华章数学译丛

28

Applied Partial Differential Equations

with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Fourth Edition)

实用偏微分方程

（原书第4版）

（美）Richard Haberman 著
南卫理公会大学

郁中丹 李援南 刘歆 宋燕红 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

28

Applied Partial Differential Equations

with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Fourth Edition)

实用偏微分方程

（原书第4版）

（美）Richard Haberman 著
南卫理公会大学

郁中丹 李援南 刘歆 宋燕红 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍偏微分方程的基本概念及其应用，主要内容包括热传导方程、分离变量法、傅里叶级数、施图姆-刘维尔特征值问题、偏微分方程的有限差分数值法、非齐次问题、定常问题的格林函数、无穷域问题、波动方程和热传导方程的格林函数、线性和拟线性波动方程的特征线法以及偏微分方程的拉普拉斯变换解法等.

本书注重应用、内容广泛、层次清晰，适合作为高等院校理工科非数学专业高年级本科生或研究生数学物理方程课程的教材或教学参考书，还可以作为数学专业同类课程的参考书.

本书版权登记号：图字：01-2005-0528

图书在版编目(CIP)数据

实用偏微分方程(原书第4版)/(美)哈伯曼(Haberman, R.)著；郇中丹等译. —北京：机械工业出版社，2007.2

(华章数学译丛)

书名原文：Applied Partial Differential Equations: with Fourier Series and Boundary Value Problems, Fourth Edition

ISBN 978-7-111-20022-2

Ⅰ.实…　Ⅱ.①哈…　②郇…　Ⅲ.偏微分方程　Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第120218号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037)

责任编辑：方　敏　迟振春

北京京北制版厂印刷·新华书店北京发行所发行

2007年2月第1版第1次印刷

186mm×240mm·34.25印张

定价：66.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

本书译自美国得克萨斯州南卫理公会大学(Southern Methodist University)数学系 Richard Haberman 教授所著的《Applied Partial Differential Equations》一书，是作者在美国多所大学长期讲授偏微分方程课程的基础上改进而成的．自 1983 年第 1 版出版以来，先后经过了三次修改，至今已经使用了 20 多年．本书无论从讲授方法上还是从讲授内容上，对于我国的数学物理方法和偏微方程课程都有很好的借鉴意义．

本书作者自 1971 年在麻省理工学院获得应用数学博士学位后，长期从事数学建模和非线性波动、非线性动力系统及奇异扰动法方面的研究，并且十分注意在教学中反映相关研究领域中的思想方法和成果，这也成为本书的基本特点．

本书对所涉及问题的数学模型建立和定解条件意义的描述都作了十分详尽的讲解，即便读者不完全具备相关的物理知识，在学习上也不会有多少困难．本书以傅里叶方法(傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换)作为讲授的主线，做到了由浅入深和举重若轻，对于我国有关课程的设计和讲授有着实际的参考价值．本书的起点虽然不高，但观点现代，内容上也涉及了不少前沿问题，特别是第 14 章可以作为非线性波动的入门资料．另外，作者对数值解法的讲授能够帮助学生较好地理解微分方程和差分方程之间的密切联系．当然，限于作者的背景，本书的精彩部分主要在波动问题，虽然有些部分的解释有琐碎之嫌，但这些并不妨碍本书成为一本优秀的偏微分方程教材．

从我国数学物理方程课程的现状来说，本书可以作为理工科非数学专业高年级本科生或研究生相关课程的教材或教学参考书，还可以作为数学专业同类课程的参考书．

本书由北京师范大学数学系的郇中丹教授以及北京电子科技学院教师李援南、刘歆和宋燕红共同翻译而成．具体分工是：李援南、刘歆和宋燕红完成了书稿的基本翻译，郇中丹进行了全书的校勘和统稿工作．

前　言

本书讨论偏微分方程在工程技术科学与自然科学中的应用，适合作为涉及傅里叶级数、正交函数或边值问题的课程的教材，也可以在与格林函数、变换方法或部分高级工程数学和自然科学中的数学方法相关的课程中使用. 当然，读者也可以把本书视为应用数学的入门书.

本书突出简单的热传导、振动弦和振动膜模型，从物理原理仔细推演方程，引出许多数学主题，并耐心讨论求解方法. 对书中的数学结果通常给出物理解释，定理证明（如果给出的话）放在根据解释性实例所做的说明之后. 本书包含 1000 多道难易程度不同的习题，书后还附有对带“ * ”号习题的解答.

本书对分离变量法、傅里叶级数、正交函数和傅里叶变换等标准内容进行了相当详细的讨论；深入介绍了偏微分方程的有限差分数值法；简要叙述了有限元方法；广泛介绍了线性与非线性波动方程的特征线法，包括对交通流量冲击波动态特征的讨论；详细介绍了非齐次问题，其中包括拉普拉斯方程、热传导方程和波动方程的格林函数. 此外，本书还包含大量其他主题，如傅里叶级数的微分与积分、施图姆-刘维尔特征函数与多维特征函数、瑞利商、振动圆形膜的贝塞尔函数以及球面问题的勒让德多项式；包含某些更深的题材，如大特征值的渐近展开式、利用弗雷德霍姆择一性计算扰动频率、有限差分法的稳定性条件以及散射与逆散射.

简单讨论的应用包括：流体流过圆柱体的曳力与升力，光波与声波的斯涅耳折射律，从波动方程推导短时距方程，水波的色散关系，波导与光纤.

本书在作者对多所大学（麻省理工学院、加州大学圣迭戈分校、拉特格大学、俄亥俄州立大学和南卫理公会大学）的不同学生讲授这门课程的经验的基础上做了改进. 读者需要具备微积分和初等常微分方程的知识，书中有时会在需要的地方对这些知识加以复习. 对初学学生开设的课程，核心内容一般包含第 1 ~ 5 章与第 7 章中的大部分材料，不过通常还需要再补充少许其他题材. 本书对教师而言有一定的灵活性，因为第 6 ~ 13 章的大部分内容仅依赖于第 1 ~ 5 章的材料. 第 11 章关于热传导方程与波动方程的格林函数例外，它依赖第 9 章和第 10 章的材料.

第 14 章是更深入的内容，讨论线性与非线性色散波、稳定性和扰动法. 这一章是自含的，对优秀本科生来说是比较容易理解的. 该章分析线性色散波的群速度与包络方程，其应用包括光学系统中的彩虹焦散线；讨论非线性色散波，包括对弱非线性长波方程（KdV 方程）和弱非线性波包络方程（非线性薛定谔方程）的孤立子的初步讨论；此外，讨论偏微分方程的不稳定性与分歧现象以及扰动法（多尺度问题与边界层问题）. 第 14 章描述了当代物理学问题中偏微分方程的一些前沿研究成果.

我尽力保留了第 3 版的原貌，使过去的读者不会感到生疏. 前一版的习题几乎原封不动地保留下来，以便原先读者的过渡. 书中仅有少量的习题是新加的（特别是第 1 章）. 第 4 版做了许多改进，新加的材料包括：化学污染物的扩散、频率的伽辽金数值逼近、热传导方程的相似

解、波动方程的二维格林函数、冲击波速度及其分解的非唯一性、行进冲击波的空间结构、常微分方程组的稳定性与分歧理论、两个空间维的波包络方程、调制不稳定性的分析、长波不稳定性、反应扩散方程的模式形成以及图灵不稳定性等.

书中用 200 多幅图形解释各种概念，这些图形是作者用 MATLAB 制作的. 大部分数学图形文件可以从我的 Web 网页 http://faculty. smu. edu/rhaberma 获得. 现代技术中的图形能力是特别重要的，我在书中不遗余力地用三维可视化图形解释各种概念.

总的说来，我已清楚地说明偏微分方程的许多方面，引领读者进入这一广阔而重要的领域. 当学生有了一定能力与理解力后，可以把本书作为参考读物，至于补充材料，读者应从其他书籍获取，例如“参考文献”中所列的某些书籍.

最后希望本书能使读者在研究数学同自然科学的关系中获得乐趣.

作者对审稿人 Andrew Belmonte(宾夕法尼亚州立大学)、Julie Levandosky(斯坦福大学)和 Isom Herron(Rensselaer 工艺学院)深表感谢.

我也要感谢本书以往、现在和未来的读者(学生与教师). 此外，在准备前一版的 LaTeX 中，Shari Webster 曾给予我很大帮助，在此表示由衷的谢意.

Richard Haberman
rhaberma@ mail. smu. edu

目　录

第 1 章　热传导方程

1.1　引言

我们要讨论有关偏微分方程基本问题的解，这些问题来自科学和工程的各个领域. 偏微分方程(PDE)是含有偏导数的数学方程，例如，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+3\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{1.1.1}$$

讨论可以从确定什么样的函数 $u(x, t)$ 满足(1.1.1)开始，不过，最好还是从一个物理问题开始研究. 这样做有两个好处. 第一，介绍用数学方法去分析物理问题时，这些方法可能会更加吸引读者；第二，实际上，我们会发现物理研究往往会激发数学的进一步研究.

许多工程和自然科学领域中，偏微分方程方面的研究占有重要地位. 这方面的内容无法列出一张完整的清单. 不过，下面的例子应该使读者看到，很多领域都高度依赖于偏微分方程的研究：声学、空气动力学、弹性力学、电动力学、流体动力学、地球物理学(地震波传播)、传热学、气象学、海洋学、光学、石油工程学、等离子物理(电离液体和气体)和量子力学.

在分析和解决问题时，应用数学的方法包括以下三个步骤：

1. 建立方程.
2. 求解.
3. 解释.

我们从建立描述热能传递的热流方程开始. 热能是由分子的不规则运动产生的. 在热能流 1
动中有两种基本过程：传导和对流. 传导由相邻分子的碰撞产生，一个分子的振动动能被传送到其最近的分子. 这种传导导致了热能的传播，即便分子本身的位置没有什么移动，热能也传播了. 此外，如果振动的分子从一个区域运动到另一个区域，它会带走其热能. 这种类型的热能运动称为对流. 为了从相对简单的问题开始讨论，这里仅研究热流，在热流中，传导比对流显著得多. 因此，我们主要考虑固体中的热流，当然，若流体(液体和气体)的速度充分小，流体的热传递也是以传导为主.

1.2　一维杆中热传导方程的推导

热能密度. 考虑一根具有定横截面积 A 的杆，其方向为 x 轴的方向(由 $x=0$ 至 $x=L$)，如图 1.2.1 所示. 设单位体积的热能量为未知变量，叫做热能密度：

$$\boxed{e(x,t)\equiv \text{热能密度}.}$$

假设通过截面的热量是恒定的，杆是一维的. 做到这一点的最简单方法是将杆的侧面完全绝热，这样热能就不能通过杆的侧面扩散出去. 对 x 和 t 的依赖对应于杆受热不均匀的情形；热能密度由一个截面到另一个截面是变化的.

热能. 考察杆介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间的薄片，如图 1.2.1 所示. 若热能密度在薄片内是常

2 数，则薄片内的总能量是热能密度和薄片体积的乘积．一般来说，能量密度不是常数．不过 Δx 非常小时，$e(x,\ t)$ 在薄片内可以近似为常数，这样由薄片体积为 $A\Delta x$，

$$\boxed{\text{热能} = e(x,t)A\Delta x.}$$

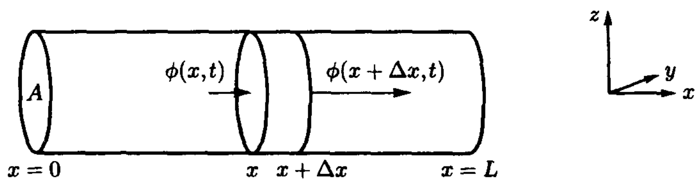

图 1.2.1　热能由薄片流入和流出的一维杆

热能守恒．在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的热能随时间的变化都是由流过薄片两端（x 和 $x+\Delta x$）的热能和内部（正的或负的热源）产生的热能所引起的．由于假设侧面是绝热的，所以在侧面上没有热能变化．基本的热流过程可由文字方程表述为

$$\boxed{\text{热能瞬时变化率} = \text{单位时间流过边界的热能} + \text{单位时间内部产生的热能.}}$$

这称作热能守恒．对小薄片，热能的变化率是 $\frac{\partial}{\partial t}[e(x,\ t)A\Delta x]$，其中使用偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}$ 是由于 x 为固定的．

热通量．在一维杆中，热能的流向向右或向左．热通量是：

$$\boxed{\phi(x,t) = \text{热通量（单位时间内热能流向单位表面积右边的热能量）.}}$$

如果 $\phi(x,\ t)<0$，这意味着热能流向左边．单位时间内流过薄片边界的热能是 $\phi(x,\ t)A-\phi(x+\Delta x,\ t)A$，由于热通量是单位表面积的流量，因此它必须与表面积相乘．如果 $\phi(x,\ t)>0$ 和 $\phi(x+\Delta x,\ t)>0$，如图 1.2.1 所示，则单位时间内流过 x 点的热流增加切片内的热能，而在 $x+\Delta x$ 点的热流减少热能．

热源．我们也考虑热能的内部来源：

3 $$\boxed{Q(x,t) = \text{单位时间在单位体积内产生的热能，}}$$

这或许是由于化学反应或电加热造成的．对于薄片，$Q(x,\ t)$ 在空间上近似为常数，故该薄片单位时间内产生的热能近似为 $Q(x,\ t)A\Delta x$.

热能守恒（薄片）．热能变化率是由流过边界的热能和内部热源产生的热能造成的：

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x,t)A\Delta x] \approx \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x. \tag{1.2.1}$$

由于对小横截面薄片，许多量被近似为常数，方程(1.2.1)不是精确的．我们断言：当 $\Delta x\to 0$ 时，(1.2.1)会逐渐地精确．在给出详细的（和数学上严格的）推导之前，先解释一下当 $\Delta x\to 0$ 时，极限过程的基本思想．当 $\Delta x\to 0$ 时，(1.2.1)的极限给出的信息 $0=0$ 没有意义．不过，如果先用 Δx 去除，再取当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，就得到

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x,t)-\phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} + Q(x,t), \tag{1.2.2}$$

其中，常数横截面面积被消去了．我们肯定这个结果是准确的（没有小误差），因此，用

(1.2.2)中的=替代(1.2.1)中的≈. 在 $\Delta x\to 0$ 的极限过程中，t 是固定的. 因此，由偏导数定义，

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+Q.} \tag{1.2.3}$$

热能守恒(精确). 热能守恒的另一种推导方法具有不必限制在小薄片上的优点，也避免了极限过程($\Delta x\to 0$)中的近似计算. 考虑一维杆(见图1.2.2)上的有限段(由 $x=a$ 至 $x=b$)，要研究热能在此中的守恒. 其热能是 $\int_a^b e(x,t)A\mathrm{d}x$，即各无穷小薄片上热能贡献的总和. 同样，它的变化是由流过两端($x=a$ 和 $x=b$)的热能和在该段内产生的热能所造成的，因此，(消去常数 A 后)得到

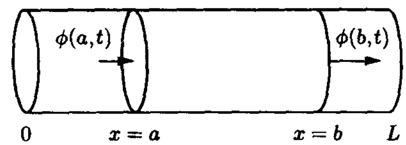

图 1.2.2 流入和流出杆上有限段的热能

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b e\mathrm{d}x=\phi(a,t)-\phi(b,t)+\int_a^b Q\mathrm{d}x.} \tag{1.2.4}$$

从技术上说，由于 $\int_a^b e\mathrm{d}x$ 只依赖于 t 而不依赖于 x，故而在(1.2.4)中出现通常导数 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 然而，如果 a 和 b 是常数(并且 e 是连续的)，

4

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b e\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial e}{\partial t}\mathrm{d}x,$$

由于在积分号下的导数是在固定 x 时计算的，所以必须用偏导数取代通常导数. 注意到

$$\phi(a,t)-\phi(b,t)=-\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x$$

(ϕ 连续可微时，此公式成立[㊀])，(1.2.4)中的每一项都是一个普通积分. 由此得到

$$\int_a^b\left(\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}-Q\right)\mathrm{d}x=0.$$

这个积分对任意 a 和 b 都必为零，即对任意积分限，其在曲线下的面积必为零，这仅当被积函数本身恒为零时才有可能[㊁]. 由此重新导出了(1.2.3)，

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+Q.} \tag{1.2.5}$$

积分守恒定律(1.2.4)比微分形式(1.2.5)更基本. 在一般物理变量是连续的情况下，方程(1.2.5)是成立的.

有必要对 $\partial\phi/\partial x$ 前面的负号作进一步的解释. 例如，若对于 $a\leqslant x\leqslant b$，$\partial\phi/\partial x>0$，则热通

㊀ 这是积分基本定理之一.

㊁ 这个结果的证明大都是不漂亮的. 假设 $f(x)$ 是连续的，且对于任意 a 和 b，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 要证明对所有 x，$f(x)=0$. 这个结论可以按下面的方式来证明：假设存在点 x_0 满足 $f(x_0)\neq 0$，再证明其矛盾. 若 $f(x_0)\neq 0$ 且 $f(x)$ 是连续的，那么存在 x_0 邻近的某个区域，$f(x)$ 在其中是同号的. 在该区域内取 a 和 b，因为 $f(x)$ 在其中同号，所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 这与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，所以，$f(x_0)\neq 0$ 是不可能的. 由此(1.2.5)得证.

量 ϕ 是 x 的增函数. 流向右边 $x=b$ 点的热大于流向 $x=a$ 点的热(假设 $b>a$). 所以(忽略源 Q
5 的影响), 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的热能一定是减少的, 因此导致了(1.2.5)中的负号.

温度和比热容. 我们通常用温度来描述物质,

$$\boxed{u(x,t) = \text{温度},}$$

而不是用物质的热能密度. 区分温度和热能这两个概念未必是一件简单的事. 直到18世纪中期, 精确的实验仪器才使物理学家认识到, 将两种不同的物质从一个温度升高到另一个温度, 需要的热能量可能是不相同的. 这就有必要引入比热容(或热容量):

$$\boxed{c = \text{比热容(单位质量的物质升高一个单位温度所需要的热能)}.}$$

一般而言, 根据实验(和我们的定义), 物质的比热容 c 依赖于温度 u. 例如, 将同一种单位质量的物质从0℃升高到1℃所需要的热能可能就与从85℃升高到86℃所需要的热能是不相同的. 比热容依赖于温度的热流问题在数学上是相当复杂的. (习题1.2.6简短地讨论了这种情况.)通常对于限制的温度区间, 比热容大概与温度无关. 不过, 实验表明, 升温不同的物质需要不同的热能量. 由于要建立在各种情形下都正确的方程, 这些情形包括一维杆的构成可能会随位置而改变, 因此, 比热容要依赖于 x, $c=c(x)$. 在许多问题中, 杆都是由一种物质所组成的(均匀的杆), 我们就定比热容 c 为常数. 事实上, 本书(和其他的书)中大多数求解出的问题都相应于这一近似, c 为常数.

热能. 一个薄片内的热能是 $e(x,t)A\Delta x$. 另一方面, 它也定义为从基准温度0℃升高到实际温度 $u(x,t)$ 所需的能量. 因为比热容与温度无关, 单位质量的热能就是 $c(x)u(x,t)$. 这样我们需要引入质量密度 $\rho(x)$:

$$\boxed{\rho(x) = \text{质量密度(单位体积质量)},}$$

允许它随 x 变化, 这可能因为杆是由不均匀物质组成的缘故. 薄片的质量是 $\rho A\Delta x$. 因而, 在任意薄切片内的热能是 $c(x)u(x,t)\cdot\rho A\Delta x$, 结果是

6

$$e(x,t)A\Delta x = c(x)u(x,t)\rho A\Delta x.$$

这样就解释了热能和温度之间的基本关系:

$$\boxed{e(x,t) = c(x)\rho(x)u(x,t).} \tag{1.2.6}$$

该公式表明: 单位体积的热能等于单位质量单位度的热能乘以温度乘以质量密度(单位体积质量). 当用(1.2.6)消去热能密度后, 热能守恒(1.2.3)或(1.2.5)变为

$$\boxed{c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q.} \tag{1.2.7}$$

傅里叶定律. (1.2.7)通常被看成是含有两个未知函数的方程, 温度 $u(x,t)$ 和热通量(单位表面积单位时间的热流量) $\phi(x,t)$. 那么热能如何和为什么流动呢? 换句话说, 我们需要一个关于热能流动对温度场依赖关系的表达式. 下面, 先总结一些我们熟悉的热流定性性质:

1. 若在某个区域内温度是常数, 则没有热能流动.
2. 若存在温差, 则热能从较热的区域流向较冷的区域.
3. (对同一种物质)温差越大, 热能的流动越大.
4. 即使是在相同的温差下, 不同物质热能的流动是不同的.

傅里叶(1768—1830)认识到了这四条性质，并把这些性质(和众多实验)总结为公式

$$\boxed{\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x},} \tag{1.2.8}$$

这就是*傅里叶热传导定律*. 其中$\partial u/\partial x$是温度的导数；它是温度的斜率(作为一个固定t的x函数)；它表示(单位长度的)温差. 方程(1.2.8)说明，热通量与(单位长度的)温差成比例. 若温度u随x上升而上升(即温度向右更热)，$\partial u/\partial x>0$，则(由性质2)热能向左流动. 这就解释了(1.2.8)中的负号.

我们用K_0表示比例系数. 它测量物质的导热能力，称为*导热系数*. 实验表明，不同的物 7
质有不同的导热性能，K_0与物质有关. K_0越大，在相同温差下，热能流量越大. K_0值低的物质导热性差(适用于住房隔热). 对一根由不同物质组成的杆，K_0是x的函数. 此外，实验表明，在不同的温度下，多数物质的导热能力是不同的，$K_0(x, u)$. 不过，就像在比热容c的情形一样，在具体问题中，K_0对温度的依赖性常常不被看重. 因此，在本书中就假设导热系数K_0只与x有关，$K_0(x)$. 事实上，我们通常只讨论均匀杆，其中K_0是一个常数.

热传导方程. 把傅里叶定律(1.2.8)带入热能守恒方程(1.2.7)，就得到偏微分方程：

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q.} \tag{1.2.9}$$

我们通常把热源Q看作是给定的，只有温度$u(x, t)$是未知的. 有关的热系数c，ρ，K_0都与物质有关，因而可能是x的函数. 在均匀杆的情况，c，ρ，K_0都是常数，偏微分方程(1.2.9)变为

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = K_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q.$$

此外，若没有热源，$Q=0$，则用常数$c\rho$去除之，偏微分方程变为

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{1.2.10}$$

其中常数k为

$$k = \frac{K_0}{c\rho},$$

称为*热扩散率*，即导热性系数除以比热容和质量密度的乘积. 方程(1.2.10)常常称为*热传导方程*；它对应于无热源和恒定热条件的情形. 如果热能开始集中在一个地方，则(1.2.10)描述的是热能如何扩展，一个通称为*扩散*的物理过程. 除温度外的其他物理量以与此十分相同的方式平缓开来，也满足相同的偏微分方程(1.2.10). 因此，(1.2.10)也称作*扩散方程*. 例如，化学物(香水和污染物)浓度$u(x, t)$在某些一维情况就满足扩散方程(1.2.8). 8

初始条件. 描述热能流量的偏微分方程(1.2.9)或(1.2.10)，有关于时间的一阶导数. 当常微分方程有一阶导数时，初值问题就为求解具有一个初始条件的微分方程. 而关于一个质点位置为x的牛顿运动定律给出了一个二阶常微分方程，$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2=$力. 它包含二阶导数. 初值问题为求解具有两个初始条件，初始位置x和初始速度$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$的微分方程. 利用这些条件(包括对力的了解)，通过解具有初始条件的微分方程，就能够预测质点在x方向上的未来运动.

我们想对偏微分方程执行同样的步骤，即预测未来的温度. 由于热传导方程有一阶时间导数，必须给出一个初始条件(IC)(通常在 $t=0$ 时)，初始温度. 但是它可能不是常数，且只与 x 有关. 所以，要给出初始温度分布，

$$u(x,0)=f(x).$$

那么这些信息足够预测未来的温度吗? 我们知道初始温度分布，知道温度按照偏微分方程(1.2.9)或(1.2.10)变化. 我们还需要知道在两个边界 $x=0$ 和 $x=L$ 点发生的情况. 不知道这些，我们就无法预测未来的温度. 对应(1.2.9)或(1.2.10)中的二阶空间导数，还需要两个条件，通常是在一个边界点一个条件. 我们将在下一节讨论这些边界条件.

化学污染物的扩散. 设 $u(x, t)$ 为单位体积中化学物的密度或浓度. 考虑具有常数横截面面积 A 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的一个一维区域(图 1.2.2). 该区域内化学物的总量是 $\int_a^b u(x,t)A\,dx$. 我们引入化学物的通量 $\phi(x, t)$，单位面积单位时间流向右边的化学物的量. 关于该区域化学物总量的时间的变化率，等于单位时间化学物的流入量减去单位时间化学物的流出量. 所以，消去常数横截面面积 A 后，得到化学浓度的积分守恒定律:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx=\phi(a,t)-\phi(b,t).} \tag{1.2.11}$$

由公式 $\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx=\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}dx$ 和 $\phi(a,t)-\phi(b,t)=-\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x}dx$，就得到 $\int_a^b\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dx=0$.

因为对任意区域，此积分为零，所以，被积函数一定为零，这样就导出了化学浓度的微分守
9 恒定律:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}=0.} \tag{1.2.12}$$

在固体物质中，化学物从高浓度的区域向低浓度的区域扩展. 根据 Fick 扩散定律，流量与化学物的空间导数 $\partial u/\partial x$ 成比例:

$$\boxed{\phi=-k\frac{\partial u}{\partial x}.} \tag{1.2.13}$$

如果浓度 $u(x, t)$ 在空间内是常数，则无化学物流动. 如果化学物浓度是向右边增加的 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}>0\right)$，则化学物原子向左迁移，反之亦然. 比例常数 k 称为化学物扩散率，它可以用实验来测量. 当把 Fick 定律(1.2.13)用于基本守恒定律(1.2.12)时，可见，化学物浓度满足扩散方程:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{1.2.14}$$

因为我们假设扩散率近似为一个常数，所以化学物浓度的 Fick 扩散定律与热扩散的傅里叶定律是类似的. 其推导也是相当类似的.

习题 1.2

1.2.1 对负号作简要解释:

(a) 在守恒定律(1.2.3)或(1.2.5)中，如果 $Q=0$. (b) 在傅里叶定律(1.2.8)中.