

学习新坐标书系

思维竞技

高二·数学



SIWEI JINGJI

依据 2001 年新教材编写；创设基础思路训练、创新拓展训练、综合开放训练等思维竞技平台；培养思维和实践应用能力。

吉林教育出版社

思维竞技

□选题策划	李 静	周卫国	徐 谦
□市场策划	于 辉	尹英俊	陈 忱
□丛书编委	张希濂	司元举	郭奕津
	马宝昌	赵大川	高立东
	李艳芳	赵 忱	侯 艳
	崔素月	向 虹	王曾仪
	孔令博	周淑萍	王 莹

前言

根据新的教育改革和考试改革的要求，我们于2000年7月曾出版了《创新思维》系列丛书。该套书出版后社会反响十分强烈，很多读者纷纷来信，称赞我们为广大师生出版了一套高质量、颇具创新意识的教辅图书。这套书虽经历了不到一年的时间，却已成为国内的名牌教辅图书。

师生们的鼓励和赞扬，是对我们最大的鞭策。根据广大师生的要求，我们依据最新修订的教学大纲和教材，我们又策划出版了这套科学性、实效性、应战性较强的《思维竞技》书系，与《创新思维》相配套。

《创新思维》重在给学生以思路、方法、技巧、规律的指导；《思维竞技》则重在以各种灵活、多变、综合的题型强化训练学生的思维能力和实践应用能力。

关于培养能力，2001年新的教学大纲和教材都提出了特殊的要求。总的说来，有这些方面的能力：观察能力、实验能力、运算能力、自学能力、处理科学信息能力、探究能力、综合运用语言能力、分析和解决问题能力、思维能力等等。“思维能力是培养能力的核心”。学生在具体的学习实践中，是否能完成学习任务，是否能实现学习目标，很重要的是，要看自己的抽象与概括、分析与综合、推理与判断的思维能力如何。然而，思维能力的培养和提高，则需要大量的实践训练。



为了有助于学生的学习和思维能力的提高，我们为学生学习和考试——这些具有思维竞技性质和意义的学习实践活动，策划出版了这套《思维竞技》丛书。

在书中，我们大体上创设了三个层面上的思维竞技平台：（一）**基础思路训练**。这一部分是对学生掌握课堂知识情况的检验。这些知识是学生必须要牢固掌握，并能熟练运用的基础知识，是最基本的素质要求，就如同竞技前的热身活动，或是预赛。（二）**创新拓展训练**。我们把它视为竞技的开始。这一部分训练题的难度，相当于中、高考中的一般性难度的试题。训练明确，题量适中。在循序渐进的同时，也做到了适当的拓展和延伸。训练前有言简意赅的方法与技巧方面的指导。（三）**综合开放训练**。这一部分内容有一定难度。训练的难度系数加大，主要体现在训练题注重综合性、灵活性、实践性和开放性，具有参加“半决赛”和“决赛”的性质，闯过这一关，就等于踢好了临门一脚。中考和高考丢分的试题常常在这一部分中出现。这一部分的讲解较为详细、具体。比如，针对“高考3+x”中的综合题的跨学科的特点，常常指出某一学科的某一知识点与其他学科的哪一个知识点有可能进行结合等关键性问题。

在层面训练之后，都附有“答案与点拨”。它不是简单地给出“A、B、C”，而是告诉学生“为什么”。同时，对于关键环节或可能让学生“卡壳”的地方，进行及时地“点拨”。

思维竞技的平台，思维竞技的空间，创造了思维较量的场所和条件。如果你把各种考试看作是不同的思维竞技活动的话，也许会让你学习带来一些乐趣和几分轻松。

走上思维竞技的平台，获取知识，展示能力，满怀信心，冲上去！

我们相信你能做到！

目 录

代数部分

第五章 不等式	(1)
第一单元 不等式的性质及证明	(1)
第二单元 不等式的解法	(27)
第六章 数列 极限 数学归纳法	(48)
第一单元 数列	(48)
第二单元 极限	(71)
第三单元 数学归纳法	(87)
第八章 复数	(104)
第一单元 复数的概念	(104)
第二单元 复数的运算	(113)
第三单元 复数的三角形式	(131)
第九章 排列 组合 二项式定理	(152)
第一单元 排列与组合	(152)
第二单元 二项式定理	(162)

解析几何部分

第一章 直线	(176)
第一单元 有向线段、定比分点	(176)

第二单元	直线的方程	(193)
第三单元	两条直线的位置关系	(217)
第二章	圆锥曲线	(245)
第一单元	曲线和方程	(245)
第二单元	圆	(263)
第三单元	椭圆	(284)
第四单元	双曲线	(307)
第五单元	抛物线	(332)
第六单元	坐标变换	(354)
第三章	参数方程 极坐标	(371)
第一单元	参数方程	(371)
第二单元	极坐标	(384)



代数部分



第五章

不 等 式

第一单元 不等式的性质及证明

 基础思路训练

 竞技平台

一、选择题

1. 下列命题中, 正确的是 ()

A. 若 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, 则 $a > b$

B. 若 $a > b$, $c > d$, 则 $a - d > b - c$

C. 若 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

D. 若 $a > b > 0$, $ac > bd$, 则 $c > d$

2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a, b \neq 0$, 则在① $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, ② $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

≥ 2 , ③ $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, ④ $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ 这四个式子中, 恒成立的有

()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

3. 下列各函数中, 最小值为 2 的是

()

A. $y = x + \frac{1}{x}$

B. $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

C. $y = \log_a x + \log_x a (a > 0, x > 0, \text{且 } a \neq 1, x \neq 1)$

D. $y = 3^x + 3^{-x} (x > 0)$

4. 若 $a \in (0, \frac{\pi}{4})$, 则 $m = \log_{\sin a} \cos a$, $n = \log_{\cos a} \sin a$ 的大小关系是

()

- A. $m > n$ B. $m \leq n$ C. $m < n$ D. $m \geq n$

5. 若 $0 < a < 1$, 则下列不等式中不成立的是

()

A. $\log_a(1-a) > 0$

B. $\sin(1+a) < \sin(1-a)$

C. $\pi^{-(1+a)} < \pi^{a-1}$

D. $(1+a)^{\frac{3}{2}} > (1-a)^{\frac{3}{2}}$

6. 若 $a > b > 0$ 且 $a + b = 1$, 设 $A = \log_a b$, $B = \log_b a$, $C = \log(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})ab$, 则 A, B, C 的大小关系是

()

A. $A < B < C$

B. $B < A < C$

C. $B < C < A$

D. $C < B < A$

7. 若 $|a-c| < |b|$, 则有

()

A. $a < b+c$

B. $a > c-b$

C. $|a| > |b| - |c|$

D. $|a| < |b| + |c|$

8. 若 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 且满足 $x+4y=40$, 则 $\lg x + \lg y$ 的最大值是

()

A. 40

B. 10

C. 4

D. 2

9. 设 $P = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, $Q = \sqrt{ma+nc} \cdot \sqrt{\frac{b}{m} + \frac{d}{n}}$ (a, b, c, d ,



m, n 均为正), 则 P, Q 的大小关系是 ()

- A. $P \geq Q$ B. $P \leq Q$ C. $P > Q$ D. 大小无法确定

10. 设 $a^2 + b^2 = 1$, 且 $a \geq 0$, 则 $a + b$ 的取值范围是 ()

- A. $[0, \sqrt{2}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, \sqrt{2}]$ D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

二、填空题

11. 用不等号(“ $>$ ”或“ $<$ ”)填空:

(1) 若 $a \neq b$, 则 $a^2 + 3b^2$ _____ $2b(a + b)$

(2) 若 $c > 1$, 则 $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ _____ $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$

12. (1) 若 $x + 2y = 2\sqrt{2}a$ ($x > 0, y > 0, a > 1$), 则 $\log_a x + \log_a y$ 的最大值是_____.

(2) 若 $x > 0$, 则 $3x + \frac{12}{x^2}$ 的最小值是_____, 此时 $x =$ _____.

(3) 若 $0 < x < \frac{1}{3}$, 则 $x^2(1 - 3x)$ 的最大值是_____, 此时 $x =$ _____.

13. 若实数 a, b 满足 $ab > 0$, 则在① $|a + b| > |a|$, ② $|a + b| < |b|$, ③ $|a + b| < |a - b|$, ④ $|a + b| > |a - b|$ 这四个式子中, 正确的是_____.

14. 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 那么 $a + b, 2\sqrt{ab}, a^2 + b^2, 2ab$ 中最大的一个是_____.

15. 若 $xy > 0$ 且 $x^2 y = 2$, 则 $xy + x^2$ 的最小值等于_____.

三、解答题

16. 若 $0 < a < \pi$, 试比较 $2\sin 2a$ 与 $\operatorname{ctg} \frac{a}{2}$ 的大小, 并说明等号什么时候成立.

17. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 求证: $x^2 - xy + y^2 \geq x + y - 1$

18. 设 $a < b < c$, 求证: $b^2 c + c^2 a + a^2 b > bc^2 + ca^2 + ab^2$

19. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求证: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

20. 若 $a > 1$, 且 $a^{\lg b} = \sqrt[4]{2}$, 求 $\log_2 ab$ 的最小值.



21. 已知正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 求证: $(a + \frac{1}{a}) + (b + \frac{1}{b}) + (c + \frac{1}{c}) \geq 10$

22. 已知 $|a| < 1, |b| < 1$, 求证: $|\frac{a+b}{1+ab}| < 1$

■答案与点拨

一、选择题

1. D 2. C 3. B 4. C 5. B 6. D 7. D 8. D 9. B
10. C

二、填空题

11. (1) $>$, (2) $<$

12. (1) 2 (2) 9, 2 (3) $\frac{4}{243}, \frac{2}{9}$

13. ①, ④ 14. $a + b$ 15. 3

三、解答题

16. $2\sin 2\alpha \leq \cot \frac{\alpha}{2}$, 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时等号成立.

17. 提示: $x^2 - xy + y^2 - (x + y - 1) = x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y$
 $= \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2] \geq 0$

18. 提示: $b^2c + c^2a + a^2b - (bc^2 + ca^2 + ab^2) = (b^2c - bc^2) + (c^2a - ab^2) + (a^2b - ca^2) = (b - c)(b - a)(c - a) > 0$

19. 提示: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a + b + c)$

20. 提示: 由 $a^{ab} = \sqrt[ab]{2}$ 可得 $\lg a \cdot \lg b = \frac{1}{4} \lg 2$, 所以 $\log_2 ab = \frac{\lg ab}{\lg 2} = \frac{\lg a + \lg b}{\lg 2} \geq \frac{\sqrt{\lg a \cdot \lg b}}{\lg 2} = \frac{\sqrt{\lg 2}}{\lg 2}$, 当 $\lg a = \lg b = \frac{1}{2} \sqrt{\lg 2}$ 时等号成立.

21. 提示: $abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3 = \frac{1}{27}$, 则 $\frac{1}{abc} \geq 27$, 所以 $(a + \frac{1}{a}) + (b + \frac{1}{b}) + (c + \frac{1}{c}) = 1 + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 1 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geq 10$



$$\begin{aligned}
 22. \text{提示: } & \left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{1+ab} \right)^2 < 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2 \\
 & \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 < 0 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(1 - b^2) < 0
 \end{aligned}$$

创新拓展训练

训练指要

1. 能运用不等式的性质完成比较大小, 有关不等式内容的证明或计算.
2. 能熟练和恰当地应用重要不等式或其变形比较大小, 证明不等式.
3. 掌握用比较法、综合法、分析法证明不等式.
4. 能利用两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一重要定理及其中等号成立的条件求某些函数的最大值和最小值.

例1 已知 $a \geq b \geq c > 0$, 求证: $a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

△分析 由于不等式的两端都是乘积的形式, 可考虑用作商比较的方法.

$$\begin{aligned}
 \text{证明: } & \because \frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}} \\
 &= a^{2a-(b+c)}b^{2b-(c+a)}c^{2c-(a+b)} \\
 &= a^{(a-b)+(a-c)}b^{(b-c)+(b-a)}c^{(c-a)+(c-b)} \\
 &= \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}
 \end{aligned}$$

$$\text{又} \because a \geq b \geq c > 0$$

$$\therefore \frac{a}{b} \geq 1, \frac{b}{c} \geq 1, \frac{a}{c} \geq 1, a-b \geq 0, b-c \geq 0, a-c \geq 0$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geq 1$$

$$\text{即 } a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$$

说明: 作商比较也是比较法的常见类型: 若 $a, b > 0$, 则 $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a$



$> b$. 这种方法在证明指数、对数不等式时更为常用.

例2 设 $f(x) = x^2 + ax + b$, 求证: $|f(1)|$ 、 $|f(2)|$ 、 $|f(3)|$ 之中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

证明: 假设 $|f(1)| < \frac{1}{2}$, $|f(2)| < \frac{1}{2}$, $|f(3)| < \frac{1}{2}$.

$$\text{即 } \begin{cases} |f(1)| < \frac{1}{2} \\ |f(2)| < \frac{1}{2} \\ |f(3)| < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < a + b + 1 < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < 2a + b + 4 < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < 3a + b + 9 < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{matrix}$$

① + ③ 得

$$-1 < 4a + 2b + 10 < 1, \text{ 即 } -\frac{1}{2} < 2a + b + 5 < \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < 2a + b + 4 < -\frac{1}{2} \quad \text{④}$$

显然②与④互相矛盾

因此, 假设不成立.

故 $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$ 之中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

说明: 用直接法证明不等式困难时, 可考虑用间接法证明, 反证法是间接证法的一种.

例3 (1) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a^2 + b^2 \leq 1$, 求证: $|a^2 + 2ab - b^2| \leq \sqrt{2}$;

(2) 求函数 $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ 的最大、最小值, 并且求出与函数的最大值、最小值相对应的 x 值.

△解 (1) 令 $a = k \cos \theta$, $b = k \sin \theta$, 其中 $|k| \leq 1$

$$\therefore |a^2 + 2ab - b^2| = |k^2 \cos^2 \theta + 2k^2 \cos \theta \sin \theta - k^2 \sin^2 \theta|$$

$$= k^2 |\cos 2\theta + \sin 2\theta| = \sqrt{2} k^2 |\sin(2\theta + \frac{\pi}{4})| \leq \sqrt{2}$$

(2) 设 $x = \cos \theta$, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, 于是原函数可化为

$$y = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}), \text{ 而 } \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

$\therefore$ 当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 取到最大值 1

$\therefore y_{\text{最大}} = \sqrt{2}$, 此时 $x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

又当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, 即 $\theta = \pi$ 时, $\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 取到最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore y_{\text{最小}} = -1$, 此时 $x = \cos \pi = -1$.

说明: (1)三角换元是一种重要的数学方法, 把代数问题转化为三角函数问题, 利用三角函数的性质, 使问题得到证明.

(2)根据具体问题, 实施的换元方法有:

①若 $a^2 + b^2 = 1$, 可设 $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$

②若 $a^2 + b^2 \leq 1$, 可设 $a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$ ($0 \leq r \leq 1$)

③对于 $\sqrt{1-x^2}$, $\because |x| \leq 1$, 由 $|\cos \theta| \leq 1$ 或 $|\sin \theta| \leq 1$ 知可设 $x = \cos \theta$ 或 $x = \sin \theta$

④对于 $\sqrt{1+x^2}$, $\because x \in \mathbb{R}$, 可设 $x = \tan \theta$ 或 $x = \cot \theta$

⑤对于 $\sqrt{x^2-1}$, $\because |x| \geq 1$, 由 $|\sec \theta| \geq 1$ 或 $|\csc \theta| \geq 1$ 知可设 $x = \sec \theta$ 或 $x = \csc \theta$.

例 4 从半径为 R 的圆形铁片里剪去一个扇形, 然后把剩下部分卷成一个圆锥形漏斗, 要使漏斗有最大容积, 剪去扇形的圆心角应是多少弧度?

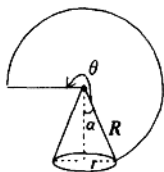
△解 如右图, 设圆锥形漏斗轴截面顶角为 2α , 底面半径为 r , 高为 h , 则 $r = R \sin \alpha$, $h = R \cos \alpha$, 于是

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi R^3}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$\text{令 } y = \sin^2 \alpha \cos \alpha > 0$$

$$\text{则 } y^2 = \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{3} \right)^3$$



$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

$$\text{于是 } r \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore V \leq \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi R^3, \text{ 当 } \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha, \text{ 即 } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 此时 } \theta$$

$$= \frac{r}{R} \cdot 2\pi = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$$

$\therefore$ 当剪去扇形的圆心角为 $2\pi(1 - \frac{\sqrt{6}}{3})$ 时, 所做漏斗的容积最大.

例 5 证明不等式

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{证明: } \because \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}}$$

$$\text{即 } 2(\sqrt{k-1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{则有 } 2(\sqrt{2}-1) < 1 < 2(\sqrt{1}-0)$$

$$2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$$

.....

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

将以上各式叠加得

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

说明: 本题使用的是证明不等式的另外一种常用的方法——放缩法, 它经常采用加项或减项的“添项”放缩, 拆项分组对比的“分项”放缩, 函数的单调性放缩, 以及应用基本不等式或重要的不等式放缩等, 放缩要适度, 放缩的目标可以从要证的结论考查.



■ 竞技平台

一、选择题

1. 已知 $0 < a < b < 1$, 则 a^b , $\log_b a$, $\log_a b$ 的大小关系是 ()

A. $\log_a b < a^b < \log_b a$ B. $\log_a b < \log_b a < a^b$

C. $\log_b a < \log_a b < a^b$ D. $a^b < \log_a b < \log_b a$

2. 若 $a + d = b + c$, $|a - d| < |b - c|$, 则 ad 与 bc 的大小关系是 ()

A. $ad = bc$

B. $ad < bc$

C. $ad > bc$

D. ad 与 bc 的大小不定

3. 已知 $P = \frac{1}{a^2 + a + 1}$, $Q = a^2 - a + 1$, 则 P 、 Q 的大小关系是 ()

A. $P > Q$

B. $P < Q$

C. $P \leq Q$

D. P 、 Q 的大小关系不定

4. 若 $\log_2 x = \log_3 y = \log_5 z < 0$, 则 $x^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, $z^{\frac{1}{5}}$ 之间的大小关系是 ()

A. $y^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}} < z^{\frac{1}{5}}$

B. $x^{\frac{1}{2}} < y^{\frac{1}{3}} < z^{\frac{1}{5}}$

C. $z^{\frac{1}{5}} < y^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}}$

D. $x^{\frac{1}{2}} < z^{\frac{1}{5}} < y^{\frac{1}{3}}$

5. 设 $f(x) = |\lg x|$, 若 $0 < a < b < c$, 且 $f(a) > f(c) > f(b)$, 则下列关系正确的是 ()

A. $ac + 1 < a + c$

B. $ac + 1 > a + c$

B. $ac + 1 = a + c$

D. $ac > 1$

6. 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则 $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\frac{2ab}{a+b}$ 的大小顺序是 ()



$$A. \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$B. \frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$C. \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$D. \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab}$$

7. 设 $a - \beta = \gamma$ (γ 为常数), 则 $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ 的最小值是 ()

$$A. \cos^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$B. -\sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$C. \cos \gamma$$

$$D. \cos 2\gamma$$

8. 若 $a \geq b > 0$, 则 $a + \frac{4}{(2a-b)b}$ 的最小值是 ()

$$A. 1$$

$$B. 3$$

$$C. 8$$

$$D. 12$$

9. 设 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 且 $xy - (x+y) = 1$, 则 ()

$$A. x+y \geq 2(\sqrt{2}+1)$$

$$B. xy \leq \sqrt{2}+1$$

$$C. x+y \leq (\sqrt{2}+1)^2$$

$$D. xy \geq 2(\sqrt{2}+1)$$

10. 若 $x^2 + y^2 = 1$, $a^2 + b^2 = 3$, 则 $ax + by$ 的最大值是 ()

$$A. \sqrt{3}$$

$$B. 2$$

$$C. 3$$

$$D. 4$$

11. 设 $x > y > 0$, 则下列各式中正确的是 ()

$$A. x > \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > y \quad B. x \geq \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > y$$

$$C. x > \frac{x+y}{2} > y > \sqrt{xy} \quad D. y > \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} > x$$

12. 如果 $0 < m < b < a$, 那么 ()

$$A. \cos \frac{b+m}{a+m} < \cos \frac{b}{a} < \cos \frac{b-m}{a-m}$$

$$B. \cos \frac{b}{a} < \cos \frac{b-m}{a-m} < \cos \frac{b+m}{a+m}$$

$$C. \cos \frac{b-m}{a-m} < \cos \frac{b}{a} < \cos \frac{b+m}{a+m}$$



$$D. \cos \frac{b+m}{a+m} < \cos \frac{b-m}{a-m} < \cos \frac{b}{a}$$

13. 若 $x > y > 1$, $0 < a < 1$, 则下列各项正确的是 ()

$$A. x^{-a} > y^{-a}$$

$$B. (\sin a)^x > (\sin a)^y$$

$$C. \log_a x < \log_a y$$

$$D. 1 + a^{x+y} > a^x + a^y$$

14. 若 $x > 1$, 则 $\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ 有 ()

A. 最小值 1

B. 最大值 1

C. 最小值 -1

D. 最大值 -1

15. 若 $\frac{x^2}{4} + y^2 = x$, 则 $x^2 + y^2$ 有 ()

A. 最小值 0, 最大值 16

B. 最小值 $-\frac{1}{3}$, 最大值 0

C. 最小值 0, 最大值 1

D. 最小值 1, 最大值 2

二、填空题

16. 直角三角形的三边为 a, b, c 且 $c > b > a$, 设 V_a, V_b, V_c 分别表示以 a, b, c 为轴旋转所成旋转体的体积, 则 V_a, V_b, V_c 之间的大小关系是_____.

17. 设 $a > b > 0$, $x = \sqrt{a+b} - \sqrt{a}$, $y = \sqrt{a} - \sqrt{a-b}$, 则 x, y 的大小关系是_____.

18. 当 $n > 2$ 时, 比较大小: $\log_n(n-1)$ _____ $\log_{n+1}n$

19. 若 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 且 $2x + y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为_____.

20. 如果实数 x, y 满足: $x^2 + y^2 = 3$, 那么 $\frac{x}{y+2}$ 的最大值是_____.

21. 设 $0 < \theta < \pi$, 则 $\sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta)$ 的最大值是_____.

22. 若长方体的表面积为 S (S 为定值), 则其体积 V 的最大值是_____.