

Xiangshi Lilun yu Jiegou Moxing Shiyān

相似理论与结构 模型试验

杨俊杰 编著

武汉理工大学出版社

本书获浙江工业大学专著与研究生教材出版基金资助
(基金编号 20040207)

相似理论与结构模型试验

杨俊杰 编著

武汉理工大学出版社

内 容 提 要

本书从相似及模型的基本概念出发,较系统地介绍了相似理论三个基本定理,并对相似准则的几种求法以及在结构模型设计中对相似条件的一般处理方法作了较全面的阐述。简要介绍了结构模型试验中常用的模型材料和试验方法,以钢结构、混凝土结构为例给出了富有特色的涉及到房屋建筑结构、桥梁结构、土体围护结构、水工及港工结构、隧道衬砌结构等多领域的结构模型试验实例,尤其注重对采用振动台、离心机、风洞等试验手段以及考虑结构与介质共同作用的复杂和新型的工程结构模型试验的介绍。

本书可作为高等学校土木工程结构类研究生的教材,也可供土木工程各专业科研、设计人员和现场工程检测人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

相似理论与结构模型试验/杨俊杰编著. —武汉:武汉理工大学出版社,2005

ISBN 7-5629-2200-4

I. 相… II. 杨… III. ① 相似理论 ② 结构模型-模型试验 IV. N032

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 007437 号

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路 122 号 邮政编码:430070)

<http://cbs.whut.edu.cn>

E-mail: wutp@public.wh.hb.cn

经 销 者:各地新华书店

印 刷 者:武汉理工大印刷厂

开 本:787×960 1/16

印 张:22.625

字 数:443 千字

版 次:2005 年 1 月第 1 版

印 次:2005 年 1 月第 1 次印刷

印 数:1~2000 册

定 价:34.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向本社发行部调换。本社购书热线电话:
(027)87397097 87394412

序 言

结构的设计理论及结构安全性一直是土木工程的核心问题,结构在不同外部作用条件下的承载及变形能力,结构的破坏机理和结构与作用之关系是结构研究的主要内容。由于结构自身的复杂性和结构与周围介质特性的相关性,使大部分结构工程问题难以直接采用数理解析方法解决。而直接用实际结构进行试验研究往往是不可能实现的,并且也会使研究具有很大的局限性。借助于“模拟”方法,采用物理相似模型进行结构问题的研究,一直是解决工程结构问题的主要途径之一,土木工程发展的历史也证明了这是一种行之有效的研究方法。当然,这也是工程结构类研究生所要掌握的一种重要的研究方法。

相似模型试验的基础是相似理论,相似理论指导结构模型试验,同时,结构模型试验也不断丰富相似理论的内容。作为一本研究生的教材,本着讲清理论、重于实践的原则,将相似理论与结构模型试验放在一起学习,会收到更切合实际的学习效果。

本书第一章绪论部分除阐述了相似及模型等基本概念外,还简要说明了相似理论及模型试验的发展历史、意义以及在结构工程研究中的作用等。第二章至第四章是相似理论的内容,着重介绍了相似理论的基本定理和相似准则的求法。第五、第六章介绍了模型设计中需要遵循的基本相似条件、结构模型的常用材料及模型试验方法。第七章至第十章分钢结构、混凝土结构、结构动力模型和地下结构等类型,介绍了结构模型试验中的常见问题及解决办法,同时给出了涉及建筑结构、桥梁、隧道、岩土等工程结构模型和结构与气、液、岩、土多种介质相互作用模型试验的实例。通过实例可以学习如何根据研究的主要问题合理选定结构试验方案,简化相似条件,确保试验结果的可靠性,并正确地将模型试验的结果推广到实际结构中去,从中可以加深理解相似理论的基本概念,掌握工程模型的设计、测试、成果分析的主要方法和技巧。

本书除可作为土木工程类专业研究生的教材外,也可供设计、科

研及高等院校和科研院所从事结构模型方法研究和结构测试工作的有关人员参考,还可供广大从事土木工程结构设计和其他工程技术人员参考。

由于作者个人的知识能力所限,加上结构模型试验所涉及的范围十分广泛,且发展迅速,书中会存在一些缺点和欠妥之处,敬请各位读者予以批评指正。

编著者

2004年7月于杭州

目 录

第一章 绪论	(1)
第一节 基本概念	(1)
第二节 相似理论的发展简史	(3)
第三节 模型试验的发展	(5)
第二章 相似的概念与定义	(8)
第一节 概述	(8)
第二节 相似变换	(9)
第三节 几何相似	(10)
第四节 物理量相似	(12)
第五节 相对型方程	(13)
第六节 现象相似	(17)
第三章 相似理论基本定理	(18)
第一节 量纲理论简述	(18)
第二节 相似第一定理	(21)
第三节 相似第二定理	(22)
第四节 相似第三定理	(24)
第四章 相似准则的导出方法	(28)
第一节 方程分析法导出相似准则	(28)
第二节 用量纲分析法导出相似准则	(33)
第三节 用矩阵法导出相似准则	(36)
第五章 模型设计	(40)
第一节 静力结构模型相似关系	(41)
第二节 动力结构模型的相似关系	(48)
第三节 温度应力模型相似条件	(50)
第四节 地下结构模型相似条件	(51)
第六章 模型材料与试验方法	(53)
第一节 模型材料	(53)
第二节 试验方法	(64)
第七章 钢结构模型试验	(99)
第一节 钢结构模型试验中的有关问题	(99)
第二节 钢桁梁模型试验	(112)
第三节 输电塔模型试验	(122)
第四节 空间钢网壳结构模型试验	(128)

第五节	三管梭形钢格构柱模型稳定性试验	(137)
第六节	钢结构连接节点模型试验	(142)
第八章	混凝土结构模型试验	(150)
第一节	混凝土结构模型试验中有关问题	(150)
第二节	混凝土结构的有机玻璃模型试验	(156)
第三节	混凝土高桩承台板的三维光弹模型试验	(167)
第四节	混凝土结构的砂浆模型试验	(172)
第五节	混凝土结构的微混凝土模型试验	(186)
第六节	钢混组合压力管道结构模型试验	(204)
第九章	结构动力模型试验	(209)
第一节	结构动力模型试验中有关问题	(209)
第二节	结构激振动力模型试验	(221)
第三节	结构的拟静力试验模型	(233)
第四节	振动台抗震试验的结构模型	(252)
第五节	结构模型风洞试验	(281)
第十章	地下结构模型试验	(294)
第一节	岩土介质结构模型试验中的有关问题	(294)
第二节	地层与衬砌结构模型试验	(299)
第三节	基坑及边坡支护模型试验	(313)
第四节	桩的室内模型试验	(327)
第五节	沉井侧摩阻力模型试验	(336)
第六节	岩土工程离心模型试验	(346)
参考文献		(353)

第一章 绪 论

第一节 基 本 概 念

1. 相似

指自然界中两个及两个以上现象在外在表象及内在规律性方面的一致性。工程界常指“模型”与“工程原型”之间的一致性。

2. 相似理论

说明自然界和工程中各相似现象相似原理的学说。是研究自然现象中个性与共性,或特殊与一般的关系以及内部矛盾与外部条件之间的关系的理论。

相似理论主要应用于指导模型试验,确定“模型”与“原型”的相似程度、等级等。随着计算机技术的不断进步,相似理论不但成为物理模型试验的理论而继续存在,而且进一步扩充其应用范围和领域,成为计算机“仿真”等领域的指导性理论之一。随着“相似”概念日益扩大,相似理论有从自然科学领域扩展到包括经济、社会科学以及思维科学和认知哲学领域的趋势。

3. 相似方法

一种可以把个别现象的研究结果,推广到所有相似现象上去的科学方法。它是以相似理论为指导,一种具体研究自然界和工程中各种相似现象的新方法。

4. 模型

模型是指用于表示或比拟自然现象的物理实体或数学概念。工程界常指的模型是与物理系统密切有关的物理装置,即所谓的物理模型,这也是本书主要讨论的范畴。通过对它的观察或试验,可在需要的方面精确地预测系统的性能。所谓密切有关即为与原型的形态、工作规律或信息传递规律相似,被预测的系统为原型。

5. 模拟与仿真

广义的“模拟”是指对自然现象的一种人为的相似比拟技术,狭义的“模拟”

是指不同物理体系间的相似比拟技术,也称为异类模拟。“仿真”常指不同物理体系间的相似比拟技术,现今常指采用数学手段,利用计算机数值分析方法对工程现象进行研究的一项技术,故也称为“数值模拟”。从本质上讲,两者是一致的,只是在采用的研究手段及路径上有所区别而已。

6. 模型的分类

模型的分类方法很多,称呼也不尽相同,从实用角度可分成以下几类:

(1) 参观用模型——根据实物复制成的分析、讨论用的模型,它能明显地、直观地体现设想,能有效地帮助构思。一般仅保持外形、活动状态相似,常用于新产品、新结构的设计。

(2) 定量研究用模型——根据实物或设想制成的研究事物内部工作规律用的模型。

① 物理模型:保持工作规律相似的模型。模型与原型区别仅在于物理量大小比例不同,而现象的物理本质不变,即原型与模型的物理特性都应被同样的微分方程所描述。这种模型只需要了解与工作规律有关的参量即可进行模型试验研究。因此,在探索事物的变化规律和构想一个新实物时常用物理模型。

工程结构物理模型又根据模型所研究的范围不同可分为弹性模型和强度模型;根据试验加载方法不同又可分为静力模型、动力模型、拟静力模型和拟动力模型等。

② 数学模型:保持信息传递规律相似的模型。模型与原型所进行的物理过程本质可以不同,但信息传递按同一微分方程进行。数学模型只有先建立了微分方程式后才能实现。

(3) 定性研究用模型——根据设想制成的供分析、讨论用的模型。它能明显地、直观地体现设想,能有效地帮助构思。一般仅保持外形、活动状态的相似,常用于新产品、新结构的开发 and 设计。

数学模型随着计算机技术的发展,应用范围日益广泛,包括数值模拟、信息模拟、智能模拟等功能,它可缩短模型试验的时间,减少研究费用。由于物理模型试验是建立数学模型的重要手段,也是检验建立的理论正确与否以及数学模型所得结果是否正确的重要方法之一,所以,两类模型试验必须相辅相成,互相补充,尤其是如建筑结构、桥梁结构、水工结构、地下结构等一些复杂的工程和理论领域内,物理模型的研究仍是必不可少的。模型试验研究作为一种研究手段,它具有如下一些明显的特点:

- 可严格控制试验对象的主要参数而不受外界条件和自然条件的限制,并能做到结果准确;

- 有利于在复杂的试验过程中突出主要矛盾;

- 由于与原型相比,一般是缩小了尺寸,故能节省资金、人力和时间;
- 模型试验能预测一些尚未出现的实物的性能,有时则用来探索一些未尽了解的现象或结构的基本性能或其极限值;
- 当其他分析方法无法有效采用时,模型试验成了现象相似性问题研究的有效研究手段。

第二节 相似理论的发展简史

在古代,人们使用初等数学工具从量的方面探索自然界的规律性,但初等数学只能以常量研究为主,只能研究事物在静止状态下的规律性,这就大大限制了它在客观世界中的应用范围。随着生产科学的发展,为了揭示越来越多接触到的运动着、变动着的自然现象的变化规律,于是出现了高等数学,它的出现是人们认识客观世界的一个飞跃,也是探索自然规律的一种有力工具。但是自然界的现象毕竟是错综复杂的,有许多问题至今以数学的手段尚不能全部或根本无法解决,于是逼迫人们走试验的道路。

人们一开始应用的试验研究方法只是直接的模型试验研究,它曾解决过许多仅仅依靠数学方法无法解决的问题。但直接试验方法常常只能得到个别量之间的规律关系,难以发现或抓住现象的全部本质,从而无法向试验条件范围以外的同类现象推广。于是人们便开始研究如何用试验的结果解决相似的同类现象推广问题。通过长期的实践总结,一种用于指导自然规律研究的全新理论——相似理论便应运而生了。

相似理论主要以相似三定理组成,相似理论本身也经历了一个逐步发展和完善的过程。1686年,Newton(牛顿)研究解决了两个物体运动的相似,提出了确定两个力学系统相似的准则——牛顿准则;1782年,Fourier(傅立叶)提出了两个冷却球体温度场相似的条件。1848年,法国科学家 Bertrand(贝特朗)以力学方程的分析为基础,首次确定了相似现象的基本性质——相似第一定理。相似第一定理的提出很快被运用于许多领域,解决了不少力学、热学、航空动力学方面的问题。

1911~1914年间,由俄国的 Фелерман(费捷尔曼)和美国的 E. Buckingham(波根汉)先后导出了相似第二定理,即 π 定理。1925年爱林费斯-阿法那赛夫以最为宽松的条件证明了相似第一、第二定理的正确性。至此,相似理论基本建立起来了。

相似第一、第二定理是在假设两个现象相似的条件下导出的,但如何判别两现象是否相似呢?直至1930年,前苏联学者基尔皮契夫和古赫曼提出了相似第三定理,回答了如何判别两现象相似的问题。至此,相似理论就形成了较完整的

理论体系。

相似理论从现象发生和发展的内部规律性(数理方程)和外部条件(定解条件)出发,以这些数理方程所固有的在量纲上的齐次性以及数理方程的正确性不受测量单位制选择的影响等为大前提,通过线性变换等数学演绎手段而得到了自己的结论。相似理论的特点是高度的抽象性与广泛的应用性相结合,相似理论的内容并不多,甚至不被当作一个单独的学科。相似理论属于基本理论,从21世纪50年代基本定型之后,难得有所发展,相似理论的新发展成就是方向性量纲分析法和方向性方程分析法。

相似理论是试验的理论,用以指导试验的根本布局问题,它为模拟试验提供指导,尺度的缩小或放大,参数的提高或降低,介质性能的改变等,目的在于以最低的成本和在最短的运转周期内摸清所研究模型的内部规律性。相似理论在现代科技中的最主要价值在于它指导模型试验上。

尽管相似理论本身是一个比较严密的数理逻辑体系,但是,一旦进入实际的应用课题,在很多情况下,不可能是很精确的。因为相似理论所处理的问题通常是极其复杂的,有时,为了使理论在处理问题时能行得通,必须对问题本身进行某些简化,这样的简化使得问题的解决变得简单,节省大量的时间和精力,但自然也得出一些代价,那就是牺牲一些普遍性,即在试验结果向原型推广时受到限制。

相似理论从模型试验的要求而产生、发展至今,已基本形成了一个相对独立的学科,但随着“相似”概念的不断扩大,相似理论本身也需要不断扩展与提高。由于计算机技术的发展,“相似模化”的概念及其计算机数值模拟技术得到广泛的应用,但它与工程实际的不相似性也日益显现出来,就本质而言,就是数值模拟所采用的“模型”是否与工程“原型”相似及相似程度如何的问题。这就给相似理论提供了新的发展空间,也为其提出了新的研究课题。目前已出现的所谓“合交模型”就是一种物理模型与数学模型相结合的相似模型研究方法,它们不只是两种模型方法的简单叠加,而需在两者的“合交界面”,也称为“接口”的设计和控制在保证耦合性和实时传递性,这正是相似理论需要解决的新问题,即什么样的“接口”条件才是相似的,条件被破坏后,相似程度还有多少等。这种“合交模型”在结构抗震研究中的拟动力模型试验中得到了集中体现。

近些年来国内外出现了“相似论”研究,即把相似理论与系统论、控制论、耗散结构论等并提为“几大论”。其应用对象除物理科学以外,兼及人文、社会学科的比拟、决策和预测等方面的研究。将相似理论中对现象相似的概念及规律应用于社会科学领域,对互有共性的事物都从某方面视为相似的,再将对个体的研究推广到与之相似的现象中去。虽然相似理论在这方面的应用和拓展才开始,但也将成为相似理论研究的一个新的方向,现实问题的需要,也同样会成为相似

理论发展的强大推动力。

第三节 模型试验的发展

在模型试验方面我国古代是走在世界前列的,如张衡制造浑天仪时,就先用竹篾做成小模型研究,然后再制成青铜浑天仪。又如北宋杰出的木结构专家俞皓在建造 13 层大型宝塔时就先“小样”进行模型试验,发现了不少原设计的不合理之处,改进后收到了良好的效果。所有这些研究仅仅是保持了几何相似的简易模型,还谈不上用相似原理设计与制作模型,仅仅从“形似”的概念上来认识问题的。这就出现了在比照相似的小船而建造大船时发现桅柱如只按几何尺寸简单放大则强度不够的现象。但尽管如此,这些也极大地推动了我国古代科学技术的发展,并处于世界的领先地位。

在现代科学的发展历程中,模型试验的作用也是不可磨灭的,在工程科学领域内更是如此。理论的预言一定要通过实践检验来证实,而试验是最有效的实践。在结构发展史上,每个新假设和新理论的出现,都是由试验来验证、来证实。而新的试验技术的出现和发展反过来揭示出新的规律,提出新的问题。

如早在 1713 年法国人巴朗提出了中和轴理论,认为受弯梁断面上应力分布是以中和轴为界,一边受拉、一边受压。但当时受试验技术的限制,巴朗的理论只不过是一个假设,而受弯梁断面上存在压应力的理论并不能被人接受。

1767 年法国科学家容格密里在还没有量测仪器的时代,利用简支梁跨中区段上翼缘开小槽,槽中塞硬木垫块,进行受弯试验。试验结果表明,这根梁承载力与未开槽的整体木梁一样。显然,只有上部纤维受压应力才可能有这样的结果。

1821 年法国科学院院士拿维叶推导了材料力学受弯构件断面应力分布计算公式,而此公式是在其 20 多年后,由法国科学院另一位院士阿莫列恩用试验验证后才得以承认。

结构模型试验推动工程结构理论和工程技术发展的例子很多,如:1829 年法国科学家柯西用模型作梁和板的振动试验。1846 年英国罗伯特·斯坦福森等人为作不列颠桥设计进行了缩尺 1:6 的桥梁结构模型试验,之后他又对另一座管形结构铁路桥做模型试验。1869 年布鲁德做了船的模型试验。1833 年雷诺对管中流体进行了试验研究,不久著名的飞机制造先行者莱特兄弟建造了风洞,进行了机翼模型风洞试验。

进入 20 世纪后,随着模型相似理论的建立,科学技术和试验技术的发展,结构模型试验有了正确的理论指导,进入了相似模型试验阶段,取得长足的进步。此时期大致可有初期、推广和深入发展三个阶段。

初期阶段指从 20 世纪初至 20 世纪 40 年代第二次世界大战结束这一时期。著名的例子有：

1910 年西班牙建筑师阿托西·高丁在他的空间构思建筑结构的设计中，均采用模型试验作为研究，还利用模型试验作了悬索结构的试验研究和设计应用。

另外，瑞士著名建筑学家罗伯特·马拉德根据缩尺混凝土模型试验完成了无梁楼板和蘑菇形楼板的设计。意大利工程师皮尔逊用橡皮制作重力坝断面结构模型，用塑料制作拱坝模型。1930 年美国垦务局用石膏藻土制作了当时世界最高的波尔德坝的结构模型，并进行较完整的试验。

这期间，结构模型试验技术也有了很大发展。不仅采用机械式引伸仪进行应变量测，20 世纪 30 年代初问世的电阻应变片也很快用于结构模型试验中，为大、小尺寸结构模型试验的发展和推广创造了极为有利的条件。

模型的推广发展阶段主要指第二次世界大战结束后至 20 世纪末，也即发达国家进行战后重建的阶段。

这一时期，随着建设规模的不断扩大，高层建筑、大跨度桥梁、长大隧道和高大坝体的发展，以及原子反应堆压力容器、海洋平台等新型工程结构的出现，结构模型试验得以更广泛应用与发展。其中 1947 年葡萄牙建立了里斯本国家土木工程研究所，进行了许多小尺寸模型试验；1951 年意大利建立了贝加莫结构模型试验所，多进行大尺寸的模型试验；此外，美、英、法、德国和日本也都先后建立了大型结构实验室，为模型材料的研制、试验技术的开发、试验设备的研制、更新作出了很大贡献。20 世纪 50 年代开始，前苏联、东欧一些国家及我国均相继开展了结构模型试验。至 20 世纪 60 年代中期出现了地质力学模型研究，使地下结构及基础结构模型试验获得了较快的发展。

这一时期的特点是开展结构模型试验工作的国家多，进行的试验数量多，用试验解决结构工程设计的问题多，国际间专项技术交流频繁，使与结构模型有关的相似理论、试验技术和设备都有了全面的发展。

20 世纪 70 年代后，结构模型试验进入深入发展阶段。随着发达国家战后重建工作的基本完成以及电子技术、激光技术的发展，使结构模型试验技术飞速发展。电子计算机结构分析的发展使结构模型试验转向解决一些重大的复杂结构的研究课题，承担更为艰苦的任务。如核潜艇、直升机、超音速飞机、火箭、宇航器及地震、风灾、火灾对工程结构的破坏作用等方面的研究，出现和发展了各种结构的动力模型试验。与此相适应的测试技术和多变、多维的试验设备得到发展。为适应大尺寸结构模型试验，实验室也趋向大型化、自动化、智能化方向发展。

我国的结构模型试验起步于 20 世纪 50 年代，随着我国建设事业的发展而逐步发展起来。改革开放以来，我国国民经济建设的大规模开展，有力地推动了

结构模型试验的发展。目前全国主要的土木类高校和研究院所均建有结构实验室,大部分可以开展一般的结构模型试验。随着高层建筑、大跨度桥梁、悬索结构、原子能反应堆、海洋平台、航天工程和地下交通工程等的全面开展,结构模型试验的技术和装备也有了很大的提高。各种非线性结构模型试验全面开展,大型现代化的风洞实验室、地震振动台、火灾模型实验室相继建成并投入使用,大大推动了工程结构理论和技术的进步,也使结构模型试验本身的理论和技术得到了发展。

结构模型试验目前已是结构研究工作的重要研究手段之一。一般来说,只要能列出所需研讨问题的数理方程,不论方程是否可解,或者根本无法列出方程,只要能确定影响问题的主要物理量,这些问题都可通过模型试验进行深入研究,得到适用于工程的研究成果。但模型试验也有其费时、费工、费用较高、周期较长的缺点。为更好地发挥结构模型试验的特长和作用,应尽快克服这些缺点。

结构模型试验今后发展的主要方向有以下几点:

(1) 进一步提高试验技术、降低试验成本、缩短试验周期。主要是提高试验设备的功能与效率,全面实现试验的自动化、智能化。

(2) 与结构理论分析和数值分析合理分工,将小型的一般性的结构分析研究工作由计算机数值分析解决,结构模型试验重点转向数值分析尚未能较正确地完成的复杂及新型结构的研究上去,如结构的破坏机理,结构与介质的相互作用和联合承载问题,结构的抗裂、抗滑等。

(3) 结构模型试验与计算机仿真分析相互促进,如有限元光弹技术、拟动力结构试验技术的发展,将计算机的数值分析数学模型与结构试验的物理模型相结合,可大大缩短试验周期,提高数值分析的正确性。

第二章 相似的概念与定义

第一节 概 述

相似这一概念是人们十分常用的一个概念,它是从初等几何学借用而来的。例如两个三角形(如图 2.1),如对应的角两两相等,或对应的边保持相同的比例,则称为两个三角形相似。属于同类问题的还有各种多边形、圆、椭圆、立方体、长方体、球等相似,这些均称为几何相似现象。

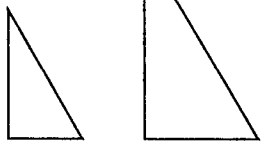


图 2.1 三角形的相似

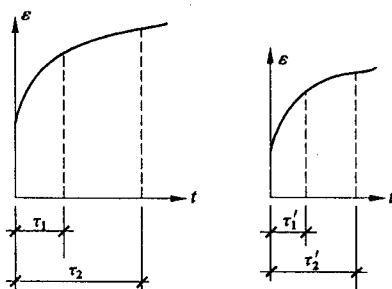


图 2.2 徐变曲线的时间相似

推而广之,各种物理现象也可以实现相似,它们的各种物理量(如时间、力、速度、加速度等)都可以抽象为二维、三维或多维空间的坐标,从而把现象相似简化为一般的几何相似问题。如

● 时间相似 对于如图 2.2 两徐变曲线,时间相似公式可定义为

$$\frac{\tau_1}{\tau'_1} = \frac{\tau_2}{\tau'_2} = c_\tau = \text{const.}$$

时间相似是指对应的时间间隔成比例。

● 力相似 指力场的几何相似,即所有对应点上的作用力都有一致的方向,其作用位置和大小则相应成比例(图 2.3)。

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \frac{l_3}{l'_3} = c_l = \text{const.}$$

$$\frac{f_1}{f'_1} = \frac{f_2}{f'_2} = c_f = \text{const.}$$

综上所述,在相似分析时,相似条件是十分重要的。其中的 c_l 、 c_τ 、 c_f 均可统称为相似常数。

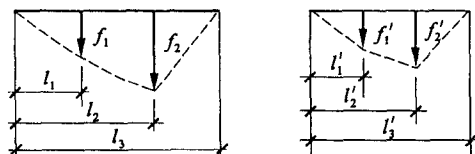


图 2.3 力的相似概念

上面所述均从一般的相似概念出发,是比较直观的相似事例。对于相似理论的建立,我们必须将这些直观概念抽象为理论,将其数字化,才能产生相似理论的概念基础,从而得到具有更一般意义的理论。

第二节 相似变换

所谓相似变换,就是指最简单的线性变换,下面给出两种相似变换的定义。

1. 第一种定义

取 n 个变量, $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$, 由它们确定一组最简单的线性变换

$$\left. \begin{aligned} x_{1\beta} &= c_{1\beta} x_{11} \\ x_{2\beta} &= c_{2\beta} x_{21} \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n\beta} &= c_{n\beta} x_{n1} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

方程组(2.1)中,系数 $c_{1\beta}, c_{2\beta}, \dots, c_{n\beta}$ 都是参数,称为变量 $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ 的变换乘数,它们是无单位或无量纲的纯量。变量 $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ 一般是有单位的量,可称为名数。若使角码 β 具有数值 $1, 2, \dots, N$, 就得到 N 个变量集或 N 个函数集。上式称为相似变换的第一种表达式,也即相似变换的第一种定义法。

2. 第二种定义

另外,取 n 个性质与变量 $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ 相同的参量 $x_{110}, x_{210}, \dots, x_{n10}$ 可写出相似变换

$$\left. \begin{aligned} x_{1\beta 0} &= c_{1\beta} x_{110} \\ x_{2\beta 0} &= c_{2\beta} x_{210} \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n\beta 0} &= c_{n\beta} x_{n10} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

由式(2.2)去除式(2.1)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{1\beta}}{x_{1\beta 0}} &= \frac{x_{11}}{x_{110}} \\ \frac{x_{2\beta}}{x_{2\beta 0}} &= \frac{x_{21}}{x_{210}} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{x_{n\beta}}{x_{n\beta 0}} &= \frac{x_{n1}}{x_{n10}} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式(2.3)称为相似变换的第二种表达式。它表明:用单位 $x_{110}, x_{210}, \dots, x_{n10}$ 去测量变量集 $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ 所得的各数,分别等于用测量单位 $x_{1\beta 0}, x_{2\beta 0}, \dots, x_{n\beta 0}$ 去测量 $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \dots, x_{n\beta}$ 所得的数,此数就是 $c_{1\beta}, c_{2\beta}, \dots, c_{n\beta}$, 即

$$c_{1\beta} = \frac{x_{1\beta}}{x_{11}} = \frac{x_{1\beta 0}}{x_{110}}$$

式(2.1)、式(2.3)所表达的两种相似变换是等价的。

注:(1) 式(2.1)变换包括恒等变换,即 $c_{1\beta} = c_{2\beta} = \dots = c_{n\beta} = 1$ (原型)。

(2) 式(2.1)变换具有单值可逆性,即当 β 确定后,由变量 $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ 可决定变量 $c_{1\beta}, c_{2\beta}, \dots, c_{n\beta}$, 反之亦然。

第三节 几何相似

几何相似是最形象的,也是人们最熟悉的,从而也就是最易为人们所接受的相似概念。另外,任何复杂的物理现象之间的相似都是以几何相似为前提的,因而也是最基本的相似概念。人们熟悉的几何相似一般是几何图形的相似,为使一般的几何相似概念更具有普遍性,这里把几何图形也置于某一坐标系内考虑。

设有 N 个分别由封闭表面 $S_1, S_2, \dots, S_N$ 所围成的空间域 $V_1, V_2, \dots, V_N$ 。把 S_1 称为起始面,若用 S_1 上坐标为 (x_{11}, x_{21}, x_{31}) 的任意点 A ,可表示出表面集 $S_\beta (\beta=1, 2, \dots, N)$ 中每一表面上空间坐标为 $(x_{1\beta}, x_{2\beta}, x_{3\beta})$ 的一点 A_β ,且这 N 个点集由下式联系

$$\left. \begin{aligned} x_{1\beta} &= c_{1\beta} x_{11} \\ x_{2\beta} &= c_{2\beta} x_{21} \\ x_{3\beta} &= c_{3\beta} x_{31} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式中 $c_{1\beta}, c_{2\beta}, c_{3\beta}$ 称为几何变换乘数,或几何相似倍数。对于 S_β 中每一个表面都是确定的值,则表面集 S_β 称为线性表面相似群,或称仿射相似群。

注: $c_{1\beta}, c_{2\beta}, c_{3\beta}$ 的值只随表面序号 β 而变,不随任意点 A_1 的坐标而变,所以,将其称之为相似常数。只要 β 一确定, $c_{1\beta}, c_{2\beta}, c_{3\beta}$ 相应也就确定了,说明由式(2.4)所确定的一簇空间域对应所有点的坐标遵循这一规律。

设在表面集 $S_\beta (\beta=1, 2, \dots, N)$ 中的每一表面上分别取坐标 $(x_{110}, x_{210},$