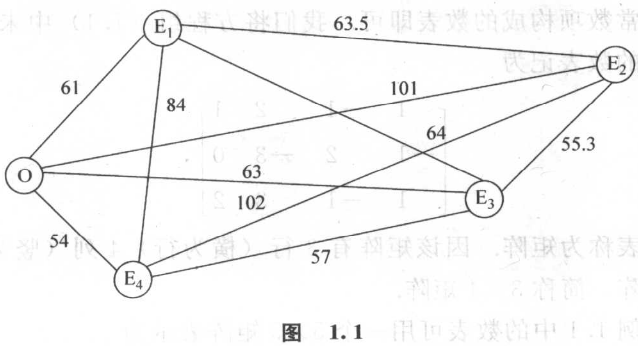

图　1.1

图 1.1 可用下面的矩形数表表示：

	O	E_1	E_2	E_3	E_4
O	0	61	101	63	54
E_1	61	0	63.5	64	84
E_2	101	63.5	0	55.3	102
E_3	63	64	55.3	0	57
E_4	54	84	102	57	0

【例 1.2】 求解方程组

$$\begin{cases} x-y+2z=1 & ① \\ -x+2y-3z=0. & ② \\ x-y+3z=2 & ③ \end{cases} \tag{1.1}$$

解 采用消元法求解，式②+式①，式③−式①，得

$$\begin{cases} x-y+2z=1 & ① \\ y-z=1. & ② \\ z=1 & ③ \end{cases} \tag{1.2}$$

形如式（1.2）的方程组称为**阶梯形线性方程组**.

采用**回代法**求解阶梯形线性方程组. 由式（1. 2）中的式③知 $z=1$，将其回代式②，得 $y=2$，再回代式①，得 $x=1$.

原方程组（1.1）的解为$\begin{cases} x=1 \\ y=2. \\ z=1 \end{cases}$

由例 1.2 的求解过程可以看出：线性方程组由未知变量的系数和常数项唯一确定，与未知变量的记号无关. 因此，要研究方程组的求解问题，只需研究未知变量的系数和常数项构成的数表即可. 我们将方程组（1.1）中未知变量的系数和常数项构成的数表记为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

这样的矩形数表称为矩阵. 因该矩阵有 3 行（横为行）4 列（竖为列），故称之为 3 行 4 列矩阵，简称 3×4 矩阵.

类似地，例 1.1 中的数表可用一个 5×5 矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 61 & 101 & 63 & 54 \\ 61 & 0 & 63.5 & 64 & 84 \\ 101 & 63.5 & 0 & 55.3 & 102 \\ 63 & 64 & 55.3 & 0 & 57 \\ 54 & 84 & 102 & 57 & 0 \end{bmatrix}.$$

定义 1.1 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$）组成的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，或 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 通常，使用大写拉丁字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示矩阵. 对 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，若 $m=n$，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵（或 n 阶方阵）. a_{ii}（$1\leqslant i\leqslant n$）称为 $\boldsymbol{A}$ 的**对角元素**. 元素 a_{ii}（$i=1,2,\cdots,n$）所在的直线称为该方阵的**主对角线**.

若 $m=1$，则 $\boldsymbol{A}=(a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n})$，称 $\boldsymbol{A}$ 为**行矩阵**，又称**行向量**；若 $n=1$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为**列矩阵**，又称**列向量**.

两个矩阵的行数相等、列数也相等时，称它们是**同型矩阵**.

$m\times n$ 个元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记做 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2.5 & 3 & 6.2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0.5 & 1+\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 则 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 2×3 复矩阵，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$ 是 3×2 零矩阵.

【例 1.3】 给定 n 个变量 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

其中，x_1，x_2，…，x_n 是未知数，a_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）是系数；b_1，b_2，…，b_m 是常数项.

将对应的系数按顺序排成矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，称为方程组的**系数矩阵**.

将对应的系数与常数项按顺序排成矩形数表

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{B}$ 是一个 $m\times$（$n+1$）矩阵，称为方程组的**增广矩阵**.

下面介绍几种特殊的矩阵.

定义 1.2 主对角元素全为 1，而其他元素全为零的 n 阶矩阵称为 n 阶**单位矩阵**，简称单位阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

定义 1.3 非主对角元素全为零的 n 阶矩阵称为 n 阶**对角矩阵**，简称对角阵，记为 $\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

或记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}$（$a_1$，$a_2$，…，$a_n$）.

对角矩阵 $\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$（$k\neq 0$）称为 n 阶**数量矩阵**.

定义 1.4 形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的 n 阶方阵分别称为 n 阶**上三角阵**与 n 阶**下三角阵**.

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是上三角阵，当且仅当 $a_{ij}=0$，($i>j$，$j=1$，2，…，$n-1$)；矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是下三角阵，当且仅当 $a_{ij}=0$ ($i<j$，$j=2$，3，…，n).

1.1.2 矩阵的加法与数量乘法

为了有效地处理不同矩阵之间的相互关系，我们来定义矩阵的代数运算. 首先对两个矩阵相等给予定义.

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，且各对应位置的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ ($i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n)，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如，若 $\begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & b \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ c & 3 \end{bmatrix}$，则必有 $a=1$，$b=2$，$c=2$.

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，令

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和. 其中，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$.

注意：只有同型矩阵才能相加，同型矩阵之和与原矩阵仍是同型矩阵.

加法运算满足：

(1) **交换律**：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) **结合律**：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(3) **零矩阵的特性**：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. 其中，$\boldsymbol{A}$ 为与零矩阵同型的任意矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$，$-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

(4) **存在负矩阵** $-\boldsymbol{A}$，满足 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

以上性质很容易由定义直接验证. 利用性质 (4)，可定义矩阵的减法为

$$A-B=A+(-B).$$

例如，若 $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$，则

$$A+B=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&2&0\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}1&4&0\\-3&2&2\end{pmatrix}.$$

定义 1.7 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，λ 为一实数或复数，规定

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\cdots&\lambda a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{bmatrix},$$

称此矩阵为数 λ 和矩阵 A 的**数量乘积**，简称为矩阵的**数乘**.

矩阵的数量乘法满足下列运算规律：

(1) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

(2) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

(3) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$.

(4) $1\cdot A=A$，$0\cdot A=O$.

其中 λ，μ 为任何实数，A，B 为同型矩阵.

矩阵的加法与矩阵的数乘统称为矩阵的线性运算.

矩阵的线性运算与函数的线性运算有相似之处，零矩阵扮演着数零的角色，负矩阵扮演着相反数的角色.

【例 1.4】 设 $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使得 $4A+2X=B$.

解 $2X=B-4A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&12&4\\-4&8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-13&-3\\6&-8&-5\end{pmatrix},$$

从而 $$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-7&-13&-3\\6&-8&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/2&-13/2&-3/2\\3&-4&-5/2\end{pmatrix}.$$

1.1.3 矩阵与矩阵的乘法

矩阵的乘法定义来源于研究线性变换的需要.

定义 1.8 n 个变量 x_1，x_2，…，x_n 与 m 个变量 y_1，y_2，…，y_m 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

称为一个从变量 x_1，x_2，…，x_n 到变量 y_1，y_2，…，y_m 的线性变换．这里，a_{ij} 为常数；$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性变换的系数矩阵.

显然，线性变换由其系数矩阵唯一确定.

关系式
$$\sigma_{xy}:\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$

是从变量 x_1，x_2，x_3 到变量 y_1，y_2 的线性变换，其系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

关系式
$$\sigma_{tx}:\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases}$$

是从变量 t_1，t_2 到变量 x_1，x_2，x_3 的线性变换，其系数矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$.

将 σ_{tx} 代入 σ_{xy}，得到从变量 t_1，t_2 到变量 y_1，y_2 的线性变换 $\sigma_{ty}:\begin{cases} y_1 = c_{11}t_1 + c_{12}t_2 \\ y_2 = c_{21}t_1 + c_{22}t_2 \end{cases}$，其系数矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$．容易验证

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

在代数学中，我们将变换 σ_{ty} 称为变换 σ_{xy} 与变换 σ_{tx} 的乘积．由此，将矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

下面推广到一般情况.

定义 1.9 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$，以 $\boldsymbol{AB}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，它是一个 $m\times n$ 矩阵，其第 i 行、第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 p 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应的 p 个元素分别相乘的乘积之和．即若记 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{AB}$，则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

由定义看出：只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义．否则，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不可乘．可见，**不是任意两个矩阵都可相乘.**

【例 1.5】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3\times2+2\times(-1) & 3\times(-1)+2\times2 & 3\times1+2\times2\\ -2\times2+3\times(-1) & -2\times(-1)+3\times2 & -2\times1+3\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 1 & 7\\ -7 & 8 & 4\end{pmatrix}.$$

但 $\boldsymbol{BA}$ 是没有意义的.

【例 1.6】 设 $\boldsymbol{A}=(2\quad 3\quad 0\quad -5)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.5\\ -2\\ 4.5\\ -3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 按定义，一个 1×4 行矩阵与一个 4×1 列矩阵的乘积是一个一阶方阵. 运算结果是一阶方阵时，可将它看成一个数，不用加括号.

$$\boldsymbol{AB}=(2\quad 3\quad 0\quad -5)\begin{bmatrix}0.5\\ -2\\ 4.5\\ -3\end{bmatrix}=10,$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0.5\\ -2\\ 4.5\\ -3\end{bmatrix}(2\quad 3\quad 0\quad -5)=\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 0 & -2.5\\ -4 & -6 & 0 & 10\\ 9 & 13.5 & 0 & -22.5\\ -6 & -9 & 0 & 15\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{AB}$ 是一个数，$\boldsymbol{BA}$ 是一个四阶方阵，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不是同型矩阵，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

【例 1.7】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -b\\ a & -b\end{pmatrix}$，$a\neq0$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a & -b\\ a & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -b\\ a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab & -2b^2\\ 2a^2 & -2ab\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 是同阶方阵，但 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

由例 1.5～例 1.7 可看出，矩阵乘法与数的乘法的区别有以下几点：

(1) 矩阵乘法不满足交换律. 即一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换. 易证，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 必是同阶方阵.

(2) 由矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

换句话说：$A\neq O$，$B\neq O$，可能会有 $AB=O$.（如例 1.7）

(3) 矩阵乘法不满足消去律. 即由 $AB=AC$，$A\neq O$，不能导出 $B=C$.

矩阵乘法亦具有与数的乘法相似的性质，满足结合律、分配律.

性质 1　$(AB)C=A(BC)$.

性质 2　$(A+B)C=AC+BC$.

$C(A+B)=CA+CB$.

性质 3　$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$，其中 λ 是数.

性质 4　$E_m A_{m\times n}=A_{m\times n}$，$A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$.

$O_{p\times m}A_{m\times n}=O_{p\times n}$，$A_{m\times n}O_{n\times s}=O_{m\times s}$.

这里只给出性质 1 的证明，性质 2～性质 4 的证明留给读者作练习.

证（性质 1） 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{p\times q}$，则

$$AB=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right]_{m\times p},\ BC=\left[\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj}\right]_{n\times q}.$$

从而

$$\begin{aligned}(AB)C&=\left[\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}\right]_{m\times q}=\left[\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right]_{m\times q}\\&=\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right]_{m\times q}\\&=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj}\right)\right]_{m\times q}=A(BC).\end{aligned}$$

性质 4 说明，单位阵与零矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数 1 与数 0 在数的乘法中的作用.

矩阵乘法使线性方程组与线性变换的表示变得异常简洁.

例如，给定线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

设
$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}.$$

利用矩阵的乘法，上述方程组可记作 $Ax=b$.

对于线性变换