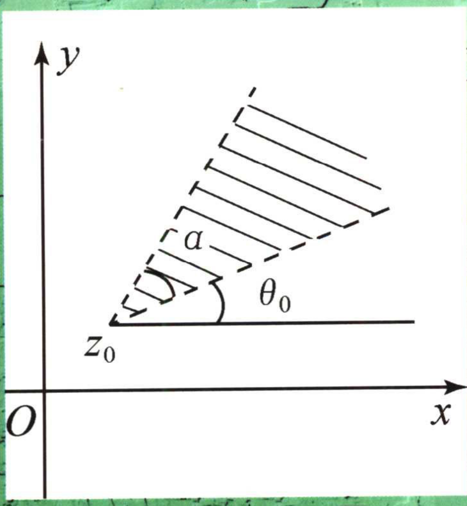
高等学校理工科基础课教材

复变函数与积分变换

于慎根 杨永发 张相梅 编著



南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

高等学校理工科基础课教材

复变函数与积分变换

于慎根　杨永发　张相梅　编著

南开大学出版社
天津

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 于慎根,杨永发,张相梅编著.
天津:南开大学出版社,2006.9
高等学校理工科基础课教材
ISBN 7-310-02581-4

Ⅰ.复...　Ⅱ.①于...②杨...③张...　Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材
Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 077768 号

南开大学出版社出版发行
出版人:肖占鹏
地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071
营销部电话:(022)23508339　23500755
营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200
*
河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷
全国各地新华书店经销
*
2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷
880×1230 毫米　32 开本　8.875 印张　252 千字
定价:20.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容简介

本书是为高等理工科院校编写的“复变函数与积分变换”的教材. 内容包括: 复数与复变函数, 解析函数, 复变函数的积分, 解析函数的级数表示, 残数理论及其应用, 保形映射, 含复参数函数的积分, 拉普拉斯变换和傅里叶变换.

本书内容丰富, 选材适当, 重点放在加强基本理论与基本方法以及它们的基本应用上, 叙述严谨, 并力求做到深入浅出, 通俗易懂. 与同类教材比较, 本书中增加了“含复参数函数积分”一章, 作为推导拉普拉斯变换和傅立叶变换的逆变换的理论基础, 使得积分变换的理论更严谨. 本书的另一重要特色是加强了解析函数唯一性定理的应用, 把解析函数的唯一性定理应用到解析函数的微分理论和拉普拉斯变换的计算上, 使本书的内容更具系统性, 体系更科学.

本书可以作为理工科大学“复变函数与积分变换”课程的教材, 也可以供工程技术人员参考使用.

前　言

本书是编者为高等工理科院校编写的《复变函数》、《积分变换》两书的修订改写本. 根据两门课程教学大纲的要求, 删去了一些繁难之处, 增添和修改了部分内容, 使本书更具系统性、科学性和严谨性, 把重点放在加强基本理论与基本方法以及它们的基本应用上, 并力求做到深入浅出, 通俗易懂.

与国内同类教材比较, 本书中增加了"含复参数函数的积分"一章, 作为推导拉普拉斯变换和傅立叶变换的逆变换的理论基础, 取代了由傅里叶级数推导傅里叶变换, 由傅里叶变换推导拉普拉斯变换的方法, 使得积分变换的理论更严谨. 本书的另一重要特色是加强了解析函数唯一性定理的应用, 把解析函数的唯一性定理应用到解析函数的微分理论和拉普拉斯变换的计算上, 使本书的内容体系更具系统性和科学性.

全书共分九章, 第一章着重介绍复变函数的研究对象与研究方法. 第二、第三、第四章, 是解析函数的基本理论, 分别用一对实二元函数、复闭路积分和幂级数来刻划解析函数的特征, 并由此推出了解析函数极为深刻的重要性质. 第五、第六两章, 是解析函数理论的深入与运用. 为处理实际问题时出现的数学问题, 提供了有力的工具. 第七章是含参数函数的积分理论, 它是积分变换的理论基础. 第八、九两章介绍积分变换中常见的拉普拉斯变换和傅里叶变换, 它们在工程技术中都有着广泛的应用.

讲授本书的全部内容, 约需 62 学时. 略去第七章和积分变换中基本定理的证明以及§5.2 等内容后, 约需 50 学时.

本书出版过程中, 得到了南开大学出版社和河北工业大学的大力支持, 南开大学出版社莫建来老师、尹建国老师为本书的出版作

了大量艰苦细致的工作，作者对此表示感谢. 同时作者也感谢那些曾使用过作者《复变函数》、《积分变换》两种教材的教师和同学，没有他们的热情支持和宝贵建议，就没有本书的今天. 我们殷切地希望继续使用本书的读者对本书的内容、体系等不当之处提出批评和建议，以使本书不断完善.

编　者

2006 年 6 月于天津

目 录

第一章 复数与复变函数

复变函数的研究对象是解析函数. 研究方法是极限方法, 本章先介绍复数集, 然后介绍复变函数的极限和连续性.

§1.1 复数及其运算

1.1.1 复数及其几何表示

设 x, y 是两个实数, $i^2=-1$, 称形如 $x+iy$ 或 $x+yi$ 的数为一个**复数**, 记为 z, 即

$$z=x+iy \text{ 或 } z=x+yi,$$

其中 i 称为**虚单位**; x 称复数 z 的**实部**, 记为 $\operatorname{Re} z$; y 称复数 z 的**虚部**, 记为 $\operatorname{Im} z$.

当虚部 $y=0$ 时, 复数 z 就是实数; 当实部 $x=0$ 时, 若虚部 $y\neq0$, 复数 $z=iy$ 称为**纯虚数**; 两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等当且仅当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

一个复数由它的实部和虚部, 即由一对有序实数所唯一确定; 而在平面上取直角坐标系后, 在坐标平面上的任一点, 也由一对有序实数所唯一确定. 把复数 $z=x+iy$ (以后在不作特殊声明的情况下, 形如 $z=x+iy$ 的数中的 x 和 y 均指实数)与平面上的坐标为(x, y)的点相互对应, 于是在一切复数所组成的集合与平面上的一切点组成的集合之间, 构成一一对应. 一切实数所成的集, 与横轴上一切点组成的集相对应; 一切纯虚数所组成的集, 与纵轴上的一切点(除去原点外)所组成的集相对应. 因此把横轴称为实轴, 纵轴称为虚轴. 实轴在原点右方及左方

的部分，分别称为正实轴及负实轴；在实轴的上方及下方的半平面，分别称为上半平面及下半平面；虚轴的左方及右方的半平面，分别称为左半平面及右半平面；如果用平面上的点表示复数，那么这个平面就称**复平面**，或按照表示复数的字母 $z, w, \ldots$称为 z 平面，w 平面等等.

“复数 $z=x+\mathrm{i}y$”与“点 $x+\mathrm{i}y$”用做同义语，“复数集”与“平面点集”也做同义语.

在复平面上，从原点出发到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与该复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也构成一一对应(复数零对应着零向量). 因此，有时也把“复数”与“二维向量”，“复数集”与“向量集”用做同义语. 向量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**，记为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1-1}$$

当 $z\neq 0$ 时，实轴的正向与向量 z 之间的夹角称为复数 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z$；显然 $\operatorname{Arg} z$ 有无穷多个值，其中每两个相差 2π的整数倍，但 $\operatorname{Arg} z$ 只有一个值α满足条件$-\pi<\alpha\leqslant\pi$，它称为 z 的辐角主值，记为 $\arg z$. 显然，

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \ (k=0,\pm 1,\cdots). \tag{1-2}$$

$\arg z$ 与反正切 $\operatorname{Arc}\tan\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下的关系：

$$\arg_{z\neq 0} z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当}z\text{在第一象限时;}\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当}z\text{在第二象限时;}\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当}z\text{在第三象限时;}\\ \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当}z\text{在第四象限时.}\end{cases}$$

例 1.1 计算复数 $z=-3+4\mathrm{i}$ 的模和辐角.

解： $|z|=|(-3)+4\mathrm{i}|=\sqrt{9+16}=5$，因为 z 在第二象限，故

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(-3+4\mathrm{i}) &= \arctan\frac{4}{-3}+2k\pi+\pi \\ &= (2k+1)\pi-\arctan\frac{4}{3},\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.\end{aligned}$$

零没有确定的辐角，或者说零没有辐角；零的模为零.

复数 z 的实部和虚部可用它的模和辐角表出：

$$\operatorname{Re} z=|z|\cos\theta,\quad \operatorname{Im} z=|z|\sin\theta,$$

其中 $\theta=\operatorname{Arg} z$，于是 z 本身可表示为

$$z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-3}$$

这个式子称为 z 的**三角表示式**.

用符号 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，就有

$$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1-4}$$

它称为 z 的**指数表示式**，或**欧拉**(Euler)**表示式**.

称复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数. 显然，z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称(图 1-1). 因此

$$|\bar{z}|=|z|,\quad \operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg} z,\quad \operatorname{Re}\bar{z}=\operatorname{Re} z,\quad \operatorname{Im}\bar{z}=-\operatorname{Im} z$$

等式 $\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg} z$ 应理解为：对于左边 $\operatorname{Arg}\bar{z}$ 的任一个值，右边的 $-\operatorname{Arg} z$ 必有一对应值使等式成立，反之亦然.

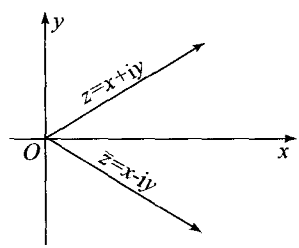


图 1-1

与实数集不同，复数没有定义大小关系. 对复数不定义其大小，不是不为，而是不能. 首先实践中没提出复数要比较大小的问题. 东西有多寡，故自然数有大小. 而整数间的大小关系和实数间的大小关系，是由数的“绝对正负”产生的. 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与复数 $-z=-x-\mathrm{i}y$ 可以说是一种相对的“互为负”的关系，并没有绝对的正与负之分(如$-2+3\mathrm{i}$ 和 $2-3\mathrm{i}$ 是互为相反数，但不能说其中哪一个是正数，哪一个是负数). 其次即使单从理论上看，也不能认为复数之间可规定一种大小. 因为不能随便地确定复数的大小关系(这样可能把复数搞

乱)，任何方法所规定的复数大小，必须满足一些起码的条件，比如，设 z_1, z_2, z_3 为复数：

(1) 若 $z_1 < z_2$，$z_2 < z_3$，则 $z_1 < z_3$；

(2) 若 $z_1 < z_2$，$z_1 > z_2$，则 $z_1 = z_2$；

(3) 若 $z_1 < z_2$，则 $z_1 + z_3 < z_2 + z_3$；

(4) 若 $z_1 < z_2$，$z_3 > 0$，则 $z_1 z_3 < z_2 z_3$.

我们说，不可以在复数之间规定一种大小同时满足这四个条件．假如可以规定这样一种大小，可以证明，若 $z \neq 0$，则 $z^2 > 0$，据此有 $1 = 1^2 > 0$，由(3)两边加-1 得 $0 > -1$，但$-1 = i^2 > 0$，即 $0 < -1$．$0 > -1$ 与 $0 < -1$ 同时成立，这与(2)矛盾．

1.1.2 复数的运算

两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ 的加法和乘法运算由下列等式定义：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1-5}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{1-6}$$

减法和除法定义为加法和乘法的逆运算，于是有

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{1-7}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 + iy_2 \neq 0.\end{aligned} \tag{1-8}$$

可以证明，复数的加减乘除(除数不为零)运算与实数的加减乘除运算满足同样一些法则(如交换律、结合律、分配律)．

据式(1-5)可知，复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相加与向量 z_1 及 z_2 相加的规律一致，在力学和物理学中，力、速度、加速度等都可用向量来表示，这说明了复数可用来表示某些实际的物理量．当非零向量 z_1、z_2 不共线时(图 1-2)，作起点在原点的向量 z_1 及 z_2，以 z_1 及 z_2 为边

作平行四边形，从原点出发沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2，当 z_1 及 z_2 的方向相同或相反时，z_1+z_2 也容易作出. 由于 $-z_2$ 表示与 z_2 长度相同，方向相反的向量(称 z_2 的反向量)，而且 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$，可以仿照 z_1+z_2 的情形作出 z_1-z_2 (图1-2)；显然，复数相减与向量相减的法则也一致.

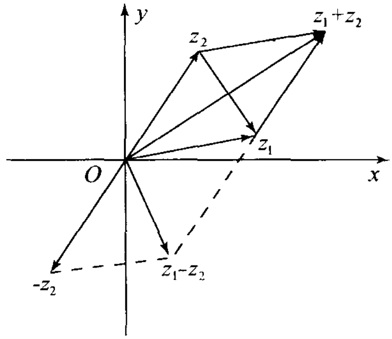


图 1-2

以下导出两复数的和及差的模的几个不等式，如图1-2，从点 z_1 出发到 z_1+z_2 的向量是向量 z_2，于是 $|z_1|$，$|z_2|$ 及 $|z_1+z_2|$ 构成一个三角形的三边，故有

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1-9}$$

$$|z_1+z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||. \tag{1-10}$$

在式(1-9)及式(1-10)中，用 $-z_2$ 代替 z_2 就得到

$$|z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1-11}$$

$$|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||. \tag{1-12}$$

也可直接证明式(1-11)及式(1-12). 其实在图 1-2 中，从点 z_2 出发到点 z_1 的向量就是 z_1-z_2，考虑向量 z_1，z_2 及 z_1-z_2 所构成的三角形，就可推出这两个不等式. 从图 1-2 还可看出：$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 及 z_2 的距离. 此外不难证明，即使向量 z_1，z_2 及 z_1+z_2 共线，式(1-9)及式(1-10)仍然成立.

关于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模，还有下列关系：

$$|z| \geqslant |\operatorname{Re} z|, \tag{1-13}$$

$$|z| \geqslant |\operatorname{Im} z|, \tag{1-14}$$

$$|z|^2 = z\bar{z}. \tag{1-15}$$

利用复数四则运算，易得下列等式

$$z+\bar{z} = 2\operatorname{Re} z; \tag{1-16}$$

$$z-\bar{z} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z; \tag{1-17}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \tag{1-18}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \tag{1-19}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0). \tag{1-20}$$

把非零复数 z_1 及 z_2 写成三角表示式：

$$z_1 = |z_1|(\cos \operatorname{Arg} z_1 + \mathrm{i} \sin \operatorname{Arg} z_1),$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \operatorname{Arg} z_2 + \mathrm{i} \sin \operatorname{Arg} z_2).$$

由乘法定义得

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)]$$

据此得

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1-21}$$

及

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1-22}$$

式(1-22)应理解为：对于 $\operatorname{Arg}(z_1 z_2)$ 的任一值，一定有 $\operatorname{Arg} z_1$ 及 $\operatorname{Arg} z_2$ 的某一值与之对应，使得等式成立，反之亦然. 其次由除法的定义得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0), \tag{1-23}$$

及

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2 \quad (z_1\neq 0,\quad z_2\neq 0), \tag{1-24}$$

等式(1-24)应与等式(1-22)类似地理解. 由此知：

(1) 两非零复数乘积是一个复数，其模等于它们模的乘积，其辐角等于它们辐角的和；

(2) 两非零复数商是一个复数，其模等于它们模的商，其辐角等于它们辐角的差.

因此，当用向量表示复数时，可以说两非零向量 z_1，z_2 的积 z_1z_2 是一个向量，它是由向量 z_1 旋转一个角度 $\operatorname{Arg} z_2$ 并伸长(或缩短)到 $|z_2|$ 倍得到的(图 1-3)，特别是有，当 $|z_2|=1$ 时，乘法变成了只是旋转，如 iz_1 相当于 z_1 逆时针旋转 90°；又当 $\operatorname{Arg} z_2=0$ 时，乘法变成了仅仅是伸长(或缩短).

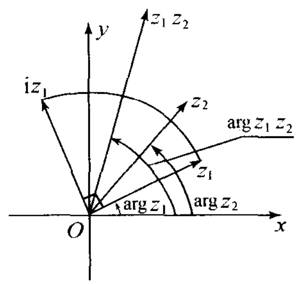


图 1-3

类似地，可描述两个非零复数商的几何意义.

最后考虑复数的乘幂，设 $z\neq 0$，n 为正整数，z^n 表示 n 个复数 z 的乘积，由乘法运算法则得

$$z^n=|z|^n[\cos(n\operatorname{Arg} z)+i\sin(n\operatorname{Arg} z)],$$

若规定 $z^0=1$，这公式当 $n=0$ 时也成立. 定义

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\frac{1}{|z|^n[\cos(n\operatorname{Arg} z)+i\sin(n\operatorname{Arg} z)]}$$

$$=|z|^{-n}[\cos(-n\operatorname{Arg} z)+i\sin(-n\operatorname{Arg} z)].$$

则对任意的整数 m，有

$$z^m=|z|^m[\cos(m\operatorname{Arg} z)+i\sin(m\operatorname{Arg} z)] \tag{1-25}$$

当 $|z|=1$ 时，得棣莫佛(De Moivre)公式：

$$z^m=\cos(m\operatorname{Arg} z)+i\sin(m\operatorname{Arg} z). \tag{1-26}$$

设 $n(n\geqslant 2)$为正整数，定义 $z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$ 为满足 $w^n=z$ 的复数 w，并称