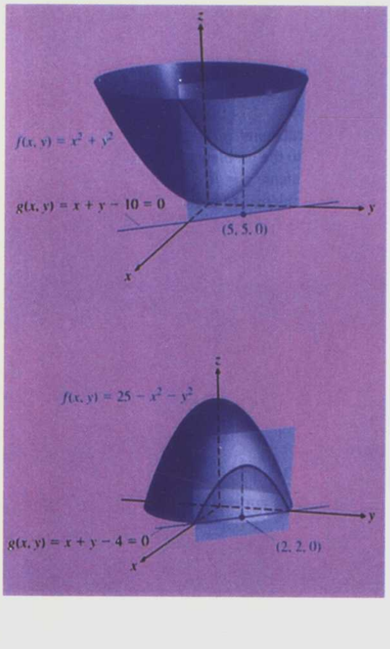
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

数学分析 下册

第二版

黄玉民　李成章 编



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

数学分析

（下册）

（第二版）

黄玉民　李成章　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是南开大学数学系老师在多年教学经验的基础上编写而成的,是一本大学数学系基础课程的教材.

本书分上、下两册,介绍了数学分析的基本内容,上册内容主要包括实数与函数、极限、连续函数、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、数项级数、广义积分、函数项级数;下册内容主要包括多元函数的极限与连续、多元函数的微分学、参变量积分、重积分、曲线积分与曲面积分.本书每章中都附有丰富的习题,供学生练习之用.第二版在第一版的基础上作了修订,对部分题目作了解答,使本书更具适用性.

本书可供高等院校数学系学生用作教材,也可供数学教学和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上、下)/黄玉民,李成章编.-2版.—北京:科学出版社,2007
(普通高等教育"十一五"国家级规划教材·南开大学数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-018381-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①黄…②李… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 159678 号

责任编辑:林 鹏 李鹏奇/责任校对:宋玲玲
责任印制:张克忠/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1999年5月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年1月第 二 版 印张:49 3/4
2007年1月第七次印刷 字数:958 000
印数:17 001—19 000
定价:56.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

目　　录

（下册）

第十二章　多元函数的极限与连续

在此之前我们主要讨论一元函数微积分,把关于一元函数的主要概念、运算和定理推广到多元函数在理论和实际应用上都是至关重要的.一元函数微积分与多元函数微积分有相同的理论基础,即实数理论和极限.但是由于多元函数的定义域和多元极限的复杂性,这就给讨论多元函数的问题带来新的困难.因此在我们学习多元函数微积分时,既要注意到它与一元函数微积分的联系,又要注意到它们之间的区别.本章主要有两部分,第一部分是多元函数定义的空间,即 n 维欧氏空间的基本拓扑概念,这一部分不仅对于本课程,而且对于许多后继课程来说都是必不可少的基础知识.第二部分主要讨论多元函数的极限与连续,以及连续函数的重要性质.

§12.1　n 维欧氏空间

一、n 维欧氏空间的定义与结构

众所周知,实数轴上的点与全体实数一一对应.在确定的坐标系下平面上的点与所有有序实数对(x,y)一一对应,空间中点与所有有序三元实数组(x,y,z)一一对应.一般来说,定义所有有序 n 元实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$所组成的集合为 n 维欧几里得(Euclid)空间,简称 n 维欧氏空间,记为 $\mathbf{R}^n$,即

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1,x_2,\cdots,x_n \text{ 为实数}\}$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$,实平面上的所有点的集合等同于 $\mathbf{R}^2$,通常现实空间中所有点的集合等同于 $\mathbf{R}^3$.

$\mathbf{R}^n$ 中一个点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$常常简单记为

$$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为 x 的第 i 个分量.任取 $x\in\mathbf{R}^n$,我们既把它看作 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点,又把它看作以 $O=(0,0,\cdots,0)$为始点,x 为终点的一个向量,我们按以下法则定义向量的加法和数乘:

(i) 对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,定义

$$x + y = (x_1 + y_1,x_2 + y_2,\cdots,x_n + y_n);$$

(ii) 对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 和实数λ,定义

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

按上述加法和数乘,易证 $\mathbf{R}^n$ 成为一个 n 维实线性空间,$O=(0,0,\cdots,0)$ 为其零元素,这就是 $\mathbf{R}^n$ 上的代数结构.

除代数结构,$\mathbf{R}^n$ 上还有距离结构,对任意 $\mathbf{R}^n$ 中的两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义 x 与 y 之间的欧氏距离(以下简称距离)为

$$\rho(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$\rho(x,0)$ 记为 $|x|$ 称为向量 x 的欧氏长度或欧氏范数(简称长度或范数).可以证明 $\mathbf{R}^n$ 上的距离满足所谓距离公理:

(i) 正定性:$\rho(x,y)\geqslant 0$ 且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$, $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$;

(ii) 对称性:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$;

(iii) 三角形不等式:

$$\rho(x,z)\leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z), \forall x,y,z\in\mathbf{R}^n.$$

(i)和(ii)显然成立,只需证(iii).为此,先介绍所谓柯西(柯西)不等式:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为实数,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

柯西不等式的证明留给读者.现证三角形不等式.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,则

$$\begin{aligned}\rho(x,z)^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x_i-y_i)+(y_i-z_i)||x_i-z_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i||x_i-z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i-z_i||x_i-z_i|.\end{aligned}$$

由柯西不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i||x_i-z_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i-z_i||x_i-z_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i-z_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

从而 $\rho(x,z)^2\leqslant\rho(x,y)\rho(x,z)+\rho(y,z)\rho(x,z)$.由此立即可得三角形不等式成立.

以后为简单起见,经常用向量长度或范数的记号代替距离记号,即

$$\rho(x,y) = |x-y|, \forall x,y\in\mathbf{R}^n.$$

二、$\mathbf{R}^n$ 中的点收敛及完备性

定义 12.1.1　设 $\{x^m\}_{m=1,2,\cdots}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点列(如无声明,所说点列总是无穷点列),$x^0\in\mathbf{R}^n$,称点列 $\{x^m\}$ 收敛于 x^0 或 x^0 是点列 $\{x^m\}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$,如果

$$\lim_{m\to\infty}|x^m-x^0|=0,$$

即任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 M 使得当 $m>M$ 时总有

$$|x^m-x^0|<\varepsilon.$$

对于任意实数 $r>0$ 和 $a\in\mathbf{R}^n$,形象地称集合

$$\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x-a|<r\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中以 a 为中心 r 为半径的开球体,经常记为 $B(a,r)$. 点列 $\{x^m\}$ 收敛于 x^0 直观地可叙述为:对于任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 M,使得 $\{x^m\}$ 中第 M 点以后的点全部进入以 x^0 为中心 ε 为半径的开球内. 类似于数列极限的性质,容易证明 $\mathbf{R}^n$ 中点列收敛的一些简单性质,例如:

性质 12.1.1　极限的惟一性,即 $\mathbf{R}^n$ 中收敛点列的极限只能有一个.

证　设 $a,b\in\mathbf{R}^n$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中收敛点列 $\{x^m\}$ 的极限,则由三角形不等式可得

$$|a-b|\leqslant|a-x^m|+|x^m-b|,m=1,2,\cdots$$

由于

$$\lim_{m\to\infty}|a-x^m|=\lim_{m\to\infty}|x^m-a|=0,\lim_{m\to\infty}|x^m-b|=0,$$

所以

$$|a-b|=0.$$

由此可知 $a=b$.

性质 12.1.2　在 $\mathbf{R}^n$ 中,设 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$, $\lim\limits_{m\to\infty}y^m=y^0$, α 和 β 是两个任意实数,则点列 $\{\alpha x^m+\beta y^m\}$ 收敛,且

$$\lim_{m\to\infty}(\alpha x^m+\beta y^m)=\alpha x^0+\beta y^0.$$

证　由三角形不等式

$$\begin{aligned}|(\alpha x^m+\beta y^m)-(\alpha x^0+\beta y^0)|&=|\alpha(x^m-x^0)+\beta(y^m-y^0)|\\&\leqslant|\alpha(x^m-x^0)|+|\beta(y^m-y^0)|.\end{aligned}$$

根据数乘与距离的定义可知

$$|\alpha(x^m-x^0)|=|\alpha||x^m-x^0|,$$

$$|\beta(y^m - y^0)| = |\beta||y^m - y^0|.$$

从而有

$$|(\alpha x^m + \beta y^m) - (\alpha x^0 + \beta y^0)| \leqslant |\alpha||x^m - x^0| + |\beta||y^m - y^0|.$$

再由假设 $\lim\limits_{m\to\infty}|x^m - x^0| = \lim\limits_{m\to\infty}|y^m - y^0| = 0$,所以

$$\lim_{m\to\infty}|(\alpha x^m + \beta y^m) - (\alpha x^0 + \beta y^0)| = 0,$$

即点列 $\{\alpha x^m + \beta y^m\}$ 收敛于 $\alpha x^0 + \beta y^0$.

有关 $\mathbf{R}^n$ 中点列极限的其他一些简单性质不再一一赘述.下面给一个定理说明 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛与实数列的收敛之间的关系.

定理 12.1.1　设 $\mathbf{R}^n$ 中的点列

$$x^m = (x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m), m = 1,2,3,\cdots$$

则 $\{x^m\}$ 收敛的充分必要条件是 x^m 的每一个分量数列都收敛,即对于每一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$,数列 $\{x_i^m\}, m=1,2,3,\cdots$ 收敛.

证　必要性.设 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m = x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$.对于每一个 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$,由于

$$|x_i^m - x_i^0| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k^m - x_k^0|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x^m - x^0|,$$

又 $\lim\limits_{m\to\infty}|x^m - x^0| = 0$,所以 $\lim\limits_{m\to\infty}|x_i^m - x_i^0| = 0$,即

$$\lim_{m\to\infty}x_i^m = x_i^0, i = 1,2,\cdots,n.$$

充分性.设 $\lim\limits_{m\to\infty}x_i^m = x_i^0, i=1,2,\cdots,n$.显然有

$$\lim_{m\to\infty}|x^m - x^0| = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^m - x_i^0|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

其中 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$.于是 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m = x^0$.

以上我们用 $\mathbf{R}^n$ 中的欧氏距离定义出点列的收敛概念.一般来说,若一个集合的每一对元素均可惟一确定一个实数,使得三条距离公理(正定性,对称性,三角形不等式)成立,则该实数就可称为这对元素之间的距离.一个集合连同其上定义的距离称为一个距离空间.同一个集合可以有不同的距离,因此作为距离空间是不同的.例如 $\mathbf{R}^n$ 上除去欧氏距离,还可以定义其他类型的距离,常用的有

$$|x - y|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|,$$

$$|x - y|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i - y_i|,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$. 请读者验证以上两种均满足距离公理. 较一般的还有取定 $1\leqslant p<+\infty$, 记

$$|x-y|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

显然当 $p=2$ 时对应的是欧氏距离. 对于一般的 p 可以证明 $|x-y|_p$ 也满足距离公理. 事实上, 正定性和对称性显然, 只需证三角形不等式, 不妨设 $1<p<+\infty$. 先证明两个著名的不等式.

赫尔德(Hölder)赫尔德不等式: 设 $1<p<+\infty$, $1<q<+\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证 考虑函数 $f(x)=x^{\frac{1}{p}}-\frac{x}{p}-\frac{1}{q}(0\leqslant x\leqslant1)$. 当 $0<x<1$ 时 $f'(x)=\frac{1}{p}(x^{\frac{1}{p}-1}-1)>0$, 又 $f(1)=0$, 所以

$$f(x)<0,\ \forall x\in(0-1),$$

任取实数 $0<a\leqslant b$, 令 $x=\frac{a}{b}$, 则

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{a}{b}+\frac{1}{q}.$$

经整理得

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q},$$

即

$$ab\leqslant\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.\qquad(12.1.1)$$

显然(12.1.1)式对于任意实数 a,b 成立.

不妨设 $\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p>0$, $\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q>0$. 对于任意正数 t 由(12.1.1)式可得

$$a_ib_i=(ta_i)\left(\frac{b_i}{t}\right)\leqslant\frac{t^p|a_i|^p}{p}+\frac{|b_i|^q}{t^qq}.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\frac{t^p}{p}\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p+\frac{1}{t^qq}\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q.$$

取

$$t=\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\Big)^{\frac{1}{pq}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\Big)^{-\frac{1}{pq}},$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\frac{1}{p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\Big)^{1-\frac{1}{q}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}+$$
$$\frac{1}{q}\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\Big)^{1-\frac{1}{p}}$$

再由$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,可知赫尔德不等式成立.

闵可夫斯基(Minkovski)不等式:设 $p\geqslant1$ 对于任意实数 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

证 $p=1$ 不等式显然成立;设 $p>1$.易知

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i||a_i+b_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|b_i||a_i+b_i|^{p-1}.$$

取 $q>1$ 使得$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,即 $q=\frac{p}{p-1}$.利用赫尔德不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\leqslant\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

由此立即可知闵可夫斯基不等式成立.

利用闵可夫斯基不等式可直接推出:当 $1\leqslant p<+\infty$时,$|x-y|_p$ 满足三角形不等式.综上所述,对于任何 $1\leqslant p\leqslant\infty$,$|x-y|_p$ 都可以定义为 $\mathbf{R}^n$ 上的距离,称之为 $\mathbf{R}^n$ 上的 p 距离.这些距离与欧氏距离有如下关系:

命题 12.1.1 对于任意 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x-y|\leqslant|x-y|_\infty\leqslant|x-y|, \tag{12.1.2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x-y|\leqslant|x-y|_p\leqslant n^{\frac{1}{p}}|x-y|, \tag{12.1.3}$$

其中 $1\leqslant p<+\infty$(注意$|x-y|=|x-y|_2$ 表示 x,y 之间的欧氏距离).

证 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.由于

$$|x-y|_\infty=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|\},$$

从而

$$|x-y|_\infty \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant n^{\frac{1}{p}}|x-y|_\infty,$$

其中 $1\leqslant p<+\infty$,即

$$|x-y|_\infty \leqslant |x-y|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}}|x-y|_\infty. \tag{12.1.4}$$

在(12.1.4)式中取 $p=2$ 即得(12.1.2)式.对任意 $1\leqslant p<+\infty$,由(12.1.4)式得

$$|x-y|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}}|x-y|_\infty \leqslant n^{\frac{1}{p}}|x-y|,$$

$$|x-y|_p \geqslant |x-y|_\infty \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}|x-y|.$$

从而(12.1.3)式成立.

推论 设$\{x^m\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的点列,x^0 是 $\mathbf{R}^n$ 中一点,对于任意 $1\leqslant p\leqslant\infty$,$\{x^m\}$在 p 距离意义下收敛于x^0 等价于$\{x^m\}$在欧氏距离意义下收敛于 x^0,即

$$|x^m-x^0|_p \to 0 \Leftrightarrow |x^m-x^0| \to 0. \tag{12.1.5}$$

证 由(12.1.2)式和(12.1.3)式可直接推出(12.1.5)式.

注 此推论的结论可简单叙述为 $\mathbf{R}^n$ 上所有 p 距离都与欧氏距离等价. $\mathbf{R}^n$ 上并非任意距离都与欧氏距离等价.例如

$$\delta(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases} \quad \forall x,y\in\mathbf{R}^n.$$

易证 $\delta(x,y)$满足距离公理.由 δ 所得到的 $\mathbf{R}^n$ 上的距离称为离散距离.在离散距离意义下点列$\{x^m\}$收敛于 x^0,即 $\lim\limits_{m\to\infty}\delta(x^m,x^0)=0$,充分必要条件是存在自然数 M,当 $m\geqslant M$ 时 $x^m=x^0$.显然在离散距离意义下的收敛性不等价于在欧氏距离下的收敛性.如无声明,本课程所提到的 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛性都是按欧氏距离意义下的收敛性.

关于实数列的柯西收敛原理可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的点列,首先给出一个定义:

$\mathbf{R}^n$ 中的点列$\{x^m\}$称为基本列或柯西列,如果任给 $\varepsilon>0$,存在 M,使得只要 $m,l>M$ 就有

$$|x^m-x^l|<\varepsilon.$$

定理 12.1.2.(柯西收敛原理) $\mathbf{R}^n$ 中点列$\{x^m\}$是收敛的充分必要条件是$\{x^m\}$为基本列.

证 设 $x^m=(x_1^m,x_2^m,\cdots,x_n^m)$, $m=1,2,3,\cdots$. 首先证必要性.如果 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$,由定理 12.1.1 可知

$$\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i^0, i = 1,2,\cdots,n.$$

利用实数的柯西收敛原理可得,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 M,使得只要 $m,l>M$,就有

$$|x_i^m - x_i^l| < \frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon, i = 1,2,\cdots,n.$$

从而当 $m,l>M$ 时

$$|x^m - x^l| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i^l|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

即$\{x^m\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的基本列.再证充分性.设$\{x^m\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的基本列,任给 $\varepsilon>0$,存在 M,只要 $m,l>M$ 时,就有

$$|x^m - x^l| < \varepsilon.$$

从而

$$|x_i^m - x_i^l| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^m - x_k^l|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x^m - x^l| < \varepsilon,$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$.由此可知$\{x_i^m\}$是实数的基本列.再用实数的柯西收敛原理可知存在 x_i^0,使得

$$\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i^0, i = 1,2,\cdots,n.$$

由定理 12.1.1 得 $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$.

此定理说明 $\mathbf{R}^n$ 是完备的,从证明可以看出 $\mathbf{R}^n$ 的完备性是从实数的完备性推出的.

三、邻域、开集、闭集

邻域、开集、闭集都是最基本的拓扑概念,我们从距离诱导出这些概念.

设 $x^0\in\mathbf{R}^n$,U 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集,称 U 是 x^0 的一个邻域,如果存在 $r>0$,使得

$$U \supseteq B(x^0, r) = \{x\in\mathbf{R}^n \mid |x - x^0| < r\}.$$

设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,如果 $x\in A\Rightarrow$存在 x 的邻域 $U\subseteq A$,则称 A 为开集.如果 A 的余集(记为 A^c 或者 $\mathbf{R}^n\setminus A$)是开集,则称 A 为闭集.显然 $\mathbf{R}^n$ 是开集,所以空集$\varnothing$是闭集,约定$\varnothing$也是开集,从而 $\mathbf{R}^n$ 也是闭集.

定理 12.1.3　有限多个开集的交是开集,任意多个开集的并是开集.

证　设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,令

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i.$$

如果 $x\in A$,则 $x\in A_i$, $i=1,2,\cdots,m$. 由于 A_i 是开集,从而存在 $r_i>0$,使得

$$B(x,r_i)\subseteq A_i, i=1,2,\cdots,m.$$

取 $r=\min\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}>0$,显然

$$B(x,r)\subseteq B(x,r_i)\subseteq A_i, i=1,2,\cdots,m.$$

从而

$$B(x,r)\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}A_i=A,$$

即 A 是开集. 设

$$A=\bigcup_{i\in I}A_i,$$

其中 I 是任意指标集(有限集或无穷集),且 $\forall i\in I$, A_i 是开集. 如果 $x\in A$,则存在 $i\in I$ 使得 $x\in A_i$,再由 A_i 是开集,从而存在 $r>0$,使得

$$B(x,r)\subseteq A_i\subseteq A,$$

于是 A 为开集.

定理 12.1.4 有限多个闭集的并是闭集,任意多个闭集的交是闭集.

证 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 均是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集,令

$$A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i.$$

由于

$$A^c=\bigcap_{i=1}^{m}A_i^c,$$

A_i^c 是开集($i=1,2,\cdots,m$),利用定理 12.1.3 可知 A^c 为开集,所以 A 是闭集. 同理可证任意多个闭集的交是闭集.

下面给一个判断 $\mathbf{R}^n$ 中的集合是否为闭集的常用准则.

定理 12.1.5 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$, A 为闭集的充要条件是:对于 A 中任意点列 $\{x^m\}$,如果 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$,则 $x^0\in A$.

证 必要性. 用反证法,设 A 是闭集,且存在 A 中的点列 $\{x^m\}$,使得 $\lim\limits_{m\to\infty}x^m=x^0$,但 $x^0\notin A$,即 x^0 属于 A 的余集 A^c. 由于 A 是闭集,则 A^c 是开集,从而存在 x^0 的邻域 U 使得 $U\subseteq A^c$. 由此可知存在 $r>0$,使得当 $|x-x^0|<r$ 时, $x\notin A$. 这与 $x^m\in A$ $(m=1,2,3,\cdots)$,且 $x^m\to x^0$ 矛盾!

充分性. 设 A 中收敛点列的极限均属于 A. 任取 $x\in A^c$,则存在 $r>0$,使得 $B(x,r)\subseteq A^c$,事实上,否则取正数列 $\{r_m\}$ 满足 $r_m\to 0$, $B(x,r_m)\cap A\neq\varnothing$,于是可选取 A 中的点列 $\{x^m\}$,使得

$$|x^m-x|<r_m\to 0,$$

即 $\lim_{m\to\infty} x^m = x$. 由假设得 $x\in A$,矛盾！于是 A^c 为开集,即 A 为闭集.

注　若 A 中收敛点列的极限均属于 A,则通常称 A 为列闭. 定理 12.1.5 说明在 $\mathbf{R}^n$ 中闭与列闭等价,这一结论对一般距离空间都成立.

设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$, $x\in\mathbf{R}^n$,现给出以下定义:

如果 A 包含 x 的一个邻域. 则称 x 为 A 的内点. 若 A^c 包含 x 的一个邻域,则称 x 为 A 的外点,如果 x 既不是 A 的内点,也不是 A 的外点,即对于 x 的任意邻域 U 均有 $U\cap A\neq\varnothing$, $U\cap A^c\neq\varnothing$,则称 x 是 A 的边界点. 如果 x 的任一邻域都含有 A 中的点,则称 x 是 A 的触点. 如果 x 的任一邻域都含有 A 中异于 x 的点,则称 x 是 A 的聚点.

A 的所有内点组成的集合称为 A 的内部,记为 A^0, A 的所有外点组成的集合称为 A 的外部. A 的所有边界点组成的集合称为 A 的边界,记为 ∂A. A 的所有触点组成的集合称为 A 的闭包,记为 $\overline{A}$. A 的所有聚点组成的集合称为 A 的导集,记为 A'. 显然有以下关系:

(i) $A^0\subseteq A\subseteq\overline{A}$, $A^0\subseteq A'\subseteq\overline{A}$;

(ii) $\overline{A}=A\cup\partial A=A'\cup\partial A=A^0\cup\partial A$;

(iii) $A^0=A\setminus\partial A=A'\setminus\partial A=\overline{A}\setminus\partial A$;

(iv) $(A^c)^0$ 是 A 的外部且 $((A^c)^0)^c=\overline{A}$, $(\overline{A^c})^c=A^0$.

这些关系的证明留给读者. 若 $x\in A\setminus A'$,则存在 x 的邻域,使得该邻域内属于 A 的点仅为 x,这样的点称为 A 的孤立点. 此外,易证以下性质:

(a) $A\subseteq B\Rightarrow A^0\subseteq B^0$, $\overline{A}\subseteq\overline{B}$;

(b) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$;

(c) $(A\cap B)^0=A^0\cap B^0$, $(A\cup B)^0\supseteq A^0\cup B^0$.

证　(a)显然成立,现证(b). 若 $x\in\overline{A\cup B}$,则 x 的每一个邻域都含有 $A\cup B$ 中的点. 故

$$B\left(x,\frac{1}{m}\right)\cap(A\cup B)\neq\varnothing, m=1,2,3,\cdots$$

易知存在 $\left\{\frac{1}{m}\right\}$ 的子序列 $\left\{\frac{1}{m_k}\right\}$ 使得或者

$$B\left(x,\frac{1}{m_k}\right)\cap A\neq\varnothing, k=1,2,3,\cdots \tag{12.1.6}$$

或者

$$B\left(x,\frac{1}{m_k}\right)\cap B\neq\varnothing, k=1,2,3,\cdots \tag{12.1.7}$$

不妨设(12.1.6)式成立. 对于 x 的任一邻域 U,存在 $r>0$,使得 $B(x,r)\subseteq$

U. 由于存在自然数 k，使得 $m_k > \frac{1}{r}$，所以 $B\left(x, \frac{1}{m_k}\right) \subseteq B(x, r) \subseteq U$. 于是

$$U \cap A \neq \varnothing.$$

由此可知 $x \in \bar{A} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. 因此 $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. 反之由于 $A \subseteq A \cup B$，从性质(a)得 $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$，同理得 $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. 于是有 $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. 综合两个方面得 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. 由于 $A \cap B \subseteq A$，所以 $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A}$，同理 $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{B}$. 从而 $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$. 至此已证(b)成立. 仿照性质(b)的证明，利用集合内部的定义及性质(a)，可证性质(c). 我们也可用关系(iv)及集合运算，从(b)推出(c). 事实上，由关系(iv)得

$$(A \cap B)^0 = \left(\overline{(A \cap B)^c}\right)^c = \left(\overline{A^c \cup B^c}\right)^c.$$

再用性质(b)及关系(iv)得

$$\begin{aligned}(A \cap B)^0 &= \left(\overline{A^c \cup B^c}\right)^c = \left(\overline{A^c} \cup \overline{B^c}\right)^c \\ &= (\overline{A^c})^c \cap (\overline{B^c})^c = A^0 \cap B^0.\end{aligned}$$

同样有

$$(A \cup B)^0 = \left(\overline{(A \cup B)^c}\right)^c = \left(\overline{A^c \cap B^c}\right)^c.$$

由性质(b)可知 $\overline{A^c \cap B^c} \subseteq \overline{A^c} \cap \overline{B^c}$，从而

$$(A \cup B)^0 = \left(\overline{A^c \cap B^c}\right)^c \supseteq (\overline{A^c} \cap \overline{B^c})^c = (\overline{A^c})^c \cup (\overline{B^c})^c.$$

利用关系(iv)即得

$$(A \cup B)^0 \supseteq A^0 \cup B^0.$$

于是性质(c)成立. 用同样的方法也可以从(c)推出(b).

定理 12.1.6 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$，则

(i) A 是闭集的充要条件是 $A = \bar{A}$；

(ii) A 是开集的充要条件是 $A = A^0$.

证 设 A 是闭集，则 A 的余集 A^c 是开集. 若 $x \notin A$，则 $x \in A^c$. 利用 A^c 的开集性质可知，存在 x 的邻域 U，使得 $U \subseteq A^c$. 故 U 与 A 的交为空集，从而 $x \notin \bar{A}$，由此得 $\bar{A} \subseteq A$. 再由已知的结果 $A \subseteq \bar{A}$ 可得 $A = \bar{A}$. 反之，设 $A = \bar{A}$. 若 $x \in A^c$，由于 $A = \bar{A}$，所以 $x \notin \bar{A}$，即存在 x 的邻域 U，使得 $U \cap A = \varnothing$. 故 $U \subseteq A^c$. 由此可知 A^c 是开集，从而 A 是闭集. 于是(i)成立.

若 $A = A^0$，由于 $A^0 = (\overline{A^c})^c$，从而

$$(\overline{A^c})^c = A.$$

等式两端取余集得 $\overline{A^c} = A^c$，由本定理中的(i)可知 A^c 是闭集，从而 A 是开集. 反之，若 A 是开集，上述证明倒推上去得 $A = A^0$.

由定理 12.1.6,立即可推出 $\bar{A}$ 是闭集,A^0 是开集.进一步,若 B 为闭集且 $A\subseteq B$.两边取闭包再用定理 12.1.6 可得 $\bar{A}\subseteq\bar{B}=B$.由此可知 $\bar{A}$ 是所有包含 A 的闭集之交集.同样,若 B 为开集且 $B\subseteq A$(注意,这样的非空 B 未必存在,如果不存在,则 $A^0=\varnothing$),则 $B^0\subseteq A^0$.再由定理 12.1.6 得

$$B = B^0 \subseteq A^0,$$

即 A^0 为包含于 A 的一切开集之并集.

四、$\mathbf{R}^n$ 中有界闭集的列紧性与紧性

设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,如果存在 $r>0$,使得 A 包含于以 O 点为中心、r 为半径的球内,则称 A 为有界集.显然 A 为有界集的充要条件是存在 $M>0$,使得任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 均有

$$|x_i|\leqslant M, i = 1,2,\cdots,n.$$

Bolzano-Weierstrass 引理　设 $\{x^m\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界序列,则它必有收敛的子序列.

证　记 $x^m=(x_1^m,x_2^m,\cdots,x_n^m)$, $m=1,2,3,\cdots$.由于 $\{x^m\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界序列,从而 $\{x_1^m\}$ 是有界实数列.根据实数集的 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{x_1^m\}$ 有收敛子列 $\{x_1^{m_{1,k}}\}$, $k=1,2,3,\cdots$.显然 $\{x_2^{m_{1,k}}\}$ 也是有界实数列,从而它也存在收敛子序列 $\{x_2^{m_{2,k}}\}$, $k=1,2,3,\cdots$.此时 $\{x_1^{m_{2,k}}\}$, $\{x_2^{m_{2,k}}\}$ 均为收敛的实数列.依此类推,用归纳法易知存在 $\{m\}$ 的子序列 $\{m_{n,k}\}$, $k=1,2,3,\cdots$ 使得 $\{x_i^{m_{n,k}}\}$, $k=1,2,3,\cdots$ 为收敛的实数列,其中 $i=1,2,\cdots,n$.再用本节中的定理 12.1.1 可知 $\{x^{m_{n,k}}\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列.

设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,如果 A 中任意点列,都有收敛于 A 中的点的子序列,则称 A 是列紧集.

定理 12.1.7　A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的列紧集的充要条件是 A 为有界闭集.

证　充分性.设 A 是有界闭集.任取 A 中的点列 $\{x^m\}$,由 Bolzano-Weierstrass 引理可知 $\{x^m\}$ 有在 $\mathbf{R}^n$ 中收敛的子序列 $\{x^{m_k}\}$,记 $x^0=\lim\limits_{k\to\infty}x^{m_k}$.由于 A 是闭集,$x^{m_k}\in A$, $k=1,2,3,\cdots$,根据定理 12.1.5 可知 $x^0\in A$.

必要性.如果 A 不是有界集,任取 $x^1\in A$.利用 A 的无界性可知,存在 $x^2\in A$,使得

$$|x^2 - x^1|\geqslant 1.$$

再由 A 的无界性可知,存在 x^3,使得

$$|x^3 - x^2|\geqslant 1,\ |x^3 - x^1|\geqslant 1.$$

依此类推,用归纳法易证,存在 A 中的点列 $\{x^m\}$, $m=1,2,3,\cdots$,使得对于任