中等专业学校試用教材

工业性质专业适用

高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

人民教育出版社

这一套中等专业学校（工业性质专业）試用教材，是根据当前教学改革的精神，結合目前阶段初中数学基础逐步过渡的具体情况而編写的。共分四种，代数、三角、立体几何及高等数学。

本书（高等数学）分上、下册出版，上册内容包括函数与极限，导数与微分，导数与微分的应用，不定积分与微分方程初步，定积分及其应用等五章。为了照顧某些专业的不同需要，对书中（标有*号）的章节，可根据具体情况，考虑精簡或删除。

中等专业学校試用教材

工业性质专业适用

高 等 数 学

（上 册）

中等专业学校数学編写組編

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业營业許可証出字第2号）

上 海 洪 兴 印 刷 厂 印 刷

新 华 书 店 上 海 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·881 开本 850×1168 1/32 印張 7 13/16

字数 195,000 印数 200,001—310,000 定价（3）￥0.65

1960年10月第1版 1960年10月上海第2次印刷

序

这一套中等专业学校（工业性质专业）試用教材，是根据当前教学改革的精神，結合目前阶段初中数学基础逐步过渡的具体情况而編写的。在課程的內容和体系上力求革除旧有数学課程中脫离实际、分散孤立、繁瑣重复、陈旧落后的現象。本着理論結合实际、以函数为綱、数形結合、概念与計算統一的原則作了新的安排，并力求反映当前社会主义建設大跃进形势和現代科学技术的要求。

原平面解析几何中的直綫、二次曲綫，与代数中的一次函数、二次函数以及二次方程、方程組等內容結合起来，連同冪函数、指数函数、对数函数和三角函数构成一个比較完整的初等函数体系。

在代数中，增添了諾模图、排列組合、二項式定理、概率、行列式、极坐标等基础数学知識，以适应学习高等数学和生产实际中的需要。

由于中等专业学校某些基础技术課专业課以及代数在教学上較早地需要三角函数的知識，因而三角仍单独印为一本，便于与代数平行講授，但仍然以函数为綱，与代数紧密配合，构成一个有机整体。在代数里学过有关函数的基本概念与正比例函数后，即充分利用几何图形引入三角函数概念，这样为全面地研究直綫方程提供了方便。关于三角函数基本性质的研究与图象的討論安排在最后一章，以便在代数中学过对数函数之后講授，可以通过这一章的学习，系統而完整地認識基本初等函数的性质。

考虑到目前过渡阶段的具体情况，有关几何基本知識在破除欧氏綜合法系統、删去繁瑣陈旧部分的原則下，作了如下安排：“比例綫段与相似形”附列在三角教材的后面，需要講授时可在三角之

前講授;有关正多边形的边長和面积計算等問題幷入解三角形中，可灵活取舍。

立体几何以繪制图形与图形性質的研究为中心，增加了繪制空間簡单几何体的直观图的基本知識，密切配合制图課的教学。如果可能，最好与制图課合幷講授。

为了适应学习专业的需要和为今后进一步掌握現代化科学技术所需的数学知識打好基础，在高等数学中比过去增加了一些新的內容，如級数、微分方程、二元函数微分法、重积分、綫积分等，以扩大知識的应用領域，从而达到它的工具性的目的。在叙述过程中都貫穿着旣有适当的分析，又有足够的直观性的原則，同时加强了基本概念，便于学生掌握計算方法的規律。

为了照顾不同专业的需要，本书編写时取材的面比較广泛，因此对教材中的某些內容以及标有 * 号的章节，講授时可根据具体情况，考虑精簡或刪除。

由于时間仓促，且限于編者的認識水平和业务水平，謬誤之处，在所难免，希各地教师讀者予以指正。

中等专业学校数学編写組

1960 年 6 月

目　录

第一章　函数与极限

§1-1. 实数的絕对值及其性質

在代数中我們已知对于任意实数 a，恒有：

当 $a\geqslant 0$ 时，　　　$|a|=a$；

当 $a<0$ 时，　　　$|a|=-a$。

而且，若 $|x|<c$，$(c>0)$，则因

当 $x>0$ 时，　　　$x<c$；

当 $x<0$ 时，　　　$-x<c$，即 $-c<x$；

所以　　　$-c<x<c$。

这就表明了上式与 $|x|<c$ 在 $c>0$ 的条件下是完全等效的（图 1-1）。

图　1-1

根据絕对值的定义，我們不难驗証以下几个基本性質：

(1) **和的絕对值**　代数和的絕对值，小于或等于各項的絕对值的和。即

$$|a+b+c+\cdots+v|\leqslant|a|+|b|+|c|+\cdots+|v|。$$

(2) **积的絕对值**　乘积的絕对值，等于各因子的絕对值的积。即

$$|a\cdot b\cdot c\cdot\cdots\cdot v|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdot\cdots\cdot|v|。$$

(3) **商的絕对值**　商的絕对值，等于被除数的絕对值除以除数的絕对值（假定除数 $b\neq 0$）。即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}。$$

I. 函数概念

§1-2. 函数及其定义域

在客观世界中，各种对象或各种現象常常是有机地互相联系，彼此相依赖的。表現它們的量的这种关系，就是我們已知的所謂函数关系。

由于函数关系能精确深刻地反映出事物之間的量的联系和变化規律，为此在即将进一步較广泛地研究函数之前，我們有必要再一次复习函数的定义：

如果按照某一法則或規律，对于变量 x 的每一可取值，变量 y 都有一个确定的对应值，那末，变量 y 就叫做自变量 x 的函数。

自变量 x 的可取值的集合，叫做函数的**定义域**。

根据上述定义，显然可知，常量 c 也可以看作自变量 x 的函数，因为当 $y=c$ 时，无論 x 取任何数值，函数 c 总有确定的值 c 和它对应。事实上，函数 $y=c$ 的图象是一条平行于 Ox 軸的直綫，早已是我們所确認的了（图 1-2）。

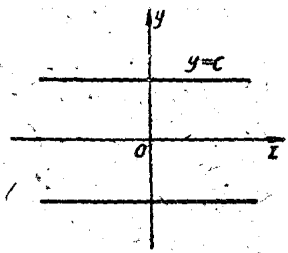

图 1-2

有关函数規律的表示法，这里虽不重述，但我們还要說明当函数用解析式表示时，有时并不是仅有一个式子，例如

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时} \end{cases}$$

（見图 1-3）。

同时还要指出，今后在对函数 $y=f(x)$ 作研究时，一般地我們可用一条曲綫来表示它的图象（图 1-4）。

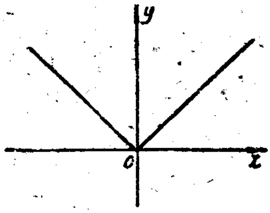

图 1-3

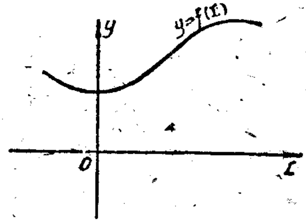

图 1-4

下面只就函数的定义域作一些必要的介紹。

关于函数定义中的第一个要素——定义域問題，由于函数是反映客观事物的量的規律，因此要求我們每提到一个函数，就应該注意什么是它的定义域。例如，假定y表示内接于已知圓的正x边形的面积，显然y是x的一个函数，根据实际意义，变量x的値只能是大于2的整数，所以这个函数的定义域是大于2的自然数集合；又如，对于函数$y=\sqrt{x}$，虽然不需要考虑它的量的具体意义，但就y应有确定的实数值来說，x就只能取一切非負的实値，所以一切正数及零的集合部为函数$y=\sqrt{x}$的定义域；再如，因为零不能作除数，对于函数$y=\dfrac{5}{x-3}$来說，它的定义域是除$x=3$以外的一切实値。总之，在研究函数时，应从量的具体意义以及数値的計算意义等方面去考查它的定义域。

表示函数的定义域的常用記号有开区間(a, b)和閉区間$[a, b]$等等(图1-5)，特别地，当自变量x可以取一切实値时，我們仍引用記号“∞”，把它記作$(-\infty, +\infty)$，表示整个数軸。

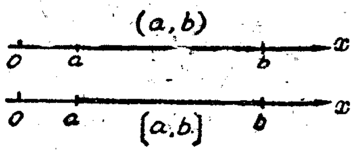

图 1-5

下面我們給出一些用解析式表示的函数的定义域的例子：

例1. 函数$y=x^2$的定义域为$(-\infty, +\infty)$或$-\infty<x<+\infty$。

例 2. 函数 $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$，或 $x\neq\pm1$。

例 3. 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 1$。

例 4. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 $(-1, 1)$ 或 $-1<x<1$。

例 5. 函数 $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $[-2, 1]$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 1$。

例 6. 函数 $y=\log_a x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 或 $0<x<+\infty$。

例 7. 函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1, 1]$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 1$。

例 8. 函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ 或 $0\leqslant x<+\infty$。

§1-3. 复合函数

在很多实际問題中，变量間的函数关系都是比較复杂的。例如，設有質量为 m 的物体，以初速 v_0 向上抛出，求它的动能 j。我們知道

$$j=\frac{mv^2}{2},$$

即动能 j 是速度 v 的函数，但速度又是时間 t 的函数，如果略去空气的阻力，那末

$$v=v_0-gt,$$

其中 g 是重力加速度。因此

$$j=\frac{m(v_0-gt)^2}{2},$$

于是动能 j 就通过 v 而成为时間 t 的函数了。

再如，函数 $y=\lg\sin x$，它的"直接的自变量"是 $\sin x$，而 $\sin x$ 本身又是自变量 x 的函数。如果用 u 来表示 $\sin x$，那末，$y=\lg u$，其中 $u=\sin x$。这就是說函数 y 对于 x 的函数关系，是通过中間变量 u 来确定的。

更一般地，如果 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，可以簡单地写为 $y=f[\varphi(x)]$ 的形式。对于这样的含有中間变量的函数，就叫做**复合函数**。

§1-4. 基本初等函数与初等函数

下列五种我們已熟知的函数，叫做基本初等函数：

1. 冪函数 $y=x^n$（n 为任意实数）。

(1) $y=x^3$，$(-\infty, +\infty)$，三次抛物綫；

(2) $y=x^{-1}$，$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$，双曲綫；

(3) $y=x^{\frac{1}{2}}$，$[0, +\infty)$，抛物綫（图 1-6，1-7）；

……………………………………………………。

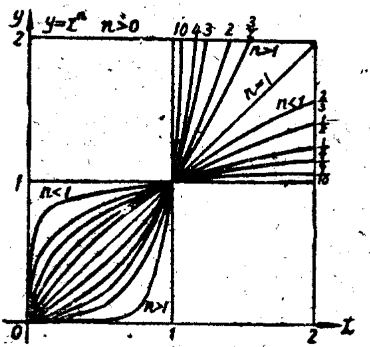

图 1-6

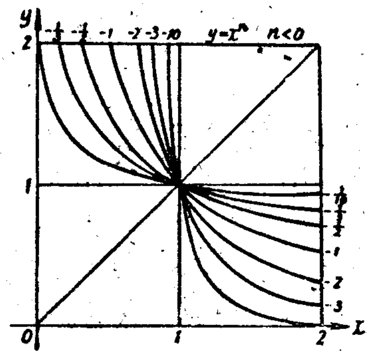

图 1-7

注：上图只绘出它們在第一象限的部分。

2 指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）其定义域为 $(-\infty, +\infty)$（图 1-8）。

3. 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）其定义域为 $(0, +\infty)$（图 1-9）。

4. 三角函数

(1) $y=\sin x$ $(-\infty, +\infty)$，周期 2π（图 1-10）；

(2) $y=\cos x$ $(-\infty, +\infty)$，周期 2π（图 1-10）；

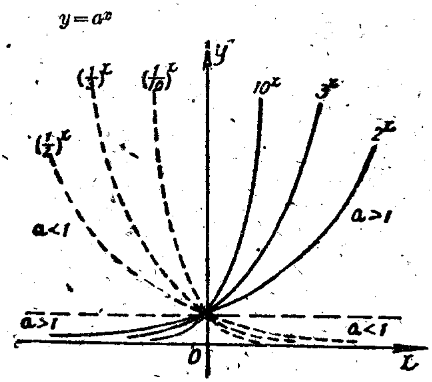

图 1-8

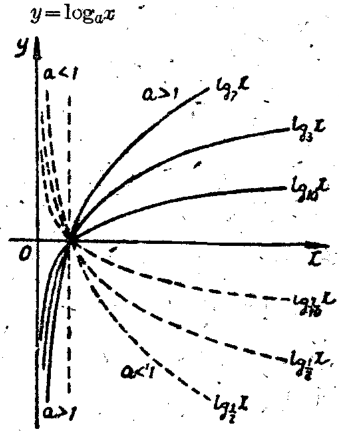

图 1-9

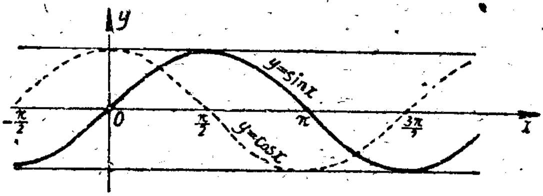

图 1-10

(3) $y=\operatorname{tg} x\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,周期为 π (图 1-11);

……………………………………………………。

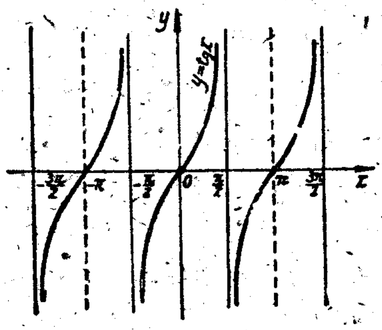

图 1-11

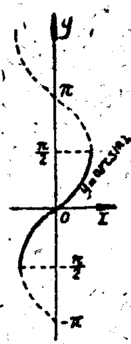

图 1-12

5. 反三角函数

(1) $y=\arcsin x[-1,1]$，主值区間$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$(图 1-12)；

(2) $y=\arccos x[-1,1]$，主值区間$[0,\pi]$(图 1-13)；

(3) $y=\operatorname{arc\,tg} x\ (-\infty,+\infty)$，主区值間$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$(图 1-14)；

……………………………………………。

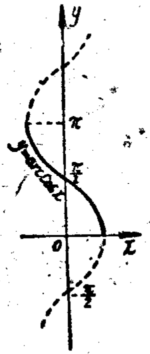

图 1-13

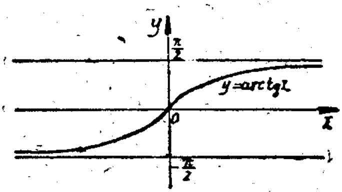

图 1-14

由上述的基本初等函数，經过有限次的算术四则运算以及有限次的函数复合步驟所得的函数，統称为初等函数。这样的函数通常可用一个解析式表示。在本书内以后我們所研究的一般都是初等函数。

II. 极限概念

§1-5. 变量的极限

要比較深入地研究函数，就必須运用一种特殊的重要方法——极限法。这种方法在实际問題中有极为广泛的应用。

例如，我們要計算由拋物綫 $y=x^2$，Ox 軸以及直綫 $x=1$ 所圍成的面积 S (图 1-15)。初等数学不可能解决这样的問題。但是所求面积显然是客观存在的。

我們用下列各点:

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ 1$$

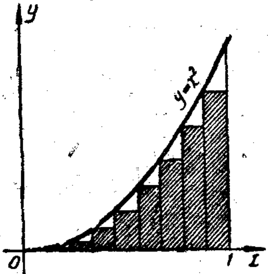

图 1-15

把 Ox 軸的一段 $[0, 1]$ 分成 n 个相等的小段，并且在每一个小段上作出左上角碰到抛物綫的矩形。結果就得到图 1-15 中有阴影的一切矩形，它們的高依次为

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

因此全部矩形面积的总和 S_n 是:

$$S_n=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}。$$

按照自然数的平方和的公式(参看代数第十二章)，即得

$$S_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}。$$

如果把量 S_n 改写为

$$S_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right),$$

那末，当数 n 无限制地增大时，上式括号內的值将无限制地趋近于零，而总和 S_n 就趋于 $\frac{1}{3}$。另一方面从图 1-15 可以看到，当 n 无限制地增大，則矩形面积的总和 S_n 将趋于所求曲綫形的面积 S，由此可知所求的曲綫形面积 S 应等于 $\frac{1}{3}$，于是解决了所提出的問題。

在这个方法中，我們用"抛物綫形"的內接矩形的数量无限制地增加而获得"抛物綫形"的面积的事实，正是唯物辯証法中的由量变轉化为質变的飞跃过程。

值得我們注意的是上述方法可以归結成为这样一个概念，这个概念的实質就是变量 S_n 按照某一法則，在它的变化过程中与某常量 S 之差，无限制地趋近于零，那末，我們就說变量 S_n 以常量 S 为极限。

但是什么是“无限制地趋近于零”，我們还是比較模糊的。要准确地表明变量极限的概念，我們給予如下的定义：

如果变量 u 在它的变化过程中，与某一常量 A 之差的絕对值，能自某一时刻以后一直保持小于预先指定的任意小的正数 ε，即

$$|u-A|<\varepsilon \quad (\varepsilon>0),$$

那末常量 A 就叫做这个变量 u 的极限。或者說变量 u 以常量 A 为极限。幷記作

$$\lim u=A \quad 或 \quad u\to A。$$

为了更好地理解这个概念，我們来研究一种特殊而又是最簡单的变量——数列——的极限。

例 1. 我国古代哲学著作庄子天下篇中有这样一段話：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”意思就是說每天截取后的剩余量 u_n 是数列

$$u_n=\frac{1}{2^n} \quad 即 \quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots。$$

如果依次把这些数值表示在数軸上（图 1-16），

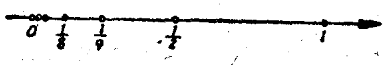

图 1-16

显然可知，无論指定怎样小的正数 ε，在天数 n 无限增多的过程中，变量 u_n（即 u_n 与数 0 之差）将逐漸变小，幷且从某一时刻开始就永远保持小于所給定的正数 ε。譬如

令 $\varepsilon=0.01$，只須 $n>6$，則 $\frac{1}{2^n}<0.01$ 就永远成立。

令 $\varepsilon=0.001$，只須 $n>9$，則 $\frac{1}{2^n}<0.001$ 就永远成立。

由此可知，在数列的极限中所指时刻就是一个自然数 n，而且一般說来它应随所指定的 ε 而确定。

按定义所以数列 $u_n=\frac{1}{2^n}$ 的极限为 0，即 $\lim\frac{1}{2^n}=0$。

例 2. 数列 $u_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ 即

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots(\text{图 1-17})。$$

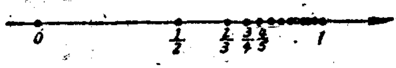

图 1-17

同样可知，无論給定怎样 ε，在数 n 无限增大的过程中，变量 $u_n=\frac{n-1}{n}$ 与数 1 之差，总能自某一时刻起一直保持小于所指定的 ε。所以数列 $u_n=\frac{n-1}{n}$ 的极限是 1，即 $\lim\left(\frac{n-1}{n}\right)=1$。

同时值得指出的是，数列 $u_n=\frac{1}{2^n}$ 是逐漸減小而趋近于它的极限 0 的；数列 $u_n=\frac{n-1}{n}$ 則是逐漸增大而趋近于它的极限 1 的。下面我們还可看到有的数列是时大时小地趋近于它的极限的情况。

例 3. 数列 $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，即

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots(\text{图 1-18})。$$

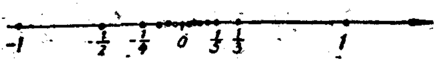

图 1-18

可知无論給定怎样小的正数 ε，当 n 无限增大时，变量 $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$（即 u_n 与数 0 之差）的絕对值，从某一时刻开始就会一直保持小于事先所指定的 ε，因此数列 $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的极限为 0。

即 $\lim \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=0$。

由此，若变量 u 以 A 为极限，对于预先指定的 ε，就是在軸上給出以 A 为中心，長为 2ε 的綫段（图 1-19），差 $u-A$ 按絕对值来說，能够在某一时刻起一直保持小于所給定的 ε，就是表示变量数值的那些动点，在它的变动过程中无論它們是单独出現于 A 的一边，或同时出現于 A 点的左、右两边，总之从某一时刻开始，而且以后一直都要保持在綫段 2ε 之内。

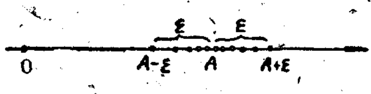

图 1-19

特別是，由于 ε 可以是任意指定的小的正数，显然就是以 A 为中心的綫段 2ε 可以是任意短的，不等式

$$|u-A|<\varepsilon$$

总能成立，卽有

$$A-\varepsilon<u<A+\varepsilon,$$

这样便充分地表明了变量极限的意义。

其次我們还要指出变量在它趋近于极限的过程中，有时可以取得等于极限的数值。

例 4. 数列 $u_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$（图 1-20），卽

$$0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \cdots$$

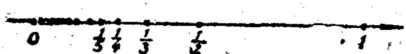

图 1-20

显然可知，数列 $u_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$ 的极限为 0，卽 $\lim \dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$。

总的說来，变量在它趋近于极限过程中，无論变量的值是否均