线性代数

姜健飞
高国柱　编
冯玉瑚

中国纺织大学出版社

线 性 代 数

姜健飞 高国柱 冯玉瑚 编

责任编辑　戴纪华

封面设计　赵玉杰

线 性 代 数

姜健飞　高国柱　冯玉瑚　编

中国纺织大学出版社出版

(上海市延安西路 1882 号　邮政编码:200051)

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本:787×1092　1/16　印张: 8　字数:18 万

1999 年 3 月第 1 版　1999 年 3 月第 1 次印刷

印数:001－4000

ISBN 7-81038-222-5/O·09

定价　12.80 元

内 容 提 要

本书为大学工科本科基础数学教材之一。全书共有六章，分别阐述了行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的相似标准形及二次型等概念与基本方法。

本书可作为高等院校工科专业线性代数教材，也可供各类从事现代工程技术的科技人员参考阅读。

引　　言

众所周知，数学中词“代数”表示“未知数”，从而“代数学”表示“求未知数的学问”即“解方程的学问”。本课程名为“线性代数”意为研究与“解线性方程组”有关的学问。那么什么是“线性”概念呢？让我们研究过原点的直线函数

$$f(x)=ax$$

易知有性质

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),\ f(kx)=kf(x) \tag{*}$$

其它函数或映射也可能具有性质(*)，如对多项式 $p(x)$，
若定义

$$f_1(p)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\quad f_2(p)=\int_0^x p(x)\mathrm{d}x,$$

则 f_1、f_2 亦均满足性质(*)。现代数学对满足性质(*)的函数或映射进行了专门研究，并称它们为线性函数或线性映射。“线性”概念是现代数学的重要概念之一，而(*)给出了“线性”概念的特征。关于本课程讨论的线性方程组与性质(*)的关系将在第二章§2中给出说明。

在了解了本课程的研究对象为“线性”问题后，这里进一步指出由于“线性”问题简单，易于得出规范性的结果，特别是易于在计算机上实现计算，这使得随着计算机技术日益广泛的应用，“线性”问题包括“线性代数”也得到了愈来愈多的重视。本课程的重要性还在于许多非线性问题可转化为线性问题。如当非线性函数 $f(x)$ 在定值 x_0 附近可导时，有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)。$$

若记

$$a=f(x_0)-x_0f'(x_0),\ b=f'(x_0),\ g(x)=a+bx,$$

则 $f(x)$ 可在 x_0 附近用直线函数 $g(x)$ 近似替代。

“线性代数”目前是国家教委指定工科本科必修基础课之一，它讲授的许多内容已成为现代工程师不可缺少的工具。做为一名工科学生应充分认识到本课程与今后的工作及继续学习之间的关系，下大力气学好本课程。

中国纺织大学数学教研室老师参加了本教材的编写工作。其中第一章由高国柱执笔，第二、三、四、六章由姜健飞执笔，第五章由冯玉瑚执笔。教材已以讲义形式在中国纺织大学本科生中试用三届，取得了令人满意的教学与学习效果。它的基本特点为条理清楚，难易适中，充分考虑到了工科学生学习数学的思维方式(归纳推理)与基本要求(重概念方法轻定理证明)。它还在讲授本科大纲要求的基本概念与方法的同时讲授报考研究生所需的辅加内容，从而具有更广的适用性。

作　者

1998年9月

目　　录

第一章　行　列　式

本章讨论行列式与解线性方程组的克莱姆法则。其中行列式为本课程常用的重要数学工具，而克莱姆法则为中学学习的二元、三元线性方程组求解公式的推广。

§1　行列式的定义和性质

对行列式的研究出自于对线性方程组的研究。

例如对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

当 $a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，(1)的解为

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}。$$

此公式较难记忆，分析其规律后引进 2 阶行列式定义如下：

定义 1　记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

称为 2 阶行列式。

由 2 阶行列式定义，(1)的解可表示为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

这是一个有规律，便于记忆的公式。

对于多元线性方程组的解是否也有行列式的表达式？这需要进一步给出 3 阶、4 阶、……、n 阶行列式的定义。

定义 2　记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{3}$$

称为 3 阶行列式。

(3)中右边每一项是左边第一列的一个元素与在划去这元素所在的行、列而得到的 2 阶行列式之积，并配上符号。

对(3)右边的进一步计算得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13},$$

知 3 阶行列式共有 3! 项，每一项形如$\pm a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}$($i_1i_2i_3$ 为 1，2，3 的所有排列)。对于 3 阶行列式有如下易记忆的计算规则：

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

即从“左上”至“右下”三元素乘积取正号；从“右上”至“左下”三元素乘积取负号。

由(2)(3)给出 n 阶行列式的递推定义如下：

定义 3　设 $n-1$ 阶行列式已定义，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}a_{r1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

称为 n 阶行列式。(4)的左端的行列式常记 D 或 $\Delta_n(a_{ij})$。

例 1　计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D = 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \left(1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -1。$$

例 2　计算上三角形的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \bigcirc & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix},\text{其中,当 } i>j \text{ 时 } a_{ij}=0。$$

解　由(4)得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33}a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

例 3　计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

解　由(4)得

$$D=(-1)^{n+1}a_{n1}\cdot(-1)^{(n-1)+1}a_{n-1,2}\cdots(-1)^{2+1}a_{n,n-1}\cdot(-1)^{1+1}a_{1n}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{2,n-1}a_{1n}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{2,n-1}a_{1n}。$$

注:例 2,例 3 提示我们可考虑将一些行列式转化为“三角形”行列式进行计算(见“例 7”解一)。

参照对 3 阶行列式(3)的进一步计算由(4)可以证明

(i) n 阶行列式有 $n!$ 项;

(ii)n 阶行列式的每一项形式为 $\pm a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ 或 $\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$,恰为不同行、列元素的乘积,这里 $i_1i_2\cdots i_n$ 表示 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;

(iii)$D=\sum(-1)^t a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}=\sum(-1)^t a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$。

其中“$\sum$”表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 i_1、$i_2\cdots i_n$ 求和,

$t=\tau(i_1i_2\cdots i_n)$为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数,其定义如下:

定义 4　设 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。若在 $i_1i_2\cdots i_n$ 中有两个数大在前小在后,则称有一个逆序。称 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序总和为 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 。易知

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后比 i_1 小的数的个数

$+\ i_2$ 后比 i_2 小的数的个数 $+\cdots$

$+\ i_{n-1}$ 后比 i_{n-1} 小的数的个数。

例如　$\tau(265341)=1+4+3+1+1=10$

(有逆序组合(2 1),(6 5),(6 3),(6 4),(6 1),(5 3),(5 4),(5 1),(3 1),(4 1))。

例 4　写出行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} & a_{14} \\ y & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & y \end{vmatrix}$$

中含 xy 的项。

解　由性质(iii)知 D 中含 xy 的各项是 $(-1)^{t_1}yxa_{43}a_{34}$，$(-1)^{t_2}ya_{42}xa_{14}$，$(-1)^{t_3}a_{31}xa_{23}y$ 和 $(-1)^{t_4}a_{11}a_{22}xy$，其中 $t_1=\tau(2143)=1+0+1=2$，$t_2=\tau(2431)=1+2+1=4$，$t_3=\tau(3124)=2+0+0=2$，$t_4=\tau(1234)=0+0+0=0$，从而 D 中含 xy 的项是 $(a_{43}a_{34}+a_{42}a_{14}+a_{31}a_{23}+a_{11}a_{22})xy$。

上述对 n 阶行列式特征的描述(i)(ii)(iii)指出按定义计算 n 阶行列式需计算 $n!(n-1)$ 次乘法。如此大的运算量当 n 较大时甚至计算机也无法承受，为此以下通过研究行列式的性质来简化计算。

定义 5　对于 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，得到的 $n-1$ 阶行列式，记为

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，并称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式。

由此定义，我们将行列式定义式(4)简写为

$$D=\sum_{r=1}^{n}a_{r1}A_{r1} \tag{5}$$

其中 A_{r1} 为 a_{r1} 的代数余子式。(5)可理解为将行列式 D 按第一列展开。

行列式是否也能按第一行展开呢？这个问题的回答是肯定的。

引理　设 D 如定义 5 所示，则

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{6}$$

其中，A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式。（证明见附录一）

使用此引理以下给出简化行列式计算的 6 条性质及按行、列展开定理：

性质 1　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若将 D 按对角线(从左上角至右下角)旋转 180°得转置行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D = D'。$$

(注意“转置”即“将行与列的位置互换”。)

证 当 $n=2$,结论易知成立。假设对 $n-1$ 阶行列式性质 1 成立,则把 n 阶行列式 D 由引理按第一行展开后再由归纳法假设,有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}' \end{aligned} \tag{7}$$

其中 M_{1j}' 为 M_{1j} 的转置行列式。(7)式正是转置行列式 D' 按第一列的展开式,所以

$$D = D'。$$ 证毕

这样,一个行列式关于行有什么性质,关于列也有什么性质;反之亦然。

例如由性质 1 与例 2 我们有常用公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & & \bigcirc & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & \bigcirc & & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。 \tag{8}$$

性质 2 行列式中两行(或两列)元素互换,行列式改变符号。(证明见附录一)

例 5 计算

$$\begin{vmatrix} & & & & & f \\ & & & & e & \\ & & & d & & \\ & & c & & & \\ & b & & & & \\ a & & & & & \end{vmatrix}$$

解 互换第 1 行与第 6 行,第 2 行与第 5 行,第 3 行与第 4 行,由性质 2 有

$$\begin{vmatrix} & & & & & f \\ & & & & e & \\ & & & d & & \\ & & c & & & \\ & b & & & & \\ a & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & & & & & \\ & b & & & & \\ & & c & & & \\ & & & d & & \\ & & & & e & \\ & & & & & f \end{vmatrix}$$

$$= -abcdef。$$

注：本例也可由例 3 直接写出结果。

现给出行列式可以按任一行或列展开的按行、列展开定理：

定理 1　设 D 如定义 5 所示，则

$$D = \sum_{r=1}^{n} a_{rj}A_{rj}(j = 1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

或

$$D = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}A_{ir}(i = 1,2,3,\cdots,n), \tag{10}$$

其中 A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式。

证　由于性质 1，只需证明按列展开式(9)。又由性质 2 把 D 中第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，…，第 1 列互换 $j-1$ 次，调到第 1 列，再按定义展开，得

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{j-1}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}a_{rj}M_{rj} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+j}a_{rj}M_{rj} \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_{rj}A_{rj}(j = 1,2,\cdots,n), \end{aligned}$$

其中 M_{rj}为 D 中 a_{rj}元素的余子式，A_{rj}为 D 中元素 a_{rj}的代数余子式。　证毕

例 6　计算

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}。$$

解　按第 3 行展开成－3 阶行列式后再按第 3 列展开：

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -11 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 60-20=40 \end{aligned}$$

性质 3　行列式中某一行(或某一列)元素的常数公因子，可以提到行列式符号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{11}$$

证　根据性质 1，只要对列给出证明即可。记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

已知 A_{rj} 为 D 中元素"a_{rj}"的代数余子式，容易看出 A_{rj} 也是 D_1 中元素"λa_{rj}"的代数余子式，从而由定理 1 及 D_1 与 D 的第 j 列展开式得

$$D_1 = \sum_{r=1}^{n}(\lambda a_{rj})A_{rj} = \lambda\sum_{r=1}^{n}a_{rj}A_{rj} = \lambda D。$$

证毕

仿照性质 3 的证明，读者易证以下性质。

性质 4　只有某一列（或某一行）不同的两个行列式之和等于由该列（或行）的相应元素相加而其他列（或行）元素不变的行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+a_{2j}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a_{nj}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对"行"情形的相应等式，读者可自行写出。

性质 5　如果行列式中两列（或两行）元素成比例，则此行列式的值为零。

证　由性质 1，只要对列证明即可。现设 $a_{rj}=\lambda a_{ri}(r=1,2,\cdots,n)$，由性质 3 与性质 2 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & \lambda a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & \lambda a_{ni} & \cdots & a_{nn} \\ & & (\text{第 } i \text{ 列}) & & (\text{第 } j \text{ 列}) & & \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$\qquad (i) \qquad (j)$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{（交换第 } i \text{ 列与第 } j \text{ 列），}$$

所以 $\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$，即 $D=0$。　证毕

性质 6　把某列（或某行）的元素乘以常数 λ 后加到其他列（或行）的对应元素上，行列式的值不变。

利用性质 1，性质 4 和性质 5 易证之，读者可以自行完成。

在以下计算中采用记号 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行与第 j 行互换，$c_i \leftrightarrow c_j$ 表示第 i 列与第 j 列互换，$r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k，$c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k，$r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上 k 倍第 j 行，$c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上 k 倍第 j 列。

例 7　计算

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}。$$

解一 利用性质 6 将 D 化为三角形行列式后由(8)计算：

$$D \xlongequal[\substack{r_3+r_1\\ r_4+2r_1}]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+\frac{9}{8}r_2]{r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/8 & -1/8 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{5}{12}r_3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{vmatrix} = 2\times(-8)\times\frac{3}{2}\times(-\frac{1}{3})=8。$$

解二 利用性质 6 及定理 1 将 D 降阶后计算：

$$D \xlongequal[r_3-r_4]{r_2+r_4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 4 列展开}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 2 行开展}} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8。$$

上述“解一”、“解二”介绍了行列式的两种最常用计算方法。一般“解二”介绍的“降阶”方法更为便捷，它的使用要点为每一次“降阶”前均先找出“最简单”的行或列，如本例 D 中显见第 4 列最简单，故按第 4 列展开降阶。

对于有规律的行列式可按其特殊规律进行计算，以下给出一些典型例子：

例 8 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_n$$

式中下标“n”表示行列式的阶数。

解 分别把第 2 行，第 3 行，…，第 n 行都加到第 1 行上，得

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n+1。$$

例 9 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}_n.$$

解 把第 1 行乘以 -1 加到其余各行上，然后按第 2 行展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\1&0&0&\cdots&0\\1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&\cdots&n-2\end{vmatrix}_n=1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&2&\cdots&2\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=-2(n-2)!$$

例 10 计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&&&b\\&a&&&\bigcirc&&b&\\&&\ddots&&&\iddots&&\\&&&a&b&&&\\\bigcirc&&&c&d&&&\bigcirc\\&&\iddots&&&\ddots&&\\&c&&&&&d&\\c&&&&\bigcirc&&&d\end{vmatrix}_{2n}.$$

解 按第 1 行展开，有

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix}a&&&&&b&0\\&\ddots&&&\iddots&&\vdots\\&&a&b&&&\\&&c&d&&&\\&\iddots&\bigcirc&&\ddots&&\\c&&&&&d&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&&0&d\end{vmatrix}_{2n-1}$$

$$+b(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix}0&a&&&&b\\\vdots&&\ddots&&\iddots&\\&&&a&b&\\&&&c&d&\\&&\iddots&&\ddots&\\0&c&&&&d\\c&0&\cdots\cdots&&&0\end{vmatrix}_{2n-1}$$

$$=adD_{2n-2}-bc(-1)^{2n-1+1}D_{2n-2}=(ad-bc)D_{2n-2}$$，递推可得

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2n-2}=(ad-bc)^2D_{2n-4}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2$$

$$=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=(ad-bc)^n。$$

例 11 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)\tag{12}$$

其中记号“Π”表示全体同类因子的乘积。

证 用数学归纳法

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j),$$

所以当 $n=2$ 时，(12)式成立。假设(12)式对 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立，要证(12)式对 n 阶范德蒙行列式也成立，为此，把 D_n 从第 n 行起后行减去前行的 x_1 倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)。$$

证毕

*例 12　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & a\\ -a & x & a & \cdots & a & a\\ -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x\end{vmatrix}$$

解　利用性质 4 把 D_n 拆成两个 n 阶行列式之和。

$$D_n=\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & a\\ -a & x & a & \cdots & a & a\\ -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & a\\ -a & x & a & \cdots & a & a\\ -a & -a & x & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a\end{vmatrix}$$

其中第一个行列式为 $(x-a)D_{n-1}$，把第 2 个行列式的第 n 列分别加到它的第 1 列，第 2 列，…，第 $n-1$ 列上，得

$$\begin{vmatrix}x+a & 2a & 2a & \cdots & 2a & a\\ & x+a & 2a & \cdots & 2a & a\\ & & \ddots & & & \vdots\\ & \bigcirc & & & x+a & a\\ & & & & & a\end{vmatrix}=a(x+a)^{n-1}$$

所以　$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1}$。同理可得 $D_n=(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}$。

由上面两式消去 D_{n-1}，得

$$D_n=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]。$$

上述例 8 介绍的方法在本课程的正文及习题中将被多次应用，例 11 的结论读者应能记住，而例 12 指出某些 n 阶行列式的计算具有较强的技巧性，读者可不必深究。

本节最后介绍两个有关行列式计算的有用定理：

定理 2　行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即若 D 如定义 5 所示，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \tag{13}$$

或　　$(i\neq j)$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \tag{14}$$

证　令行列式

$$D^* = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \qquad (i \neq j)$$

其中第 i 行与第 j 行相同，均为 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$。一方面由性质 5 知 $D^*=0$；另一方面由定理 1 按第 j 行展开，得

$$D^* = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

从而
$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 (i \neq j)。$$

类似可证(14)式。 证毕

引用克朗耐克(L. Kronecker)符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

定理 1 和定理 2 可以简写成

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}D。$$

定理 3 设

$$A: \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{matrix}, B: \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|,$$

其中 * 表示某些元素。

证 对阶数 m 进行数学归纳法，只证

$$D = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|。$$

另一等式由性质 1 立即得到。

若 $m=1$，得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \ \cdots \ 0 \\ * & \\ \vdots & B \\ * & \end{vmatrix} = a_{11}|B|,$$

即当 $m=1$ 时公式成立。假设对 m，公式成立。则对 $m+1$，有