物理知识提前学丛书

弹性力学

李世清 编著

电子科技大学出版社

物理知识提前学丛书

弹性力学

李世清　编著

电子科技大学出版社

弹 性 力 学

李世清　编著

出　　版:电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号)
责任编辑:周清芳
发　　行:电子科技大学出版社
印　　刷:北京市朝教印刷厂
开　　本:850mm×1168mm　1/32　印张:11.25　字数:242千字
版　　次:1996年1月第一版
印　　次:2005年10月第二次印刷
书　　号:ISBN 7-81043-277-X/O·25
定　　价:28.00元

前　言

弹性力学是土建、水利类专业的一门必要的技术基础课。在理论力学和材料力学等课程的基础上，进一步学习弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法，以了解线弹性体简单经典问题的计算方法和基本解答，提高分析与计算能力，为学习有关专业课程打好初步的弹性力学基础，这是学习本书应达到的目的。

弹性力学是材料力学、结构力学理论的进一步提高和深化，它推理严谨，应用范围更加广泛，不仅能解决材料力学和结构力学所无法求解的问题，而且能评价材料力学和结构力学解答的精确性。

本书是作者多年从事建筑工程专业弹性力学课程教学的讲义多次修改编写而成。在第一章到第五章系统全面介绍了弹性力学的基本理论与解法，主要内容归结为求解弹性力学问题的基本方程和按位移、应力求解弹性力学问题的普遍方程及解法，同时对材料力学中应力状态与应变状态分析一章的内容作了进一步深入论述。第六章列第八章主要联系土建类型的工程和材料力学中只给出了弹性力学解答的问题讲述弹性力学基本理论的应用和求解方法。第六章讲平面问越，分别介绍了直角坐标中和极坐标中解平面问题的方法。第七章空间问题介绍了等截面柱体的扭转，等截面悬梁的弯曲，空间轴对称问题(介绍了专业课土力学地基基础中要用的半空间体在边界平面上受法向集中力作用的问题)。第八章薄板的弯曲介绍了求解薄板弯曲的基本理论，以矩形薄板的弯

曲为例讲了求解方法，同时让读者了解建筑结构设计手册中关于板部分图表的制定依据和对实际材料泊松比 $v \neq 0$ 时表中查出数据的修正依据。第九章能量原理与用变分法求解弹性力学问题，分别讲了位移变分法和应力变分法，对材料力学中的能量方法作了高一个层次的分析。第十章有限单元法，通过平面问题常应变三角形单元分析，使读者初步掌握有限元法的基本原理及计算步骤，为读者深一步学习其它形式单元的有限元和结构力学中的杆系有限元打下基础。

为便于读者自学，本教材在叙述上力求由浅入深，语言通俗，数学推导尽可能详尽。为了读者今后阅读科学文献，在基本理论部分使用了张量表示，虽然如此，但未学过张量的读者仍可看懂。为进免繁锁的数学推导使读者钻入纯数学之中枝干不分，在一些地方把它纳入了用*号表示的注释。

为便于学习，除第一章外，各章后都有一定数量的习题。

本书编写过程中参阅了有关参考文献，并引用了其中部分习题和个别图表，谨向各文献的作者致谢。同时对支持本书出版的四川工业学院领导和同事表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中难免有不妥和错误之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

编著者

目　　录

第一章　绪　论

§1－1　弹性力学的任务

弹性力学是固体力学的一个分支学科。它的任务是研究物体在弹性变形时的力学行为，即研究物体在外加载荷、温度变化等外部环境因素作用下弹性变形时的应力、应变规律，为工程结构和机器构件的设计提供理论基础。

几乎所有的工程材料都在不同程度上异有弹性。所谓弹性，就是当外力引起的变形未超过某一限度时，当外力一旦被移去，变形也就随之消失的性质。另一方面，当外力超过了某一限度时，即使外力被移去，变形也不能完全消失，于是，我们称材料具有能够产生永久变形的塑性。实际的材料这两种性质是同时存在的。但在小变形范围内，弹性变形占着主要的地位，这时我们可以略去极少量的塑性变性，而把物体当成为完全弹性体，或简称弹性体。经典弹性力学就是研究这种完全弹性体。

在弹性力学中，除弹性这一基本性质外，未对所研究对象的力学性质再加任何别的限制，故弹性力学的理论、方法和典型结果，具有普遍的意义，对任何材料的物体，凡属弹性变形的问题均是适用的。

弹性力学的任务与材料力学、结构力学的任务一样，但是这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。材料力学主要是研究杆状构件在拉（压）、剪切、扭转、弯曲变形下的应

力和位移。结构力学主要是在材料力学的基础上研究由杆状构件所组成的杆系结构问题,如桁架、刚架等等。而弹性力学从理论上讲,它能解决一切弹性体(包括杆、板、壳、实体结构)的应力和变形计算问题。当然,目前在某些具体问题的求解中,还存在着数学上的困难,但弹性力学已为求解这些问题建立了普遍的理论基础。这三门学科在研究方法上也不完全相同。在材料力学和结构力学中主要是采用简化了的用初等理论可以描述的数学模型,即除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析外,大都还要引进一些关于构件变形几何方面的假设(如平截面假设)或应力状态比较简单的假定,这样来达到简化数学推演,但是,得出的解答有时只是近似的。在弹性力学中,一般都不必引用那些假定,而是采用较精确的数学模型,因而得出的结果是比较精确的。并且可以给出材料力学解答的可靠性与结果精确度的评价。因此,从上述意义上讲,又可说弹性力学的任务是:一是建立并给出用材料力学和结构力学所无法求解的问题的理论和方法;二是给出初等理论可靠性与精确度的度量。

§1-2 弹性力学的基本假设

各种实际材料的性质通常是很复杂的,概括广泛的实验事实对各种实际材料的性质进行科学的抽象,达到使建立起来的理论既尽可能地符合客观实际,而又能用比较简单的数学方法得到尽可能精确的结果是我们首先要考虑的问题,本课程的基本假设如下:

(1)材料结构的连续性假设。即认为组成物体的物质是毫无间隙地充满物体的整个几何容积。根据这个假定,表征物体变形

和内力分布的量,就可用坐标的连续函数来表示,从而在进行弹性力学分析时,就可应用数学分析这个强有力的工具。实际上,这个假定同一切物体都是由不连续的粒子所组成的观点是相矛盾的。但是,可以想见,只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小得很多,那么,这个假定就不会引起显著的误差。事实上,根据这一假定所作的力学分析,已被广泛的实验事实和工程实践所证明是正确的。

(2)材料性质上的均匀与各向同性假设。所谓均匀,即认为材料的力学性质处处相同,与坐标位置无关。所谓各向同性,是指弹性体内任一点处的各个方向上,材料的力学性质相同,与方向无关。这个假设指出,表征材料力学特性的物理参数(弹性模量、泊松比),在整个物体内,在各个方向上是不变的,这样我们就可以从物体内任取一部分来进行分析,而把分析的结果应用于整个物体。这个假设跟实际也有矛盾,我们知道,即使像钢铁这样一类的材料,如果从微观上看也是跟这个假设不相符的。因为这些材料是由晶体组成的,每个晶体都不是各向同性的,而且因有杂质,各处的力学性质也不完全相同。但由于弹性力学涉及的只是材料性质的宏观表现,包含了大量微小的、随机排列的晶体的宏观弹性体,所表现出来的统计平均性质,基本上还是符合这个假设的。

(3)材料行为上的物理线性假设。即弹性体在外力作用下,应变与引起该应变的应力之间成线性关系。

凡是符合以上三个假设的物体,称为理想弹性体。

(4)几何上的线性变形假设。即假定物体受力以后,整个物体所有各点的位移同物体的最小尺寸相比是很微小的,各点处的线应变和角位变的值比 1 远远为小;各处由于变形而发生的转角比的线应变和角应变须为同阶或高阶小量。这个假设的意义在于:

一方面它保证了变形在材料的弹性限度以内;另一方面它使得在建立物体变形以后的平衡方程时,可以用变形以前的尺寸来代替而不致引起显著的误差;再者,在考察物体的应变和位移时,转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计,而使得弹性力学里的代数方程和微分方程都简化成为线性方程。

(5)原始无应力的自然状态假设。即在外力作用或温度变化以前,物体内各点的应力均为零。也就是说,由弹性力学所求得的应力仅仅是由于外力或温度变化等所产生的。若物体中有初应力存在,则由弹性力学所求得的应力上应加上初应力才是物体中的实际应力。

这些基本假设与材料力学中的基本假设是一样的,但在材料力学中,除了上述基本假设外,对不同的问题还需引进一些有关变形的假设和应力分布的假设,使计算得到简化。这样就使得材料力学所得出的结论的精确度与适用范围较之于弹性力学受到了一定的限制。

第二章　应力分析

§2-1　力和应力的概念

一、面力和体力

作用在物体上的外力分为表面力和体积力，简称面力和体力。

所谓面力是指作用在物体表面上的力，如机械传动力、液体压力、风力等。一般说来，物体面上不同点处面力的大小和方向是不相同的。通常我们用面力集度矢量这个概念来描述面力的分布规律。比如，为了表明物体表面上任一点 P 处所受面力的大小，我们就围绕 P 点取一个微面积元 ΔA（图 2-1），设 ΔA 上的面力为 $\Delta\vec{T}$，则定义 $\Delta\vec{T}/\Delta A$ 为 P 点处面力的平均集度。如果 ΔA 不断缩小，则 $\Delta\vec{T}/\Delta A$ 的大小、方向和作用点将不断改变，当 ΔA 趋于零时，$\Delta\vec{T}/\Delta A$ 将趋于一极限矢量 $\vec{T}$，即有

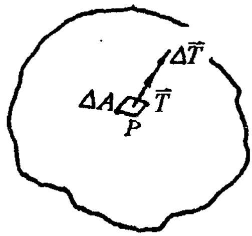

图 2－1

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta A}=\vec{T} \qquad (2-1)$$

矢量 $\vec{T}$ 称为 P 点的面力集度。$\vec{T}$ 的方向为 ΔA 趋于零时 $\Delta\vec{T}$ 的极限方向。面力集度的量纲为〔力〕〔长度〕$^{-2}$，当采用国际单位制（SI

制)时,其单位为牛顿/平方米(N/m^2),称为帕斯卡(PaScal),简称帕(Pa)。

作用在物体表面上的力当作用面积很小而可视为一点时,这样的表面力称为集中力。集中力的单位为牛顿(N)。

体力,则是分布在物体内各质点上的力,如重力、惯性力等。物体内各质点所受的体力一般也是不相同的。类似于对面力的讨论,我们用体力集度矢量来描述物体内各点体力的分布规律。设 C 为物体内任一点,ΔV 为包含 C 点的一微小体积元,$\Delta\vec{F}$ 为 ΔV 上的合体力,定义 $\Delta\vec{F}/\Delta V$ 为 C 点处的平均体力集度。设 $\vec{F}$ 为 ΔV 无限缩小趋于零时 $\Delta\vec{F}/\Delta V$ 的极限值,即

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta V}=\vec{F} \qquad (2-2)$$

瞬 $\vec{F}$ 为 C 点的体力集度矢量。$\vec{F}$ 的方向为 ΔV 趋于零时体力 ΔF 的极限方向。体力集度的单位为牛顿/立方米(N/m^3)。

二、应力矢量

物体在外力作用下要发生变形,同时,物体内各部分之间要产生相互作用力,称为内力。如用一平面 C 将物体假想地切为 A、B 两个部分(图 2-2),把 B 部分移去,则移去部分原来对保留部分 A 的作用现应代之以内力。内力是分布力。在一般情况下,通过不同的截面所传递的内力是不相同的,而且即使是在同一截面上,通过各点所传递的内力也是不相同的。为了了解内力在截面上的分布规律,我们引进"应力矢量"这样一个力学量。如在截面 C 上取包含 P 点的微面积 ΔA,并设作用在微面积 ΔA 上的内力矢为 $\Delta\vec{T}$,则当 ΔA 趋于零,但包含 P 点时,其极限

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta A} = \vec{\sigma} \qquad (2-3)$$

称为 C 面上 P 点处的应力矢量。$\vec{\sigma}$ 的方向为 ΔA 趋于零时 $\Delta \vec{T}$ 的极限的方向。量纲与单位跟面力集度相同。

一般可以把应力矢量分解成为垂直于截面的分量和沿着截面的分量。前者称为正应力，用 $\vec{\sigma}_n$ 示，后者称为剪应力，用 $\vec{\tau}_n$ 表示。此处脚标 n 标明其所在面的外法线方向。

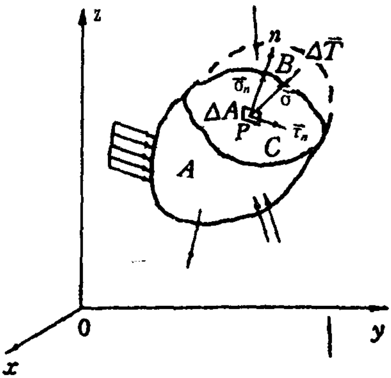

图 2-2

三、应力张量

过物体内同一点 P，其不同截面上的应力一般是不相同的。为了分析这一点处的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，采用围绕该点，用平行于坐标面的平面切取出一个正平行六面体（图 2-3）。如果应力状态是均匀的，则可取为有限大小的正六面体，否则应该取微小的正六面体。我们考虑后者这一般情况，设正六面体各边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$。此正平行六面体取得如此之小，以至于各面上的应力可视为均匀分布，相对两个面上的应力可认

为大小相等。将每一面上的应力矢量分解成为一个正应力和两个剪应力,分别与三个坐标轴平行。为了表明这些应力的作用面和作用方向,对于正应力 σ 加一个脚标,例如,σ_x 表示是作用在垂直于 x 轴的面上,且沿 x 轴方向的正应力。对于剪应力 τ 需加两个脚标,前一个脚标表示作用面垂直于哪一个坐际轴,后一个脚标表示沿着哪一个坐标轴方向。例如,τ_{xy} 表示作用在垂直于 x 轴的面上而沿 y 轴方向的剪应力。

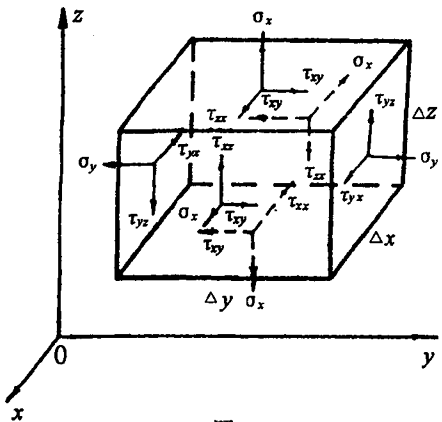

图 2-3

对各应力分量的正负作如下规定:在外法线的指向与坐标轴的正向一致的面(称为正面)上,应力的正向与坐标轴的正向一致;在外法线的指向与坐标轴的负向一致的面(称为负面)上,其应力的正方向与坐标轴的负向相同。由此可见,图 2-3 上所画的各应力分量,都是正的应力分量。

以后可知,按以上所取的六面体(图 2-3),其六个面上的应力就代表了 P 点处的应力。P 点处的应力共有 9 个分量(以后将证明,由于剪应力互等,独立的应力分量只有 6 个:三个正应力分量,