

只有掌握正确的解题方法 考试才能取得高分

NEW  
Sunshine



新课标

初中

几何

主编：林光敏

解题方法

大全



北京出版社出版集团  
北京教育出版社

只有掌握正确的解题方法 考试才能取得高分

# NEW Sunshine



新课标

初中

# 几何

## 解题方法大全



主编：林光敏

北京出版社出版集团  
北京教育出版社

# 前

# 言

我们知道，“问题是数学的心脏”，这是众多数学家的切身体验，也是对数学发展规律的精炼阐释。通过解决数学问题，能加深对数学概念的理解，培养学生分析问题和解决问题的能力。俗话说：思从疑字始，法自欲字生。问题启迪方法，任务提示手段。教学实践表明，不少学生对学习几何感到困难，他们对从课本上学到的概念理解有困难，性质、定理不会灵活运用，只能机械地模仿，生搬硬套，遇到一些新问题，常常束手无策、一筹莫展。

数学家笛卡儿一针见血地指出：“没有正确的方法，即使是有眼睛的博学者也会像瞎子一样盲目摸索。”数学方法是数学的核心和灵魂，只有掌握了数学方法，才能在看似错综复杂的数学问题前从容不迫，得心应手。因此要提高学生的几何证题能力，必须在注重对几何概念、性质理解的同时，强化几何证题方法的学习与研究。学生通过课堂学习，已经有了比较明了的几何概念、几何性质，然而对这些概念性质在具体的题目中如何运用一知半解，如何找出头绪，抽丝剥茧，从而顺利解出题目，相信这会让许多学生扑朔迷离，应对起来不知所措。这正是缺乏数学方法的症结所在。为了帮助学生探索解题规律，掌握解题方法，笔者编写了这本《新课标初中几何解题方法大全》。

本书针对广大七至九年级学生编写。七至九年级学生可以根据学习进度，有选择地、循序渐进地学习。本书正是在新课程标准的框架下编写的，与课本同步，可以做同步辅导书使用。对九年级学生，本书亦可作为系统复习用书。九年级学生要面对即将到来的毕业考试，本书可帮助九年级学生摆脱重负，理清头绪，认准考点，把握规律，并获得





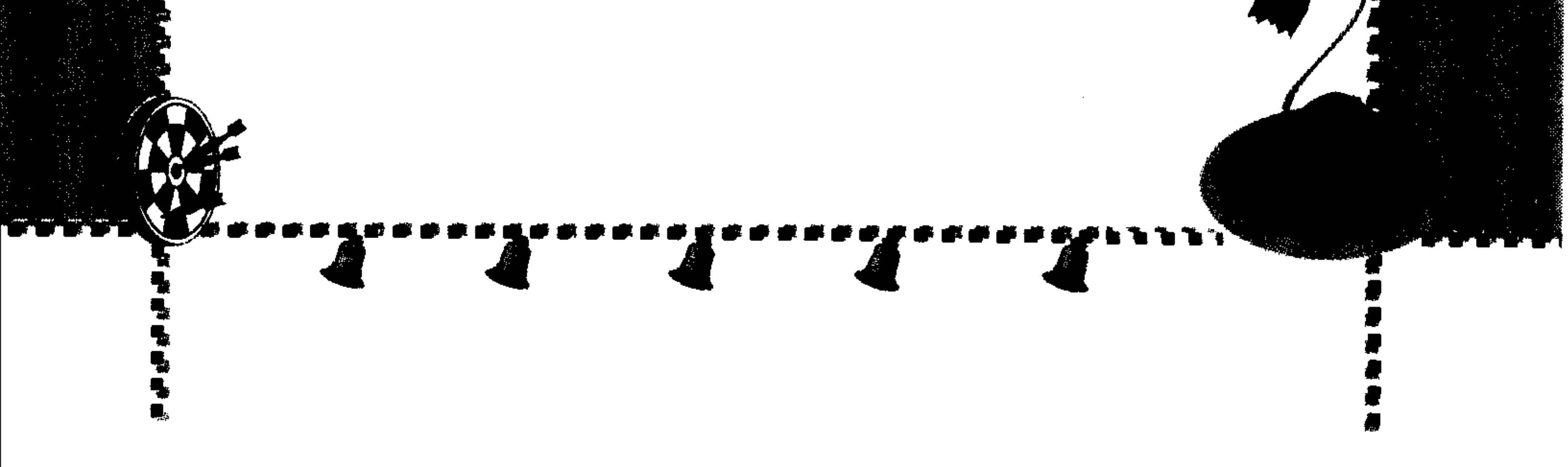
最有效的解题方法,节约时间,快速提高,夺取考分。

本书涵盖七至九年级的几何内容,包括线段、角、相交线、平行线、三角形、四边形、相似形、直角三角形、圆等的计算和证明。由浅入深,循序渐进。而后续章节的习题解法又涵盖到前面的内容,可以让学生在不知不觉中再次巩固前面已学习过的知识。

笔者对近年来的中考几何题型做了深入的研究分析,进而针对各种题型提出最为简单、最为实用的解题方法与技巧。有的例题则是一题多解,从不同的角度思考,拓宽学生的解题思维。对于初中几何中的所有解题方法,如代数法、面积法、比例法、分析法、综合法等,均有详细解析。

由于任何一本有价值的参考书不仅要授学生以“鱼”,更应授学生以“渔”,因此本书采取各个击破的战略思想,同一类型的考点都归纳到一起进行训练,锻炼的是解题方法,培养的是数学思维能力、逻辑推理能力,提升的是创新意识和应用意识,发展的是数学实践能力。本书编写的框架是:先明确一个考点,再针对该考点给出例题,然后对例题进行分析、解答、点评,并且另辟蹊径,发散思维,最后通过配以针对训练,让学生有的放矢地加以巩固。这样就克服了许多辅导材料中存在的技巧与解题过程互不衔接的弊病,使书中给出的解题方法真正成为一种有用的工具和夺取高分的有力武器。练习所附答案以及解析更注重引导学生的做题思路和方法运用,以帮助学生吃透考点,深研技巧。

由于编写时间仓促,虽竭尽全力,但错误和不足之处在所难免,恳请广大读者指正。





# 目 录

## 第一章 线段、角

- ▶ 1. 怎样数点、线段和角 ..... 1
- ▶ 2. 怎样比较线段、角的大小 ..... 3
- ▶ 3. 怎样求线段、角的大小 ..... 5

## 第二章 相交线、平行线

- ▶ 4. 怎样证两个角相等 ..... 12
- ▶ 5. 怎样证两直线平行 ..... 15
- ▶ 6. 怎样求角的大小 ..... 18
- ▶ 7. 怎样证两直线垂直 ..... 21
- ▶ 8. 角的和、差、倍、分的证法 ..... 24

## 第三章 三角形

- ▶ 9. 怎样证线段不等 ..... 27
- ▶ 10. 怎样求三角形的角 ..... 29
- ▶ 11. 怎样求三角形的边长 ..... 32
- ▶ 12. 怎样证明两角不相等 ..... 35



|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| ▶ 13.怎样证明角的和、差、倍、分问题 .....     | 38  |
| ▶ 14.怎样证明线段或角相等 .....          | 43  |
| ▶ 15.怎样证明两条直线互相垂直 .....        | 47  |
| ▶ 16.怎样证明两线段平行 .....           | 51  |
| ▶ 17.怎样应用角平分线的性质定理和判定定理 .....  | 56  |
| ▶ 18.怎样应用“等边对等角”及“等角对等边” ..... | 60  |
| ▶ 19.怎样利用“三线合一”证明线段相等 .....    | 64  |
| ▶ 20.怎样利用“三线合一”证明线段垂直 .....    | 67  |
| ▶ 21.怎样利用“三线合一”证明两角相等 .....    | 70  |
| ▶ 22.怎样解三角形中的作图题 .....         | 72  |
| ▶ 23.怎样证明线段或角相等 .....          | 76  |
| ▶ 24.怎样证明线段不相等 .....           | 81  |
| ▶ 25.怎样求等腰三角形的角 .....          | 85  |
| ▶ 26.怎样证明等边三角形 .....           | 90  |
| ▶ 27.怎样证明线段和差问题 .....          | 95  |
| ▶ 28.怎样证明线段的倍分问题 .....         | 101 |
| ▶ 29.计算法证明两角相等 .....           | 107 |
| ▶ 30.二倍角问题的辅助线添法 .....         | 110 |
| ▶ 31.怎样应用中垂线的性质解题 .....        | 113 |
| ▶ 32.怎样添中点问题的辅助线 .....         | 116 |
| ▶ 33.利用勾股定理求线段的长 .....         | 120 |
| ▶ 34.怎样计算三角形的面积 .....          | 124 |
| ▶ 35.怎样证明线段平方的和、差关系 .....      | 128 |
| ▶ 36.用计算法证两直线垂直 .....          | 133 |



### 第四章 四边形

- ▶ 37.怎样解多边形问题 ..... 137
- ▶ 38.怎样判定平行四边形 ..... 141
- ▶ 39.利用三角形性质解平行四边形问题 ..... 145
- ▶ 40.怎样利用平行四边形的性质证题 ..... 148
- ▶ 41.怎样判定矩形 ..... 150
- ▶ 42.怎样应用矩形的性质 ..... 153
- ▶ 43.怎样判定菱形 ..... 157
- ▶ 44.怎样应用菱形的性质 ..... 160
- ▶ 45.怎样判定正方形 ..... 164
- ▶ 46.怎样应用正方形的性质 ..... 167
- ▶ 47.怎样利用补形法解题 ..... 170
- ▶ 48.怎样解翻折问题 ..... 174
- ▶ 49.梯形辅助线的添法 ..... 177
- ▶ 50.梯形的判定 ..... 183
- ▶ 51.怎样求图形的面积 ..... 186
- ▶ 52.怎样应用中位线定理解题 ..... 189

### 第五章 相似形

- ▶ 53.怎样利用比例的性质求值 ..... 193
- ▶ 54.怎样用比例法求线段的长 ..... 196



|   |     |
|---|-----|
| ▶ 55. 利用面积法求线段 .....  | 200 |
| ▶ 56. 怎样用比例法证两直线平行 .....  | 203 |
| ▶ 57. 怎样用比例法证线段相等 .....   | 207 |
| ▶ 58. 怎样用比例法证线段倍分问题 .....   | 211 |
| ▶ 59. 用三角形相似法证两角相等 .....  | 215 |
| ▶ 60. 怎样用比例法证线段不等 .....   | 219 |
| ▶ 61. 求两线段之比的方法 .....   | 222 |
| ▶ 62. 怎样用比例法证明线段的和差问题 .....   | 227 |
| ▶ 63. 怎样证明线段成比例 .....   | 230 |
| ▶ 64. 怎样用面积法证明线段成比例 .....   | 236 |
| ▶ 65. 怎样用比例法求线段的长 .....   | 239 |
| ▶ 66. 怎样用面积比求面积 .....   | 244 |
| ▶ 67. 形如 $ab=cd\pm ef$ 型问题的证明 .....   | 248 |
| ▶ 68. 形如 $\frac{a^2}{b} = \frac{c}{d}$ 几何题的证明 .....                         | 252 |
| ▶ 69. 形如 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 几何题的证明 .....             | 256 |
| ▶ 70. 形如 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = 1$ 几何题的证明 .....         | 260 |
| ▶ 71. 形如 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$ 几何题的证明 ..... | 263 |





**第 六 章 解直角三角形**

- ▶ 72. 锐角三角函数 ..... 267
- ▶ 73. 解直角三角形 ..... 271

**第 七 章 圆**

- ▶ 74. 关于弦长的计算 ..... 276
- ▶ 75. 两弧相等的证明 ..... 280
- ▶ 76. 弧的倍分问题 ..... 283
- ▶ 77. 如何求圆中角的度数 ..... 284
- ▶ 78. 圆中线段相等的证法 ..... 288
- ▶ 79. 判断点、直线、圆的位置关系 ..... 291
- ▶ 80. 证明圆的切线的方法 ..... 296
- ▶ 81. 圆中角相等的证明 ..... 300
- ▶ 82. 利用圆幂定理求线段 ..... 303
- ▶ 83. 如何证明圆中等积式 ..... 307
- ▶ 84. 圆中线段相等的证法 ..... 311
- ▶ 85. 圆半径的求法 ..... 314
- ▶ 86. 怎样利用辅助圆解题 ..... 318
- ▶ 87. 两圆相交问题如何添加辅助线 ..... 321
- ▶ 88. 相切两圆的辅助线作法 ..... 324
- ▶ 89. 圆中两直线平行的证法 ..... 328
- ▶ 90. 两条直线垂直的证明 ..... 331



# 目录

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| ▶ 91. 计算两圆公切线长的方法 ..... | 335 |
| ▶ 92. 关于正多边形的计算 .....   | 338 |
| ▶ 93. 证明正多边形的方法 .....   | 342 |
| ▶ 94. 圆的周长和弧长的计算 .....  | 345 |
| ▶ 95. 计算阴影部分的面积 .....   | 350 |
| ▶ 参考答案与提示 .....         | 354 |

## 第 一 章

## 线 段、角

## 知识、方法、技能

线段、角是几何中最基本的图形,对几何图形有关概念的理解,掌握有关的性质(包括公理)是本单元的重点.

## 1 怎样数点、线段和角

如何数点的个数,依据题意作出图形即可数出点的个数.图中有几条线段,归结于问题“一条线段上有若干个点,该线段上有多少条线段”.数法是以该线段左边第一点为端点,其余点为另一端点的线段的条数,然后再数出以左边第二个点为端点,以该点右边的点为另一端点的线段的条数,依此类推,直至数出最后一条线段为止,把这些条数相加即可.

关于射线、角的数法与点的数法类似.

**例 1** 同一平面内三条直线两两相交,交点一共有几个?

## 思路分析

计算点的个数,只要认真作出图形(满足题意),再数即可.

## 方法过程

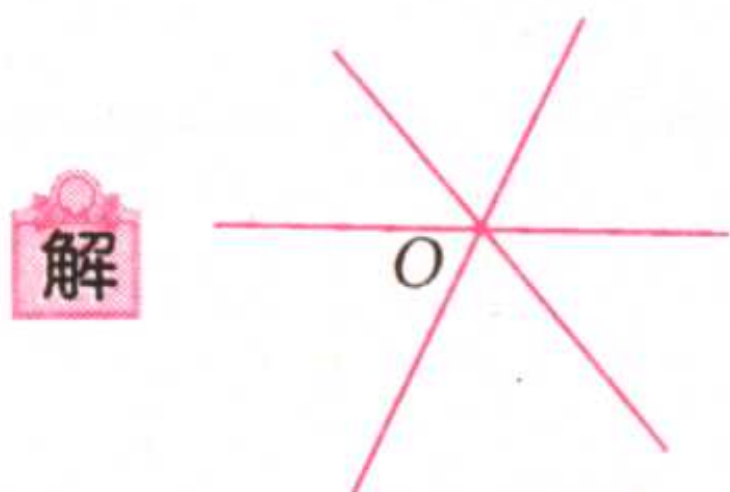


图 1-1

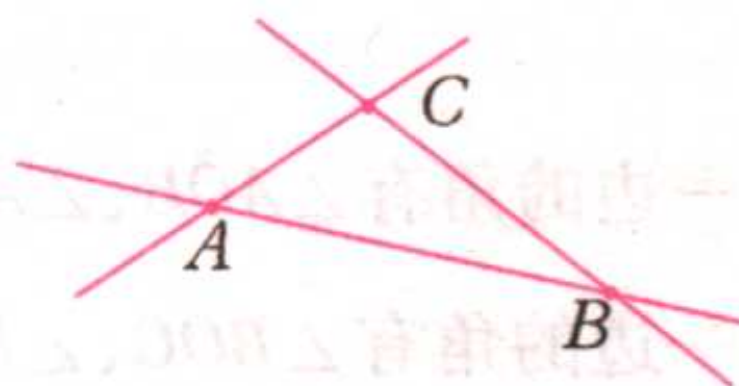


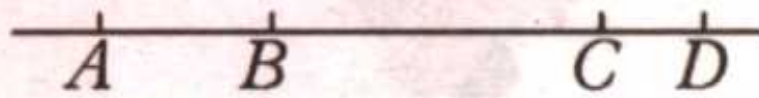
图 1-2

如图 1-1 及图 1-2,有 1 个或 3 个.

## 点拨指导

同一平面内三条直线两两相交,它可能交于同一点,也可能不交于同一点.平时,我们常常注意到的是有三个交点的情况,而容易忽略三条直线交于一点的情况.

**例 2** 在一直线上有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四点,如图 1-3,图中



共有几条线段? 几条射线?

图 1-3

## 思路分析

先数出以  $A$  为端点的线段(射线)的条数,再数出以  $B$  为端点的线段(射线)的条数……然后相加.

## 方法过程

**解** 以  $A$  为端点的线段有  $AB$ 、 $AC$ 、 $AD$  共 3 条,以  $B$  为端点的线段有  $BC$ 、 $BD$  共 2 条,以  $C$  为端点线段有  $CD$  共 1 条,所以共有  $3+2+1=6$  条线段.  
以  $A$  为端点的射线有 2 条(向左、向右各 1 条),同理,以  $B$ 、 $C$ 、 $D$  为端点的射线也各有 2 条,所以共有  $2+2+2+2=8$  条射线.

## 点拨指导

图中线段  $AB$  与线段  $BA$  表示的是相同的线段,在数以  $B$  为端点的线段时,不能重数线段  $BA$ ;射线  $AB$ 、 $AC$ 、 $AD$  表示的是同一条射线,即在直线上任意取一点,只可向左、向右作两条射线.

**例 3** 说出图 1-4 中共有几个小于平角的角,并分别写出它们.

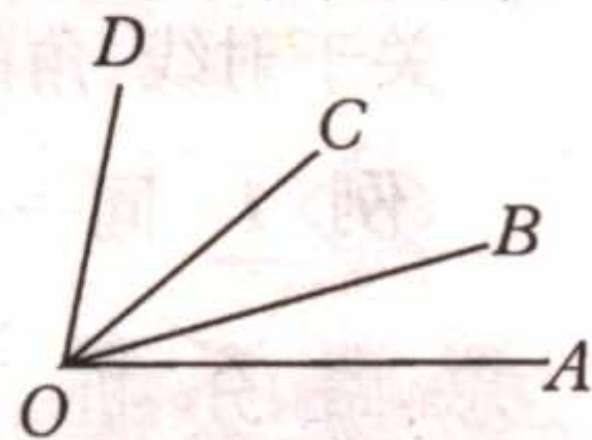


图 1-4

## 思路分析

以  $O$  为端点,每两条射线都可构成一个角.为了不重不漏,可分别以  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$  为角的一边,计算角的个数,再相加.

## 方法过程

**解** 以  $OA$  为一边的角有  $\angle AOB$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOD$ ,  
以  $OB$  为一边的角有  $\angle BOC$ 、 $\angle BOD$ ,  
以  $OC$  为一边的角有  $\angle COD$ .  
所以,图中共有 6 个角,它们是  $\angle AOB$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOD$ 、 $\angle BOC$ 、 $\angle BOD$ 、 $\angle COD$ .

**点拨指导**

计算点、线段、角等的个数,常常出现多数或少数(即重或漏)的现象,对较简单的图形,可用上述方法分别数出相加.

**注意** 注意表示方法不同实为相同图形的情况,如本例中 $\angle AOB$ 与 $\angle BOA$ 表示的是相同的角,不能重复数.对于比较复杂的图,可将原图分解成若干个简单图形再数.

**针对训练 1**

- ① 同一平面内有3个点,过其中每2个点画直线,可以画多少条直线?
- ② 在图1-5中共有几条线段?用字母表示各线段.

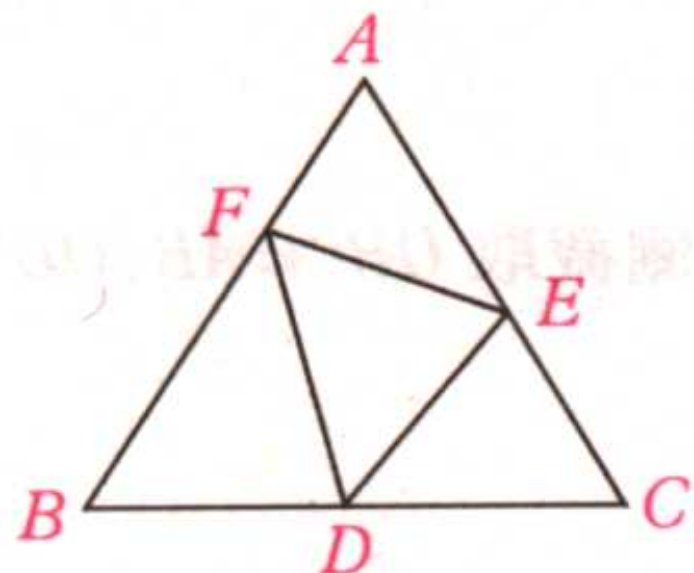


图 1-5

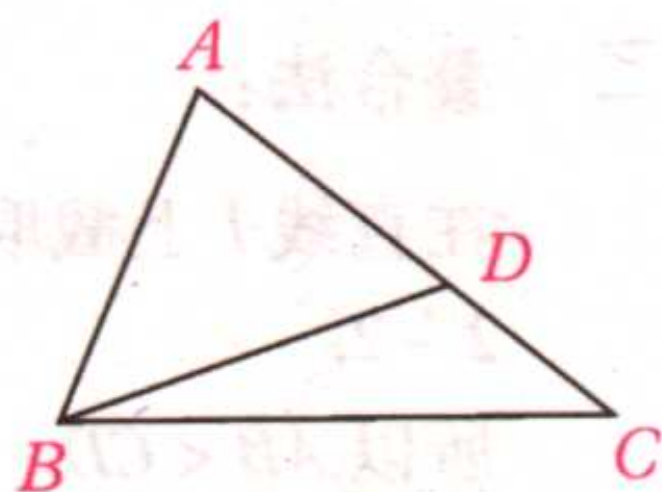


图 1-6

- ③ 在图1-6中,共有多少个小于平角的角?

\* ④ 如图1-7,在线段AB上有 $n$ 个点 $C_1, C_2, \dots, C_n$ ,共有多少条线段?在图1-8中, $\angle AOB$ 内有 $m$ 条射线 $OC_1, OC_2, \dots, OC_m$ ,图中有多少个小于平角的角?



图 1-7

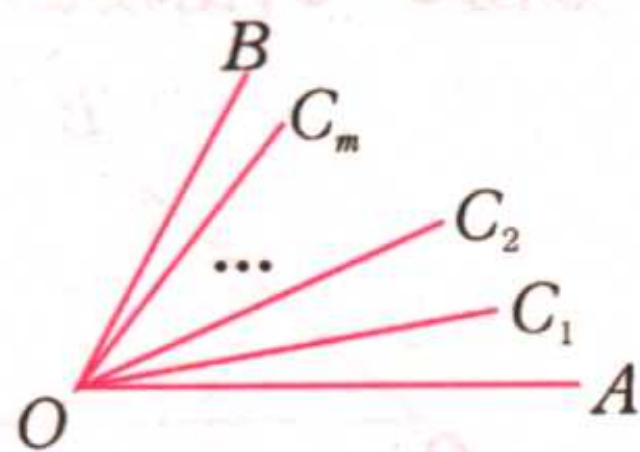


图 1-8

**2 怎样比较线段、角的大小**

**方法**

要比较两条线段的大小可以用度量法:量出线段的长度,按照长度来比较它们的大小,线段的大小关系与它们长度的大小关系一样.当两条线段长度相等时就说这两条线段相等.另一种比较方法是叠合法:把要比较的两条线段(如线段 $AB$ 、 $CD$ )移到

同一条直线上,使一个端点( $A$ 和 $C$ )重合,另一个端点落在直线上( $A$ 和 $C$ 的同侧),如果另一端点( $B$ 和 $D$ )重合,就知 $AB = CD$ ,若点 $D$ 在线段 $AB$ 上,则 $AB > CD$ ,反之 $AB < CD$ .

比较两个角的大小与比较线段大小一样,也有度量法和叠合法,判别方法类似.

**例 1** 如图 2-1,试比较线段  $AB$ 、 $CD$  的大小.

**思路分析**

可用刻度尺分别量出线段  $AB$ 、 $CD$  的长度比较,也可用叠合法比较.

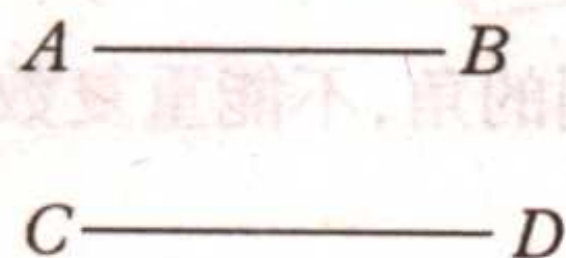


图 2-1

**方法过程**

**解法一** 度量法:

量得  $AB = 1.4 \text{ cm}$ ,  $CD = 1.6 \text{ cm}$ ,  
 $\therefore AB < CD$ .

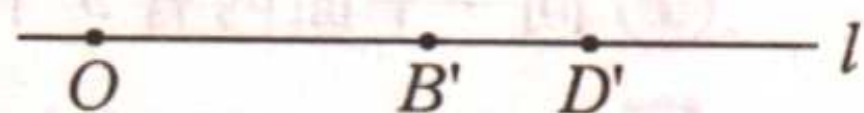


图 2-2

**解法二** 叠合法:

在直线  $l$  上截取一点  $O$ ,在  $O$  点右侧截取  $OB' = AB$ ,  $OD' = CD$ ,如图 2-2.

所以  $AB < CD$ .

**点拨指导**

用度量法时应注意单位要一致,在叠合法中可用圆规进行截取,从而可判断大小.

**例 2** 如图 2-3,比较  $\angle AOB$  与  $\angle COD$  的大小.



图 2-3

**思路分析**

用量角器分别测量两个角的度数,再比大小;也可叠合法比较大小.

**方法过程**

**解法一** 度量法:

用量角器量得  $\angle AOB = 41^\circ$ ,  $\angle COD = 32^\circ$ ,

$\therefore \angle AOB > \angle COD$ .

**解法二 叠合法:**

作射线  $OE$ , 在  $OE$  同一侧作  $\angle EOB' = \angle AOB$ ,  $\angle EOD' = \angle COD$ . 如图 2-4.

所以  $\angle AOB > \angle COD$ .

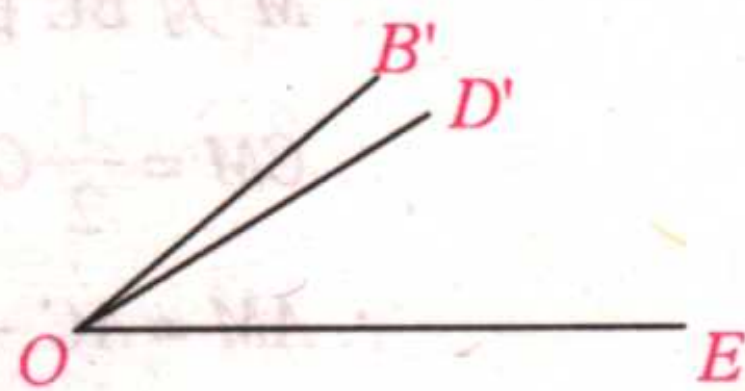


图 2-4

**点拨指导**

度量法和叠合法适用准确图的比较, 度量时应强调单位一致, 用叠合法时要注意同侧. 除以上方法外还可通过计算线段(角)的大小来比较.

**针对训练 2**

① 在图 2-5 中比较线段  $AB$ 、 $CD$  的大小.

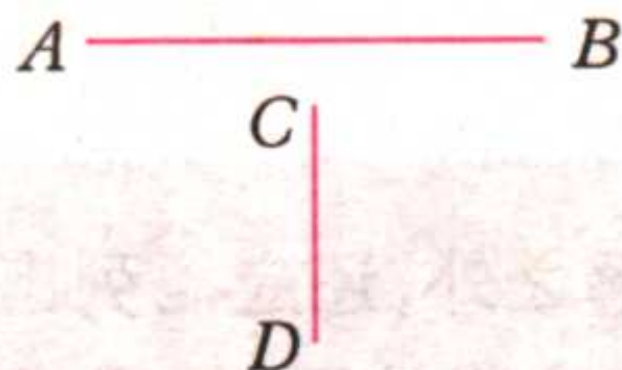


图 2-5

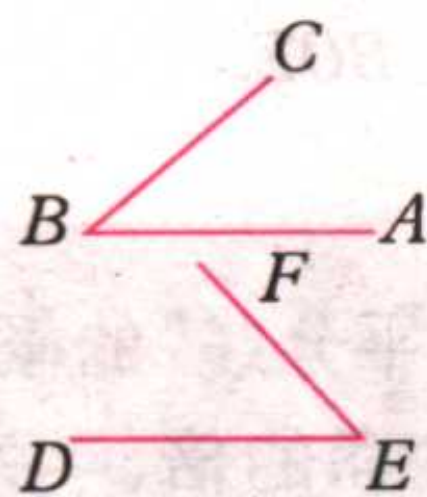


图 2-6

② 在图 2-6 中比较  $\angle ABC$  和  $\angle DEF$  的大小.

**3 怎样求线段、角的大小**

求线段、角大小的常用方法有:

- (1) 利用线段、角的和、差、倍、分等关系直接求线段或角的大小.
- (2) 通过列方程(组)来求线段、角的大小.

**例 1** 已知线段  $AB = 3$  cm, 延长  $BA$  到  $C$ , 使  $AC = 5$  cm,  $BC$  的中点为  $M$ , 求  $AM$  的长.

**思路分析**

根据题意, 画出图形, 延长  $BA$  到  $C$ , 不要画成延长  $AB$  到  $C$ . 结合图形, 寻找未知量  $AM$  与已知量之间的关系.

方法过程

**解** 如图 3-1,

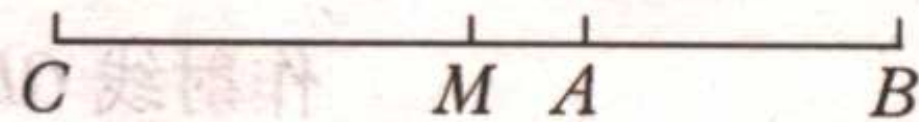


图 3-1

$\therefore M$  为  $BC$  的中点,

$$\therefore CM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(CA + AB) = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4.$$

$$\therefore AM = AC - CM = 5 - 4 = 1(\text{cm}).$$

点拨指导

在计算时弄清所求线段与已知线段间的关系, 如题中  $AM = AC - CM$ , 或  $AM = BM - AB$ , 而  $AB$ 、 $AC$  为已知线段, 可利用中点概念先求  $CM$  或  $AM$  的长.

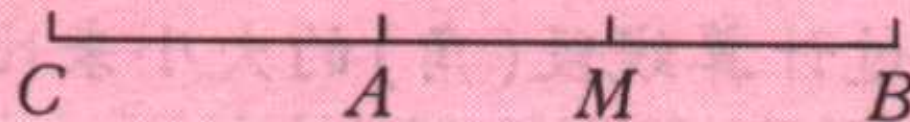


图 3-2

正确画图是正确解答的前提, 本题若画成图 3-2, 则可列出  $AM = MC - AC$  或  $AM = AB - BM$ , 由此得到错解.

**例 2** 如图 3-3, 点  $O$  在直线  $AB$  上,  $OD$  平分  $\angle AOC$ ,  $OE$  平分  $\angle BOC$ , 且  $\angle AOD = 30^\circ$ , 求  $\angle BOE$ .

思路分析

关于“角的平分线”的概念, 除了要正确理解之外, 还应能列出角平分线平分一角得到的三个角的倍、半关系, 并能熟练运用这些关系. 如题目有两条角平分线, 由  $OD$  平分  $\angle AOC$ , 应有  $\angle AOD = \angle COD = \frac{1}{2} \angle AOC$ . 同理, 有  $\angle BOE = \angle EOC = \frac{1}{2} \angle BOC$ . 每组关系式均包含三个等式, 应选择使用, 如题目中知  $\angle AOD = 30^\circ$ , 求  $\angle BOE$ , 且  $\angle AOC + \angle BOC$  等于平角为已知, 所以应选用  $\angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOC$  及  $\angle BOE = \frac{1}{2} \angle BOC$ .

方法过程

**解**  $\because OD$  平分  $\angle AOC$ ,  $OE$  平分  $\angle BOC$ ,

$$\therefore \angle AOC = 2\angle AOD, \angle BOE = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

$$\text{又} \because \angle AOD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \frac{1}{2}\angle BOC = 60^\circ.$$

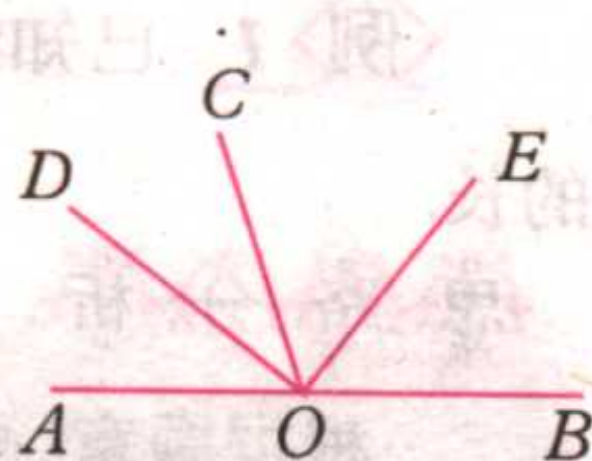


图 3-3



**点拨指导**

本题为求  $\angle BOE$ , 由角平分线性质, 需求  $\angle BOC$ , 而求  $\angle BOC$  通过平角与  $\angle AOC$  的差求得. 为了求  $\angle AOC$ , 由角平分线性质通过  $\angle AOC = 2\angle AOD$  (已知), 从而本题得解.

**例 3** 如图 3-4,  $C, D$  是  $AB$  上两点, 且  $AC, AD, AB$  三条线段的比是  $1:2:5$ , 又  $AC + AD + AB = 24$ , 求  $AD, BC$  的长.



图 3-4

**思路分析**

比例问题一般设每份为  $x$ , 本题可设  $AC = x$ , 则  $AD = 2x, AB = 5x$ , 可通过列方程求出  $x$  值, 进而求得  $AD, BC$  的长.

**方法过程**

**解** 根据题意, 设  $AC$  的长为  $x$ , 则  $AD$  长为  $2x, AB$  长为  $5x$ , 所以有

$$x + 2x + 5x = 24.$$

$$\text{解得 } x = 3.$$

$$\therefore AD = 2x = 6, AC = 3, AB = 5x = 15.$$

$$\therefore BC = AB - AC = 15 - 3 = 12.$$

$$\therefore AD \text{ 的长为 } 6, BC \text{ 的长为 } 12.$$

**点拨指导**

涉及比例问题, 一般设每份为  $x$ , 通过列方程(组)求出  $x$  值, 从而得各比例线段的长, 再结合图形, 计算出所求线段的长.

**例 4** 已知线段  $AC = 5AB$ , 点  $D$  是  $AB$  的中点, 且  $AC - DB = 9$  厘米, 求  $BC$  的长.

**思路分析**

根据题意,  $C$  点可能在线段  $AB$  的延长线上, 也可能在线段  $AB$  的反向延长线上, 因此要分两种情况去画图求解.

**方法过程**

**解** 如图 3-5, 点  $C$  可能在线段  $AB$  的延长线上, 或者在线段  $AB$  的反向延长线上.