电动力学习题解答

组栋林 编著

清华大学出版社

内容简介

《电动力学习题解答》是与作者编著的《电动力学》(清华大学出版社，2006)中的习题配套的教学参考书，各章的顺序以及习题编号都与主教材一致。书中包括了主教材中全部习题的解答，有些习题的解答还包含了几种不同的解法和讨论。

本书作为《电动力学》的辅助教材，既可供主讲教师和辅导教师参考，也可供学生在课程复习阶段或研究生的备考阶段参考。

图书在版编目(CIP)数据

电动力学习题解答/俎栋林编著．—北京：清华大学出版社，2006.12

ISBN 7-302-12966-5

Ⅰ.电…　Ⅱ.俎…　Ⅲ.电动力学—高等学校—解题　Ⅳ.O442-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 047081 号

责任编辑：朱红莲　赵从棉

责任校对：焦丽丽

责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544

投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969

印 刷 者：北京季蜂印刷有限公司

装 订 者：北京国马印刷厂

经　　销：全国新华书店

开　　本：175×245　**印　张**：7.75　**字　数**：149 千字

版　　次：2006 年 12 月第 1 版　**印　次**：2006 年 12 月第 1 次印刷

印　　数：1～3000

定　　价：14.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177 转 3103　　产品编号：018893-01

前　言

这本《电动力学习题解答》是与作者编著的《电动力学》教科书中的习题配套的，各章习题的题目序号都一致。主要提供给教师作参考用。电动力学是一门很有难度的理论课，要理解和掌握其基本理论和处理问题的方法，不做习题是不可想像的。因此，随课程进度需要布置足量的习题进行训练。这样教师批改作业的工作就十分繁重，有这样一本参考解答会方便得多，对主讲教师也大有裨益。

对于初学电动力学的本科生来说，训练独立思考、独立分析、独立解答问题的能力是至关重要的。同学们应当自觉地训练自己，独立完成教师布置的作业。对于布置的习题，应当尽可能地独立做出。否则，就失去了习题训练的意义。在自己做过习题的基础上，或在课程复习阶段，或考研究生的准备阶段，用这本习题解答对照一下自己的解答是有益的。这本习题解答中，比较注重物理上的分析和数学演算，有些题目给出了不同的解法，甚至几种解法，有些题解后附有一些比较实际的讨论。

选择的题目中有许多可以说是很经典的，即主流教科书中大都采用的。另外借此机会参考和选用了一部分历年本科生课程考试和研究生入学考试所用的典型题目以及自己多年在工作中积累的题目。由于作者水平有限，书中可能存在某些问题，敬请各位教师和同学批评指正。

作　者

2006 年 3 月于北京大学物理学院

目 录

数学知识——矢量分析

0.1 根据算符$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$的定义，设$\phi$和$\boldsymbol{A}$为$x,y,z$的连续可微函数，求证：$\nabla\times\nabla\phi=\boldsymbol{0}$，$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$。

证明

$$\nabla\times\nabla\phi=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\quad(令\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}P+\boldsymbol{j}Q+\boldsymbol{k}R)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$$

0.2 根据算符∇具有微分、矢量运算的两重性及这两种运算规则，证明以下各式：

① $\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$

② $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

③ $\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})=\nabla\phi\times\boldsymbol{A}+\phi\nabla\times\boldsymbol{A}$

④ $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

⑤ $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$

⑥ $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$

⑦ $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

证明 根据∇的微分及矢量运算的两重性，易证式①，②，③成立。式④：

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+\nabla_B(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})$$

式中∇_A只对$\boldsymbol{A}$作用，可以看成完全是矢量。于是：

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

两式相加可得到式④。同样方法易证知式⑤，⑥，⑦。

0.3 设$\mu=\mu(x,y,z)$，即μ是x,y,z的连续可微函数，求证：$\nabla f(\mu)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mu}\nabla\mu$；$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\mu)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}\mu}\cdot\nabla\mu$；$\nabla\times\boldsymbol{A}(\mu)=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}\mu}\times\nabla\mu$。

证明 $\nabla f(\mu)=\frac{\partial f(\mu)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f(\mu)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f(\mu)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$=\frac{\mathrm{d}f(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}f(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}f(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\frac{\partial\mu}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}f(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\nabla\mu$$

类似地可证明余下的两式。

0.4 求证下列各式：

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3,\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r=\frac{2}{r}$；　　(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0},\nabla\times\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{0}$；

(3) $\nabla r=\boldsymbol{e}_r,\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$；　　(4) $\nabla f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$；

(5) $\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$；

(6) $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{r}[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)]=\frac{\boldsymbol{a}_\perp}{r}$（$\boldsymbol{a}$为常矢量）。

式中$\boldsymbol{r}$是空间中任一点相对于坐标原点的矢径，$r=|\boldsymbol{r}|$；$\boldsymbol{e}_r$是单位矢量，$\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$。

证明 (1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$；$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$，第一项

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{1}{r^2}\left(r-x\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$=\frac{1}{r^2}\left(r-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{1}{r^2}\left(r-\frac{x^2}{r}\right)$$

因此，$\nabla\cdot\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{r^2}\left(3r-\frac{x^2+y^2+z^2}{r}\right)=\frac{2r}{r^2}=\frac{2}{r}$。

(2) $$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

（x,y,z 是独立变量）

$$\nabla\times\boldsymbol{e}_r=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} & \dfrac{z}{r}\end{vmatrix}=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r}\right)\right]\boldsymbol{i}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r}\right)\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r}\right)\right]\boldsymbol{k}$$

先看上式右端第一个分量：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{z}{r^2}\left(-\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\frac{y}{r^2}\left(-\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{z}{r^2}\,\frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{y}{r^2}\,\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

同样可证明第二、三个分量等于零。所以$\nabla\times\boldsymbol{e}_r=0$。

(3) $\nabla r=\dfrac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}=\dfrac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{e}_r$

$$\nabla\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla r=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

（这里利用了 0.3 题的第 1 式）

(4) $\nabla f(r)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\nabla r=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$

(5) 当 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\nabla^2\dfrac{1}{r}=\nabla\cdot\nabla\dfrac{1}{r}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{z}{r^3}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\frac{1}{r^6}\left(-r^3+x\frac{\partial}{\partial x}r^3\right)=\frac{1}{r^6}\left(r^3+3xr^2\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r^6}(-r^3+3x^2r)$$

因此

$$\nabla^2\frac{1}{r}=\frac{1}{r^6}[-3r^3+3(x^2+y^2+z^2)r]=\frac{1}{r^6}(-3r^3+3r^3)=0$$

对于 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 的点，以该点为中心作一个半径为 ε（无穷小量）的小球面，对小球体积积分：$\displaystyle\int\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V=\int\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}V=\oiint\boldsymbol{n}\cdot\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}S=-\oiint\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S=-4\pi$。综合以上两种情况，有$\displaystyle\int\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V=\begin{cases}-4\pi & (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0})\\ 0 & (\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0})\end{cases}$，比较$\displaystyle\int\delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=\begin{cases}1 & (\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0})\\ 0 & (\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0})\end{cases}$，可以判断$\nabla^2\dfrac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$。

(6) 由 0.2 题式④可知

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)-(\boldsymbol{e}_r\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{e}_r)-\boldsymbol{e}_r\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 是常矢量，所以$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\nabla\boldsymbol{a}=0$；又由于$\nabla\times\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{0}$，因此后三式为零。于

是有

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)=\nabla\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right)\boldsymbol{k}$$

先看上式右端第一个分量(令 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$)：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3z}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\left(a_1r-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{1}{r^2}\left[a_1r-\frac{x}{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\right]$$

因此

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{r^2}\left[(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})r-\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right]=\frac{1}{r}[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r)]=\frac{\boldsymbol{a}_\perp}{r}$$

0.5 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{k}$ 均为常矢量，$\boldsymbol{r}$ 为矢径，求：

$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$，$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$，$\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$，$\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$，$\nabla\cdot f(r)\boldsymbol{r}$，$\nabla\times f(r)\boldsymbol{r}$，$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$，$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$，$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$。

解 注意到所有常矢量的梯度、散度和旋度都等于零，不难求出以下各式。

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{r})=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}$$

$$\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0+(\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

$$=\boldsymbol{E}_0\cdot\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

$$\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}_0+\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\times\boldsymbol{E}_0$$

$$=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

$$\nabla\cdot f(r)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(r)+f(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{r}\cdot\nabla r+3f(r)=r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}+3f(r)$$

$$\nabla\times f(r)\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}\times\nabla f(r)+f(r)\nabla\times\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}=\boldsymbol{0}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{r}=0$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\nabla\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$$

$$=\boldsymbol{a}\nabla\cdot\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$$

0.6 已知 $\boldsymbol{m}$ 为常矢量，$\boldsymbol{r}$ 为矢径，试证明：$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\nabla\left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)(r\neq0)$。

证明

证法一 $\nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}\nabla\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})+\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})$

$$=\frac{1}{r^3}[\boldsymbol{m}(\nabla\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}]+\left(-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}\right)\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})$$

$$=\frac{3\boldsymbol{m}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{m}}{r^3}-\left[\frac{1}{r^5}\boldsymbol{m}(3\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{r}}{r^5}\right]$$

$$=-\frac{\boldsymbol{m}}{r^3}+\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}=-\nabla\left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)。$$

证法二　$\nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\boldsymbol{m}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\nabla\cdot\boldsymbol{m}+\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{m}-(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

由于 $r\neq0$，因此$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}=0$；$\boldsymbol{m}$ 是常矢量，故中间两项为零。因此

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla\left(\boldsymbol{m}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\nabla\left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$$

0.7　设 ϕ，ψ 和 $\boldsymbol{A}$ 都是 x,y,z 的连续可微函数，S 是包围体积 V 的边界面，$\boldsymbol{n}$ 是面元 $\mathrm{d}S$ 的外法线方向单位矢量。求证：

(1) $\int_V(\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V=\oiint_S\phi\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi\mathrm{d}S$；

(2) $\int_V(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}V=\oiint_S(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$；

(3) $\int_V\nabla\phi\mathrm{d}V=\oiint_S\boldsymbol{n}\phi\mathrm{d}S$；

(4) $\int_V\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oiint_S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$；

(5) $\int_V(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oiint_S(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$　（$\boldsymbol{a}$ 是常矢量）。

证明　(1) 因为 $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi$，根据高斯定理 $\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oiint_S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$，因此

$$\int_V(\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\mathrm{d}V$$

$$=\oiint_S\boldsymbol{n}\cdot(\phi\nabla\psi)\mathrm{d}S=\oiint_S\phi\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi\mathrm{d}S$$

(2) 因为$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)=\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi-\nabla\phi\cdot\nabla\psi-\psi\nabla^2\phi=\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi$，因此

$$\int_V(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\mathrm{d}V$$

$$=\oiint_S(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

(3) 左端点乘任意常矢量 $\boldsymbol{c}$ 得

$$\boldsymbol{c}\cdot\int_V \nabla\phi \mathrm{d}V=\int_V(\boldsymbol{c}\cdot\nabla\phi)\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{c}\phi)\mathrm{d}V$$
$$=\oint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}\phi\mathrm{d}S=\boldsymbol{c}\cdot\oint_S \boldsymbol{n}\phi\mathrm{d}S$$

由于 $\boldsymbol{c}$ 是任意常矢量,因此

$$\int_V\nabla\phi\mathrm{d}V=\oint_S \boldsymbol{n}\phi\mathrm{d}S$$

(4) 右端点乘任意常矢量 $\boldsymbol{c}$ 得

$$\boldsymbol{c}\cdot\oint_S \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S=\oint_S \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S=\oint_S \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c})\mathrm{d}S$$
$$=\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c})\mathrm{d}V=\int_V\boldsymbol{c}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\boldsymbol{c}\cdot\int_V\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

由于 $\boldsymbol{c}$ 是任意常矢量,因此

$$\int_V\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oint_S \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$$

(5) 左端点乘任意常矢量 $\boldsymbol{c}$ 得

$$\boldsymbol{c}\cdot\int_V(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\int_V\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\int_V\boldsymbol{a}\cdot\nabla(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$$
$$=\int_V\nabla\cdot[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{A})]\mathrm{d}V=\oint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}S$$
$$=\boldsymbol{c}\cdot\oint_S(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$$

由于 $\boldsymbol{c}$ 是任意常矢量,因此

$$\int_V(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oint_S(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$$

0.8 已知 $\overleftrightarrow{\mathscr{F}}=\varepsilon_0\left(\boldsymbol{EE}-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right)$,$\overleftrightarrow{I}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$,求证:

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{F}}=\varepsilon_0[\boldsymbol{E}\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]$$

证明 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{F}}=\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\boldsymbol{EE}-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right)$

$$=\varepsilon_0\left[\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\cdot\nabla E^2\right]$$
$$=\varepsilon_0\left[\boldsymbol{E}\nabla\cdot\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\right]$$
$$=\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{E}\nabla\cdot\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\cdot 2[(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]\right\}$$
$$=\varepsilon_0[\boldsymbol{E}\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]$$

第 1 章 静 电 场

1.1 一块介质极化后，在撤销外场后可以把极化保存下来，称为"驻极体"。设其极化强度矢量为 $\boldsymbol{P}(x',y',z')$，根据偶极子静电势公式，此介质产生的静电势可表示为 $\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$；另一方面，根据极化电荷公式 $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 和 $\sigma_p=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}$，电势又可表示为 $\phi=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V\dfrac{\nabla\cdot\boldsymbol{P}}{r}\mathrm{d}V'+\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S\dfrac{\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{r}$。试用矢量分析方法证明上述两式是等价的。

证明 依题意，由 $\boldsymbol{P}(x',y',z')$，应该有 $\rho_p=-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}$，则

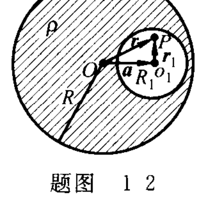
$$
\begin{aligned}
\phi&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{r}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S\frac{\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{r}\\
&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{r}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{r}\mathrm{d}V'\\
&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{r}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\left[\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\frac{1}{r}\right]\mathrm{d}V'\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\boldsymbol{P}\cdot\left(-\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\boldsymbol{P}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V'
\end{aligned}
$$

1.2 在半径为 R、体电荷密度为 ρ 的均匀带电球体内部，挖掉一个半径为 R_1 的球形空腔，空腔的中心 O_1 与带电体球心 O 的距离为 $a(R_1+a<R)$。求空腔内的电场强度。

解 如题图 1.2 所示，为求得空腔中任意一点 P 的电场强度，可设法应用电场叠加原理，设想先把空腔补正电荷密度 ρ，然后再使空腔带负电荷密度。对空腔来说总的电荷密度仍为零。这样空腔内的场等于电荷密度为 ρ 的大实心球和电荷密度为 $-\rho$ 的小实心球产生的场的叠加。大实心球在体内产生的电场为

$$\boldsymbol{E}(r)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$$

小实心球在体内产生的电场为



题图 1 2

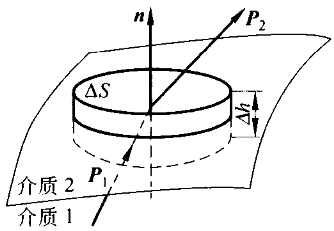
$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1)=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_1$$

因此,空腔内的电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_1)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$

结论:腔内电场是与 OO_1 平行的均匀场。

1.3 试从极化电荷公式的积分形式 $Q_p=-\oint\!\!\oint \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 出发,证明两种介质分界面上极化电荷面密度为 $\sigma_p=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)$。



题图 1.3

证明 作高斯柱面如题图 1.3 所示,底面 ΔS 为一阶小量,使得在 ΔS 范围内,极化矢量是均匀的;同时使两个底面的间距尽可能小,为高阶小量,只要能使界面上的极化电荷包在高斯面内即可。这样,电极化矢量在侧面的通量就可以忽略。因此,高斯面内极化电荷

$$Q_p=-\oint\!\!\oint \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}=-[-\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{n}]\Delta S$$

分界面上极化电荷

$$\sigma_p=\frac{Q_p}{\Delta S}=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)$$

1.4 一个内半径为 a、外半径为 b 的均匀带电球壳,带电量为 Q,求全空间的电位分布和电场分布。

解 球壳中电荷密度 $\rho=\dfrac{3Q}{4\pi(b^3-a^3)}$,利用高斯定理,不难得到电场分布为

$$\boldsymbol{E}(r)=\begin{cases}\mathbf{0} & (r\leqslant a)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}\left(r-\dfrac{a^3}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_r & (a\leqslant r\leqslant b)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & (r\geqslant b)\end{cases}$$

电位分布:在 $r>b$ 区域,

$$\phi(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

在 $a\leqslant r\leqslant b$ 区域,

$$\phi(r)=\int_r^{\infty}E\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}\left[\int_r^b\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r+\int_b^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\right]$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{a^3}{r}\right)\Bigg|_r^b+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

电动力学习题解答

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{r^2}{2}+\frac{a^3}{b}-\frac{a^3}{r}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

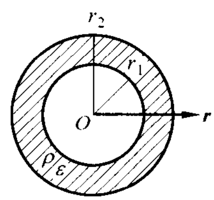
$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}\left(3b^2-r^2-\frac{2a^3}{r}\right)$$

在 $r<a$ 区域，是等位空间，则有

$$\phi(r)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}\left(3b^2-r^2-\frac{2a^3}{r}\right)\bigg|_{r=a}$$

$$=\frac{3Q(b^2-a^2)}{8\pi\varepsilon_0(b^3-a^3)}=\frac{3Q(b+a)}{8\pi\varepsilon_0(b^2+ab+a^2)}$$

1.5 有一介电常数为 ε 的空心介质球壳，其内、外半径分别为 r_1 和 r_2，球壳中均匀带电，体电荷密度为 ρ。试求：(1)全空间的电场分布；(2)球壳内体束缚电荷密度；(3)球壳内、外表面上的面束缚电荷密度。



题图 1.5

解 (1) 由电荷分布的对称性可知电场分布也是球对称的，电场沿径向(题图 1.5)。用高斯定理：

在 $r<r_1$ 的球形体积内：$4\pi r^2E(r)=\int_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}V=0$，得到 $E(r)=0$；在 $r_1<r<r_2$ 的球壳体积内：$\oiint \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=4\pi r^2D(r)=\int_{r_1}^{r}\rho 4\pi r^2\mathrm{d}r$，于是得

$$D(r)=\frac{\rho r}{3}\left[1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]$$

$$E(r)=\frac{D(r)}{\varepsilon}=\frac{\rho r}{3\varepsilon}\left[1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]$$

在 $r>r_2$ 的球形外域：

$$4\pi r^2E(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\rho 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\rho\,\frac{1}{3}(r_2^3-r_1^3)$$

$$E(r)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}(r_2^3-r_1^3)$$

式中 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$，写在一起：

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\boldsymbol{0} & (r<r_1)\\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon}\left[1-\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^3\right]\boldsymbol{r} & (r_1<r<r_2)\\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_2^3-r_1^3)\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} & (r>r_2)\end{cases}$$

(2) $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{\rho}{3\varepsilon}\left[1-\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^3\right]\boldsymbol{r}$

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{3\varepsilon}\rho\left\{\boldsymbol{r}\cdot\nabla\left[1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right]+\left[\left(1-\frac{r_1}{r}\right)^3\right]\nabla\cdot\boldsymbol{r}\right\}$$

$$=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho\left[\frac{3r_1^3}{r^3}+3\left(1-\frac{r_1^3}{r^3}\right)\right]=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho$$

(3) 内表面

$$\sigma_p=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\,|_{r=r_1}=-\boldsymbol{n}\cdot[(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{0}]\,|_{r=r_1}$$

$$=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{3\varepsilon}\rho\left(1-\frac{r_1^3}{r_1^3}\right)r_1=0$$

外表面：

$$\sigma_p=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\,|_{r=r_2}=-\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{0}-(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}]\,|_{r=r_2}$$

$$=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho\left(1-\frac{r_1^3}{r_2^3}\right)r_2$$

（验算：总的体内极化电荷和外表面总极化电荷的代数和等于零。）

1.6 有一点电荷 q 位于某一直线上，从该直线幅向地展开三个半无限大平面，这三个面形成的三个二面角分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\pi)$。每个二面角内充满一种均匀介质，其介电常数分别为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$。试分析空间的极化电荷分布，并求电场强度和电感应强度分布。

解 如题图 1.6 所示，观察点矢径为 $\boldsymbol{r}$，由于是点电荷，电场 $\boldsymbol{E}(r)$、电位移 $\boldsymbol{D}(r)$ 总是沿径向。作一个球形高斯面，对电位移 $\boldsymbol{D}(r)$ 应用高斯定理，得

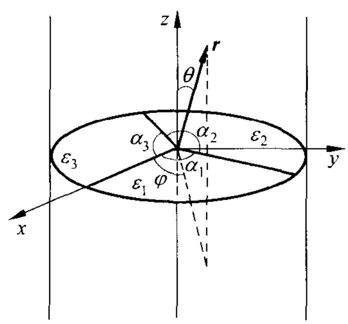
$$2r^2(\alpha_1D_1+\alpha_2D_2+\alpha_3D_3)=q$$

将 $\boldsymbol{D}_i=\varepsilon_i\boldsymbol{E}(i=1,2,3)$ 代入上式得

$$2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)E(\boldsymbol{r})r^2=q$$

于是得到电场分布为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$



题图 1.6

各介质内极化强度矢量为

$$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{D}_i-\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon_i-\varepsilon_0)\frac{q}{2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

极化电荷分布

$$\rho_{pi}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}_i=\frac{-(\varepsilon_i-\varepsilon_0)q}{2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{-(\varepsilon_i-\varepsilon_0)q}{2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)}\delta(r)$$

式中 δ 函数为

$$\delta(r)=\begin{cases}0 & (r\neq 0)\\ \infty & (r=0)\end{cases}$$

其物理意义是：在原点的点电荷 q 周围有一层极化束缚电荷。其体密度是 δ 函数，在三个不同介质区域 ρ_p 不相同，总体仍是点电荷。对 ρ_{pi} 积分可得到总极化

电荷

$$q_p = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\varepsilon_0 q}{2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)}\int_0^{\pi}\int_0^{\varepsilon}\delta(r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\left[\int_0^{\alpha_1}\mathrm{d}\varphi+\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{d}\varphi+\int_{\alpha_1+\alpha_2}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right]\right.$$

$$\left.-\frac{q}{2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)}\int_0^{\pi}\int_0^{\varepsilon}\delta(r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\left[\int_0^{\alpha_1}\varepsilon_1\mathrm{d}\varphi+\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2}\varepsilon_2\mathrm{d}\varphi+\int_{\alpha_1+\alpha_2}^{2\pi}\varepsilon_3\mathrm{d}\varphi\right]\right\}$$

$$=\left(\frac{2\pi\varepsilon_0}{\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3}-1\right)q=-\frac{(\varepsilon_{r1}-1)\alpha_1+(\varepsilon_{r2}-1)\alpha_2+(\varepsilon_{r3}-1)\alpha_3}{\varepsilon_{r1}\alpha_1+\varepsilon_{r2}\alpha_2+\varepsilon_{r3}\alpha_3}q$$

式中 $\varepsilon_{ri}(i=1,2,3)$ 是相对介电常数。极化电荷与原电荷 q 的符号相反，对 q 起一定屏蔽作用，使介质内的场降低。根据电荷守恒，可认为等量的 $+q_p$ 在无穷远处，其他地方没有极化电荷。

求原点附近总极化电荷的一个简便方法是令

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{q+q'}{\varepsilon_0}$$

即

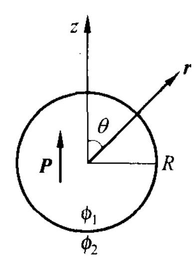
$$\frac{q}{2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)}\cdot 4\pi=\frac{q+q'}{\varepsilon_0}$$

于是得

$$q'=\left(\frac{2\pi\varepsilon_0}{\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3}-1\right)q$$

1.7 一个半径为 R、均匀极化的介质球，设其极化强度为 $\boldsymbol{P}$，求电势及电场强度。

解 取坐标系如题图 1.7 所示。设球内电势为 ϕ_1，球外电势为 ϕ_2，球内 $\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{P}$，球外 $\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_2$，在球面上无自由电荷，边值关系是 $E_{2t}=E_{1t}$，$D_{2n}=D_{1n}$。球内、外皆无自由电荷，电势满足拉普拉斯方程，物理问题转化为边值问题如下：



题图 1.7

$$\begin{cases}\nabla^2\phi=0\\ \phi_1\big|_{r=0}=\text{有界}\\ \phi_2\big|_{r=\infty}=0\\ \phi_1\big|_{r=R}=\phi_2\big|_{r=R}\\ \left(\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}-\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R}=-\dfrac{P}{\varepsilon_0}\cos\theta\end{cases}$$

由边界条件定出形式解为

$$\begin{cases}\phi_1=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) & (r\leqslant R)\\ \phi_2=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta) & (r>R)\end{cases}$$

代入边值关系得

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^{-l-1} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \\ \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-l-1) B_l R^{-l-2} \mathrm{P}_l(\cos\theta) + \dfrac{P\cos\theta}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

根据勒让德函数的正交性,有

$$l \neq 1: \begin{cases} A_l R^l = B_l R^{-l-1} \\ l A_l R^{l-1} = -(l+1) B_l R^{-l-2} \end{cases} \Rightarrow A_l = B_l = 0$$

$l=1$: $\begin{cases} \phi_1 = A_1 r\cos\theta \\ \phi_2 = B_1 r^{-2}\cos\theta \end{cases}$,代入边值关系得

$$\begin{cases} A_1 R = B_1 R^{-2} \\ A_1 + 2B_1 R^{-3} = \dfrac{P}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{P}{3\varepsilon_0} \\ B_1 = \dfrac{P}{3\varepsilon_0} R^3 \end{cases}$$

电势分布为

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{P}{3\varepsilon_0} r\cos\theta = \dfrac{1}{3\varepsilon_0} \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r} & (r \leqslant R) \\ \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3} \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r} & (r > R) \end{cases}$$

球内电场:$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla\phi_1 = -\dfrac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \quad (r \leqslant R)$,是均匀场

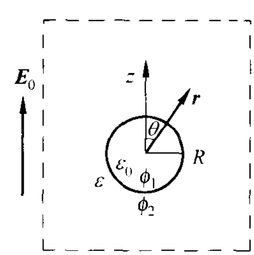
球外电场:$\boldsymbol{E}_2 = -\nabla\phi_2 = -\dfrac{R^3}{3\varepsilon_0}\nabla\left(\dfrac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \dfrac{\boldsymbol{P}}{r^3}\right] \quad (r > R)$

$\boldsymbol{E}_2$ 等于位于球心的电偶极矩为 $\boldsymbol{p} = \dfrac{4\pi R^3}{3}\boldsymbol{P}$ 的电偶极子在球外产生的电场。

1.8 在平板电容器的介质板中,如果有一个针孔,可以把介质看作无限大各向同性均匀介质,针孔可看作一个半径为 R 的球形空腔,设介质的介电常数为 ε,当无介质板时,电容器极板间电场可看作均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$。求空腔内、外的电势及电场强度。

解 如题图 1.8 所示,把此问题转化为边值问题如下:

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \phi_2|_{r=R} = \phi_1|_{r=R} \\ \varepsilon \dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}\Big|_{r=R} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}\Big|_{r=R} \\ \phi_1|_{r\to 0} = \text{有界} \\ \phi_2|_{r\to\infty} = -\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 r\cos\theta \end{cases}$$



题图 1.8

由边界条件写出其形式解为

$$\begin{cases}\phi_1 = \sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) & (r \leqslant R) \\ \phi_2 = \sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 r \cos\theta & (r > R)\end{cases}$$

根据勒让德函数的正交性，当 $l \neq 1$ 时，$a_l = b_l = 0$。当 $l = 1$ 时，代入边值关系得

$$\begin{cases} a_1 R = b_1 R^{-2} - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 R \\ \varepsilon_0 a_1 = -2\varepsilon b_1 R^{-3} - \varepsilon_0 E_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \\ b_1 = -\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon(2\varepsilon + \varepsilon_0)} R^3 E_0 \end{cases}$$

电位分布为

$$\phi = \begin{cases} -\dfrac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 r \cos\theta = -\dfrac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r} & (r \leqslant R) \\ -\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon(2\varepsilon + \varepsilon_0)} \dfrac{R^3}{r^2} E_0 \cos\theta - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 r \cos\theta & (r > R) \end{cases}$$

电场分布：$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla\phi_1 = \dfrac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \boldsymbol{E}_0 (r \leqslant R)$，是均匀场；

$$\boldsymbol{E}_2 = -\nabla\phi_2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \boldsymbol{E}_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon(2\varepsilon + \varepsilon_0)} R^3 \left[\frac{\boldsymbol{E}_0}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}\right] \quad (r > R)$$

1.9 试论证静电场的标势在没有电荷的地方不可能取极值，极值只可能取在有电荷的地方。

论证 静电场的势满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad ①$$

在没有电荷的地方，$\rho = 0$，静电场的势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad ②$$

如果 ϕ 取极大值，则 $\nabla\phi = \mathbf{0}$，$\nabla^2\phi < 0$，即电标势 ϕ 不满足式②，而满足式①；如果 ϕ 取极小值，则 $\nabla\phi = \mathbf{0}$，$\nabla^2\phi > 0$，即电标势 ϕ 也不满足式②，而满足式①。这就证明了静电场的标势在没有电荷的地方不可能取极值，通常说满足拉普拉斯方程的场是“调和场”，极值只可能取在有场源的地方。

1.10 两个无限大平行导体平面分别位于 $z=0$ 和 $z=d$ 处，$z=0$ 处导体面接地，$z=d$ 处导体面电位为 ϕ_0，两个导体面之间充满电荷，电荷密度满足 $\rho(z) = \rho_0\left(\dfrac{z}{d}\right)^2$，$\rho_0$ 为常数。试求两个导体面之间区域（$0 < z < d$）内的电势和电场强度分布。