21世纪高职高专教育系列规划教材 · 公共基础课

高职数学

（一元微积分）

主编　李陆军

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

21世纪高职高专教育系列规划教材 · 公共基础课

高职数学

（一元微积分）

主　编　李陆军
副主编　张春玲
　　　　杨爱云
主　审　张少杰

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高职数学 / 李陆军主编. -西安: 西北大学出版社,
2006.8

ISBN 7-5604-2212-8

Ⅰ.高...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第104310号

高职数学　上册

主　　编　李陆军

出版发行　西北大学出版社
地　　址　西安市太白路229号
邮政编码　710069
购书电话　(029)88303313　88302590
经　　销　陕西省新华书店
印　　刷　西安华新彩印有限责任公司

开　　本　787毫米×960毫米　1/16开本
印　　张　12
字　　数　217千字
版　　次　2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 7-5604-2212-8/O·140
定　　价　18.00元

前　　言

本教材的编写主要是参考教育部制定的《高职高专教育高等数学的基本要求》。编写思想:其一,鉴于高职高专学校各系各专业对高等数学有不同的要求,本教材划分为六块共 15 章:第一块——一元微积分(第 1 ~ 5 章)是各专业必学内容;第二块共六部分,依次为线性代数(第 9 ~ 10 章)、概率(第 11 ~ 12 章)、向量代数与空间解析几何(第 6 章)、多元微积分及其应用(第 7 ~ 8 章)和级数(第 13 ~ 15 章),仅供各专业选用。其二,考虑高职高专的数学教学课时较少,而目前国内《高等数学》的教材大都是大而全,且教材的使用率较低,故可将本教材的六块(即为六册)组合使用,来满足各专业对数学的不同要求,提高学生对教材内容的使用率。

该教材在编写过程中侧重于基本概念、基本计算和基本方法的教学,对于重要的数学理论和数学思想,力图叙述简明,并配以例题、图解、习作及板演等,让学生把知识点尽量消化在课堂之内。同时本教材将配套习题分为 A、B 两类,其中,A 类习题较浅,B 类习题较深,以求满足不同学生对高数不同程度的学习要求。

参加本书编写的教师有:西安航空职业技术学院的李陆军(第 1 章、第 14 章);张春玲(第 2 章、第 13 章);白文鸽(第 3 章);雷育红(第 4 章);王艳妮(第 5 章);何力争(第 6 章);刘铁锁(第 7 章);李志林(第 9 章);朱丽平(第 10 章);李喜罕(第 11 章);刘宝利(第 12 章);陕西国防职业技术学院的杨爱云(第 8 章、第 15 章)。

全书的编写大纲及框架结构安排由西安航空职业技术学院的李陆军承担。

全书的一稿初审由李陆军、张春玲完成。二稿细审由陕西国防职业技术学院的张少杰、沈康顿、杨爱云、石岚等老师完成。最后的校对和统稿工作由张少杰、杨爱云、李陆军、张春玲等老师完成。

本书适用高职高专及同等水平的数学教学使用。

由于编者的水平有限,错误在所难免,恳请各位读者批评指正。

编　者

2006 年夏写于阎良

目　录

第一章　函数·极限·连续

无穷大！任何一个其他问题都不曾如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观点都不曾如此有效地激励人类的智力；但是，没有任何概念比无穷大更需要澄清……

——Barid Hilbert

§1.1　初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数包括以下六类函数：

1. 常函数：$y = C$（C 为常数）.

2. 幂函数：$y = x^{\alpha}$，其中 α 是任一实数.

3. 指数函数：$y = a^{x}$，其中 a 是实常数，且 $a > 0, a \neq 1$.

4. 对数函数：$y = \log_a^{x}$，其中 a 是实常数，且 $a > 0, a \neq 1$.

5. 三角函数：包括正弦函数 $y = \sin x$；余弦函数 $y = \cos x$；正切函数 $y = \tan x$；余切函数 $y = \cot x$；正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$ 六个函数.

6. 反三角函数：包括反正弦函数 $y = \arcsin x$；反余弦函数 $y = \arccos x$；反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 四个函数.

基本初等函数的定义域、图像、有界性、单调性、周期性以及对称性在中学已经详细学过了，这里不再赘述.

二、复合函数

1. 复合函数的概念

如果 y 是 u 的函数，$y = f(u)$，u 是 x 的函数，$u = \varphi(x)$，且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或该定义域的子集取值时，所对应的 u，能使 $y = f(u)$ 有定义，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数，x 是自变量，u 是中间变量.

可见复合函数是函数的函数.

例如 函数$y=\sin(2x-1)$是由正弦函数$y=\sin u$和一次函数$y=2x-1$这两个函数复合而成的. 复合后的函数已经不是基本初等函数中的正弦函数了,而称之为正弦型函数.

又如:由函数$y=\sqrt{u}$和$u=x-1$复合而成的函数$y=\sqrt{x-1}$,其定义域并不是$u=x-1$中x的取值范围R,而是R的子集$[1,+\infty)$. 显然,复合函数的定义域是内层函数$u=\varphi(x)$定义域的一部分.

值得注意的是,不是任意两个函数都能构成一个复合函数,比如,$y=\frac{1}{\sqrt{u}}=u^{-\frac{1}{2}}$与$u=-x^2$就不能构成复合函数.

2. 复合函数的复合过程

例1 写出下列函数的复合过程.

(1)$y=\sqrt{\log_2(3x-1)}$ (2)$y=e^{\sin 2x}$

解 (1)令$u=\log_2 v, v=3x-1$,

所以 $y=\sqrt{u}, u=\log_2 v, v=3x-1$.

这三个函数(幂函数、对数函数、一次函数)构成一个复合函数(1).

(2)令$u=\sin v, v=2x$

所以 $y=e^u, u=\sin v, v=2x$ 复合成$y=e^{\sin 2x}$

例2 已知函数$f(x+1)=x^2-3x+2$,求$f(x)$,$f(\frac{1}{x})$和$f[f(x)]$.

解 令$x+1=u$ 即$x=u-1$

$$f(u)=(u-1)^2-3(u-1)+2=u^2-5u+6$$

即

$$f(x)=x^2-5x+6$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}+6$$

$$f[f(x)]=[f(x)]^2-5f(x)+6=x^4-10x^3+32x^2-35x+12$$

三、初等函数

初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算,并可以用一个数学表达式表达的函数.

例如 $y=x^2-2\sin 3x$;$y=\frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{x+2}$;$y=e^{-x}+\frac{\sin x}{x}$…均称为初等函数.

基本初等函数经过有限次的四则运算形成的函数,有时也称为简单函数.

高中以前学过的函数,绝大多数都是初等函数.

函数的种类很多,人们为了表述量与量之间的关系,创建或自定义一个函数,只需要表明对应关系(一对一或多对一)和自变量的定义域即可.

例3 求双曲正弦函数

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

的定义域和它的反函数.

解 该函数的定义域是 $D = \mathbf{R}$

设
$$y = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

从而有
$$e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

又因为 $\sqrt{y^2 + 1} > y$ $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ (舍去 $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$)

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

故双曲正弦函数的反函数为

$$y = \mathrm{arcsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

例4 求函数 $y = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$ 的定义域.

解 因为 $\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x^2 + 5x + 6 \neq 0 \end{cases}$

从而解出定义域 $D = (-\infty, -1] \cup [1,2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty)$.

随堂练习题

1. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y = \log_5 \sqrt{x^2 + 1}$ (2) $y = (\arctan 3x)^2$ (3) $y = e^{\frac{1}{x}}$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (2) $y = 2^{\arcsin\frac{1}{x}}$ (3) $y = \cos x \cdot \tan x$

习题1-1

A类题

1. 指出下列函数的复合过程,并写出定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{\ln(x^2 + 1)}$ (2) $f(x) = e^{2x-1}$ (3) $y = \dfrac{1}{\cos\sqrt{x + 1}}$

2. 已知函数 $f(x)=x^2+1, g(x)=\sin 3x$，求 $f[g(x)], g[f(x)]$ 及 $f[g(\frac{\pi}{3})]$.

B 类题

1. 设 $f(\frac{1}{x})=x\cdot(1+\frac{1}{x})^2$，求 $f(x)$ 和 $f(10)$.

2. 设直角三角形 OAB 中（图 1－1），$OA=b, OB=a$，动点 M 在直线 AB 上移动，求变量 y 与变量 x 之间的函数关系.

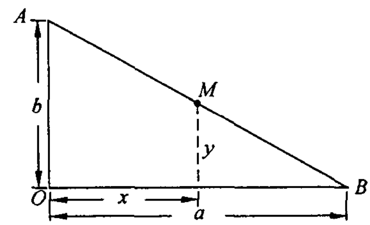

图 1－1

3. 验证函数 $y=\frac{ax+b}{cx-a}$ 的反函数就是其本身.

4. 求函数 $f(x)=\frac{5x-4}{x^2-1}$ 在点 $x_1=1+a, x_2=0, x_3=\frac{1}{a}$ 三点处的值.

§1.2　分段函数及函数的变形

一、分段函数

分段函数是用两段或两段以上的表达式表示出来的函数.

分段函数在求值、作图以及研究其性质时，是分段进行的，呈现的图像却可以在一个坐标系中.

分段函数是不是初等函数，与其表现的形式有关.

例如　$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，这明显是分段函数，但如果写成 $y=\sqrt{x^2}$ 时，却也可认为是初等函数. 也就是说，当各段表示的数学式不能综合成一个数学式子表示出来的时候，就不是初等函数了.

例 1　设

$$f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1<x<0 \\ 2, & 0\leqslant x<1 \\ x-1, & 1\leqslant x<3 \end{cases}$$

求$f(-\frac{1}{2})$,$f(0)$,$f(0.7)$,$f(2)$,并作出其图形.

解 $f(-\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $f(0) = 2$; $f(0.7) = 2$; $f(2) = 2 - 1 = 1$. 其图形为图 1 - 2.

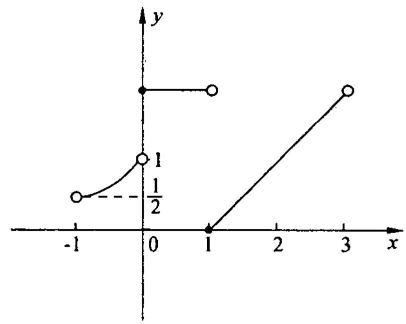

图 1 - 2

例 2 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & x \leqslant 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$$

写出 $\Delta y = f(\Delta x) - f(0)$ 的表达式.

解 当 $\Delta x \leqslant 0$ 时,$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = 2 + \Delta x - 2 = \Delta x$;

当 $\Delta x > 0$ 时,$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = \sin\Delta x - 2$.

二、函数的表达与变形

为了揭示和表达客观事物中量与量之间的关系,建立了各变量之间的函数关系,但关系中引入的各字母所代表的客观量,有其自身的限制,比如 $s = \frac{1}{2}gt^2$,从数学意义上讲,$t \in \mathbf{R}$,但在物理意义上 t 表示时间,就不能取负值,也就是说,当函数表述客观事物时,求其定义域或值域时,不能脱离变量所代表的客观意义,求出的解或结论,也是如此.

当一个函数关系式建立起来以后,为了计算或研究它,需要对数学表达式作一些有目的的恒等变形. 这是完成思考或推理的一个很重要的环节,也是对数学基本功的一个考验.

例 3 讨论函数 $y = \frac{3}{2}\sin 2x \cdot \cos x$ 的正负.

解 先将函数变形为

$$y = \frac{3}{2} \cdot 2\sin x \cdot \cos^2 x = 3\sin x \cdot \cos^2 x$$

这样,y 的正负与 $\sin x$ 的正负是相同的.

例 4 已知$f(\sin\frac{x}{2}) = 1 + \cos x$,求$f(\cos\frac{x}{2})$.

解法 1 令 $\sin\frac{x}{2} = u$,则 $x = 2\arcsin u$

所以 $$f(u) = 1 + \cos(2\arcsin u)$$

$$= 1 + 1 - 2\sin^2(\arcsin u)$$
$$= 2 - 2u^2$$

所以 $$f(\cos\frac{x}{2}) = 2 - 2\cos^2\frac{x}{2}\backslash = = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

解法 2 $$f(\cos\frac{x}{2}) = f[\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2})]$$
$$= 1 + \cos[2(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2})]$$
$$= 1 + \cos(\pi + x)$$
$$= 1 - \cos x$$
$$= 2\sin^2\frac{x}{2}$$

例 5 判断下列各式是不是恒等变形.

(1) $\frac{3}{9 + x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1 + (\frac{x}{3})^2}$　　(2) $(\frac{x}{x-1})^x = \left[(1 + \frac{1}{x-1})^{x-1}\right]^{\frac{x}{x-1}}$

(3) $\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2})$　(4) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

解 经验证四个小题都是恒等变形,其中(1)(2) 两题从等式右端向左端运算,称为对数学表达式的整理,现在从左向右变形好像是变得复杂了,但是(1) 式中,如果把$\frac{x}{3}$看成新变量 u,式子变成为$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1 + u^2}$,这样好看多了.其实,我们把任一个 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 的式子$\frac{1}{ax^2 + bx + c}$都可以变成 $k\cdot\frac{1}{1 + u^2}$的形式.

(3) 和(4) 两题,从右向左是分式的加法,而从左向右的变形叫做部分分式,其实就是分式加法的逆运算,有兴趣的同学还可以做些类似的题,如 $\frac{1}{x(x-1)}$,$\frac{1}{x^2(x+1)}$等.

例 6 设函数$f(x)$满足$a\cdot f(x) + b\cdot f(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$,其中 a,b,c 为常数,且 $|a| \neq |b|$,求$f(x)$.

解 把 x 换成$\frac{1}{x}$得

$$a\cdot f(\frac{1}{x}) + b\cdot f(x) = cx$$

两式联立求解得

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\cdot\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$

随堂练习题

1. 作出下列函数的图形.

(1) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x<0\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$　　(2) $y=|x-1|$

2. 把下列分式写成两个分式之和的形式.

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$　　(2) $\dfrac{2}{n\cdot(n-1)}$

习题 1-2

A 类题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，求 $f(0)$；$f(\frac{1}{2})$；$f(1)$ 和 $f(2)$.

2. 作函数 $y=|x^2-1|$ 的图形.

B 类题

1. 设 $\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$，求常数 A,B,C.

2. 把 $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ 写成 $\dfrac{k}{u^2+1}$ 的形式（k 为常数，u 为 x 的函数）.

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$.

4. 写出目前工资与个人所得税的函数关系式.

§1.3　极限

一、无穷大与无穷小

1. 无穷大量

一个变量（或函数），在变化过程中，其绝对值如果无限变大，我们就把这个变量（或函数）称为在此变化过程中的无穷大变量，简称为无穷大量.

例如　数列 $a_n=2n$，当 n 依次取自然数 $1,2,3\cdots$ 时，a_n 的值越来越大，要

想让 a_n 大于 100,只要项数大于 50,以后各项的值都将大于 100,要想让 $a_n >$ 10 000,只要从 5 000 项开始,以后各项的值都是大于 10 000.

又如 $b_n = (-1)^n \cdot n^2$,随着项数的增大,b_n 的绝对值就越来越大,只要项数充分大,$|b_n|$ 就能够比你指定的任何一个大的数都大.

无穷大不是一个数,它是一个其绝对值无限增大的过程,任何一个大的常数都不能叫做无穷大量,上述 a_n 和 b_n 都是当 n 趋于无穷大时的无穷大量,记为 $n \to \infty$ 时,$a_n \to \infty$,$b_n \to \infty$.

2. 无穷小量

如果某个函数在自变量的某种变化过程中,它的绝对值要多小就能有多小,我们就称这个函数是在其自变量的这个变化过程中的无穷小量.

例如 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}$ 就是无穷小量. 又如:$a_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$,由于其绝对值 $|a_n| \leqslant \frac{2}{n}$,所以也是无穷小量,但值得注意的是当 $n \to \infty$ 时,$\frac{1}{n}$ 是越来越小,而 a_n 的各项依次是

$$2,0,\frac{2}{3},0,\frac{2}{5},0,\frac{2}{7},0,\frac{2}{9}\cdots$$

虽然后项不一定比前项小,但想让它小于$\frac{1}{50}$,只要项数大于 100 就可以了,想让它小于$\frac{1}{100}$只要项数大于 200 项就可以了,也就是说 100 项以后的各项的值都小于$\frac{1}{50}$,200 项以后各项的值都小于$\frac{1}{100}$,所以 a_n 是无穷小量($n \to \infty$ 时).

无穷小量是一个变量,它描述该变量在变化过程中,其绝对值是无限变小的,零是常数中唯一的无穷小量,任何一个小的非零常数都不能叫做无穷小量.

我们把一个变量的绝对值无限变小的过程叫做极限为零,那么以零为极限的变量就称为无穷小量,并记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^n}{n} = 0$$

一个函数是否是无穷小量,与它的自变量的变化过程密切相关.

$x \to 1$ 时,$f(x) = x^2 - 1 \to 0$ 是无穷小量,但 $x \to \infty$ 时,$f(x) = x^2 - 1 \to \infty$,$f(x)$ 是无穷大量.

3. 无穷小量的性质

在自变量的同一变化过程中

(1) 两个无穷小量之和仍为无穷小量;

(2) 两个无穷小量之积仍为无穷小量;

以上这两个性质可以推广为有限个无穷小量之和或积仍为无穷小量.

(3) 有界函数与一个无穷小量之积仍为无穷小量.

例如 $x \to \infty$ 时,$\frac{1}{x}$ 是无穷小量,$\sin x$ 是有界函数,所以$\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时就是无穷小量.

二、函数的极限

1. $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

定义 1 当 $x \to x_0$ 时,如果函数 $f(x)$ 与某个常数 A 之差的绝对值 $|f(x)-A|$ 是一个无穷小量,则称这个常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,并记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad (\text{或 } x \to x_0 \text{ 时}, f(x) \to A)$$

例 1 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2}{x^2+1}$ (2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ (3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x+1)$

解 (1) 因为 $x \to 2$ 时,$x^2+1 \to 5$,所以$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{5}$.

事实上,$\left|f(x) - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{5}\right| = \frac{|4+2x|}{5(x^2+1)} \cdot |x-2|$

而当 $x \to 2$ 时,设 $1 < x < 3$,这时 $2 < x^2+1 < 10$,$|4+2x| < 10$,代入上式有 $0 < \frac{|4+2x|}{5(x^2+1)} < 1$,有界,而 $|x-2|$ 是无穷小量,故它的极限是$\frac{2}{5}$.

(2) $x \to 1$ 时,$x \neq 1$,所以$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} \to \frac{1}{2}$.

(3) $x \to 0$ 时,$\cos x \to 1$,所以$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

(4) $x \to 0$ 时,$x+1 \to 1$,所以$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x+1) = 0$.

以上极限值的求出,主要是观察法,如果用定义求极限,必须论证 $|f(x)-A|$ 是一个无穷小量,这里我们不详细论证,以后有更为简明的理论支持这种观察的正确性.

2. $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限

定义 2 当 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 如果与某个常数 A 之差的绝对值是一个无穷小量,那么常数 A 叫做 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限. 记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad (\text{或} x\to\infty \text{时}, f(x)\to A)$$

例 2 求下列各式的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}$

解 (1) 由指数函数 $y=2^x$ 的图像可知,当 $x\to+\infty$ 时,$2^x\to+\infty$. 所以它的倒数 $\dfrac{1}{2^x}$ 的值会越来越小,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$,另外一种考虑是 $\dfrac{1}{2^x}=(\dfrac{1}{2})^x$,当 $x\to+\infty$ 时,$(\dfrac{1}{2})^x\to0$.

(2) 因为 $\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$,而当 $n\to+\infty$ 时,$\dfrac{1}{n+1}$ 是无穷小量.

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$. 其实,观察数列 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$:$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{99}{100},\cdots$ 可以看出其极限是 1.

三、函数的极限与无穷小量的关系

定理 1 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限是 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量.

证明从略.

例如 求当 $x\to2$ 时 $f(x)=2x-3$ 的极限. 因为 $f(x)=1+2x-4=1+2(x-2)$,$2(x-2)$ 是 $x\to0$ 时的无穷小量,所以当 $x\to2$ 时 $f(x)\to1$,反之 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$,$f(x)=A+\alpha$,其中 $A=1$,$\alpha=2(x-2)$.

四、单侧极限

定义 3 当 $x<x_0$ 而趋于 x_0 时(记为 $x\to x_0^-$),函数 $f(x)$ 的极限是 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x_0-0)=A$$

当 $x>x_0$ 而趋于 x_0 时(记为 $x\to x_0^+$),函数 $f(x)$ 的极限是 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x_0+0)=A$$

左、右极限统称为单侧极限.

在求分段函数在分点处的极限时,由于分点两边的表达式不同,必须分别求出它的左极限和右极限.

定理2 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且都等于 A.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

证明从略.

例3 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 0\\ 2x+1, & 0<x<1\\ x+2, & x\geqslant 1\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)=-1, \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)=1.$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

又 $\because \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3 \quad \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)=3.$

随堂练习题

1. 两个无穷大之和是无穷大吗?
2. 两个无穷大之积是无穷大吗?

习题1-3

A 类题

1. 判断下列结论是否正确?

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})=1$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$ (C 为常数)　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to e}\ln x=1$　　(6) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^2-100}{x-10}=110$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 2x^2, & 0\leqslant x<1\\ x+1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$,(1) 求 $f(x)$ 在分点 $x=0$ 和 $x=1$ 的极限;(2) 求 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$.

3. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则函数在包含 x_0 的区间内是无界函数,这句话对吗?

4. 如果 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 为无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 一定是无穷小;反之,若 $f(x)$ 为