

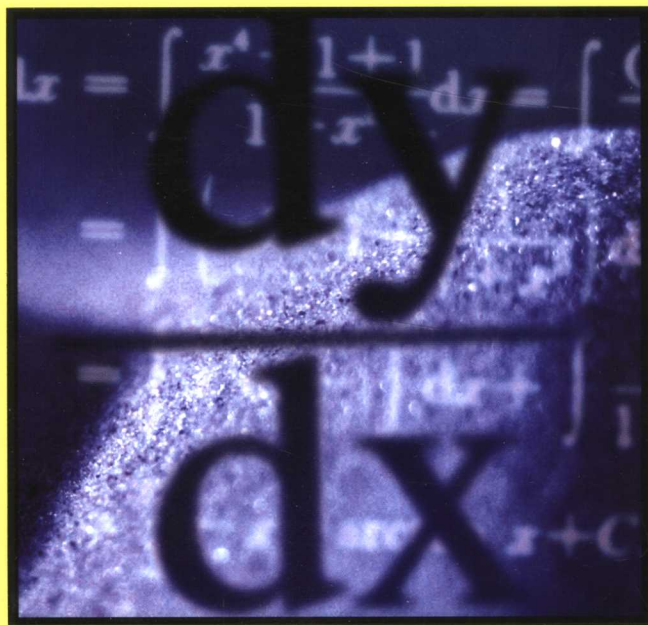
南开大学公共数学系列教材

高等数学

理工类

(第二册)

张效成 郑弃冰 刘光旭 / 编著



南开大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 第2册:理工类 / 张效成, 郑弃冰, 刘光
旭编著. —天津:南开大学出版社, 2006. 12
ISBN 7-310-02641-1

I. 高... II. ①张... ②郑... ③刘... III. 高等数
学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 137450 号

版权所有 侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷

787×960 毫米 16 开本 25.25 印张 2 插页 477 千字

定价:42.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

总序

高等数学是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课。由于各个学科门类的情况差异较大,该课程又形成了包含多个层次多个类别的体系结构。层次不同,类别不同,教学目标和教学要求也就有所不同,课程内容的深度与广度也就有所不同,自然所使用的教材也应有所不同。

教材建设是课程建设的一个重要方面,属于基础性建设。时代在前进,教材也应适时更新而不能一劳永逸。因此,教材建设是一项持续的不可能有“句号”的工作。20世纪80年代以来,南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材。其中,如《文科数学基础》一书作为“十五”国家级规划教材由高等教育出版社于2003年出版,经过几年的使用取得较好收效。这些教材为南开的数学教学作出了重要贡献,也为公共数学教材建设奠定了基础,积累了经验。

21世纪是一个崭新的世纪。随着新世纪的到来,人们似乎对数学也有了一个崭新的认识:数学不仅是工具,更是一种素养,一种能力,一种文化。已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑。他尤其对大学生们寄予厚望。他不仅关心着数学专业的学生,也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子。2004年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题字,并与获奖学生合影留念。这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策。另一方面,近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现,这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求。而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进。现在呈现在读者面前的便是南开大学公共数学系列教材。

本套教材的规划和出版得到了南开大学教务处、南开大学数学科学学院和南开大学出版社的高度重视,悉心指导和大力支持。此项工作是南开大学新世纪教学改革项目“公共数学课程建设改革与实践”的重要内容之一。编委会的各位老师为组织、规划和编写本套教材付出了不少心血。此外,还有很多热心的老师和同学给我们提出了很多很好的建议。对来自方方面面的关心、支持和帮助,我们在这里一并表示衷心感谢。

由于我们的水平有限,缺点和不足在所难免,诚望读者批评指正。

南开大学公共数学系列教材编委会

2006年6月

前 言

本书是南开大学公共数学系列教材之一，即理工类高等数学两册中的第二册。

考虑到当前物理类、电子类、计算机类、软件类及其他理工类专业对高等数学的教学提出了更高的要求，也考虑到近年来越来越多的本科生对于报考硕士研究生继续深造的愿望日益强烈，我们在总结多年教学经验的基础上编写了此书。

第二册的主要内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、广义积分与含参变量积分、微分方程初步等。

本书的主要特点是既注重对学生抽象思维和逻辑上严谨论证能力训练，同时也着力对学生运算能力和解决问题能力的培养。书中每节有较多例题，相当多的例题具有较高综合性，旨在帮助学生逐步养成对所学数学理论与方法融会贯通、综合地对问题进行分析与处理的能力。每节后我们安排了数量较多、类型也较多的练习题，并且把它们划分成 A、B 两类。其中 A 类是基本题，只要读者认真地做了这类题目，可以对基本概念、基本理论和基本方法达到比较深入透彻的理解与把握。B 类则是有一定难度或综合性较强的习题。建议读者特别是初学者在演算过一些 A 类习题之后再来做 B 类题，因为毕竟循序渐进是学好数学的一条客观规律。

借着本书出版的机会，我们想再一次指出，教材再好，讲授再精，终究代替不了读者自己的思考与领悟。没有读者自己的努力，书本与课堂上的知识永远也转化不成读者自己的能力，对于数学这门课程来说尤其是这样。也许有人说这是老生常谈。可是，事实告诉我们，很多谈了几十年、几百年甚至上千年的很显然的道理，对一些人来说要付诸实践却是相当的困难。我们的意思是说，书后所附习题的答案及对一些较难习题的提示，从一定意义上说，好比一把双刃剑。读者用得好，可以从中受益；用得不好，可能会或多或少地带来消极影响，而后者是我们所不愿意看到的。

本书可作为高等院校物理、计算机、软件、电子等各类理科或工科等专业的本科生教材，也可供其他理工类专业以及考研的参考书。

本书的第 5、9 两章由郑弃冰编写，第 6 章由张效成编写，其余各章由刘光旭编

写,并且由刘光旭教授统稿。

由于我们水平有限,缺点与不足在所难免,敬请读者批评指正。

编者于南开园

2006年6月

目 录

| | |
|-------------------------------------|------|
| 第 5 章 解析几何与向量代数 | (1) |
| 5.1 向量代数 | (1) |
| 5.1.1 空间的笛卡儿坐标 | (1) |
| 5.1.2 向量的定义 | (2) |
| 5.1.3 向量的基本性质 | (3) |
| 5.1.4 向量的运算 | (6) |
| 习题 5.1 | (11) |
| 5.2 空间中的直线和平面 | (13) |
| 5.2.1 空间中的平面 | (13) |
| 5.2.2 空间中的直线 | (16) |
| 5.3 二次曲面 | (20) |
| 5.3.1 空间中的曲面与曲线 | (20) |
| 5.3.2 二次曲面 | (23) |
| 习题 5.2 | (26) |
| 第 6 章 多元函数微分学 | (30) |
| 6.1 多元函数的极限与连续 | (30) |
| 6.1.1 n 维欧氏空间 | (30) |
| 6.1.2 二元函数的极限与连续 | (34) |
| 习题 6.1 | (43) |
| 6.2 偏导数 | (47) |
| 6.2.1 偏导数 | (47) |
| 6.2.2 全微分 | (53) |
| 习题 6.2 | (57) |
| 6.3 多元复合函数的微分法 | (60) |
| 6.3.1 复合函数求导法则 | (60) |
| 6.3.2 重复运用链式法则, 求多元复合函数的高阶偏导数 | (64) |
| 6.3.3 多元函数一阶全微分的微分形式不变性 | (65) |
| 习题 6.3 | (66) |

| | |
|----------------------|-------|
| 6.4 隐函数的微分法 | (69) |
| 6.4.1 由一个方程所确定的隐函数 | (70) |
| 6.4.2 由方程组所确定的隐函数 | (73) |
| 习题 6.4 | (78) |
| 6.5 多元函数的泰勒公式 | (80) |
| 习题 6.5 | (83) |
| 6.6 方向导数与梯度 | (84) |
| 6.6.1 方向导数 | (84) |
| 6.6.2 梯度 | (87) |
| 习题 6.6 | (88) |
| 6.7 偏导数的应用 | (90) |
| 6.7.1 几何应用 | (90) |
| 6.7.2 多元函数的极值 | (94) |
| 习题 6.7 | (103) |
| 第 7 章 重积分 | (106) |
| 7.1 重积分的概念和性质 | (106) |
| 7.1.1 重积分的概念 | (106) |
| 7.1.2 重积分的性质 | (108) |
| 习题 7.1 | (112) |
| 7.2 重积分在直角坐标系下的计算 | (112) |
| 7.2.1 在直角坐标系下二重积分的计算 | (112) |
| 习题 7.2 | (118) |
| 7.2.2 在直角坐标系下三重积分的计算 | (120) |
| 习题 7.3 | (125) |
| 7.3 重积分的换元法 | (126) |
| 7.3.1 重积分的换元公式 | (127) |
| 7.3.2 极坐标系下二重积分的计算 | (130) |
| 习题 7.4 | (136) |
| 7.3.3 柱坐标系下三重积分的计算 | (138) |
| 7.3.4 球坐标系下三重积分的计算 | (140) |
| 习题 7.5 | (144) |
| 7.4 重积分的应用举例 | (145) |
| 7.4.1 几何应用—曲面面积的计算公式 | (145) |
| 7.4.2 物理应用举例 | (151) |

| | |
|------------------------------|-------|
| 习题 7.6 | (155) |
| 第 8 章 曲线积分与曲面积分 | (157) |
| 8.1 曲线积分 | (157) |
| 8.1.1 第一型曲线积分的定义和性质 | (157) |
| 8.1.2 第一型曲线积分的计算 | (158) |
| 8.1.3 第二型曲线积分的定义和性质 | (161) |
| 8.1.4 第二型曲线积分的计算 | (163) |
| 8.1.5 两类曲线积分的联系 | (166) |
| 习题 8.1 | (168) |
| 8.2 曲面积分 | (169) |
| 8.2.1 第一型曲面积分 | (169) |
| 8.2.2 第二型曲面积分 | (172) |
| 习题 8.2 | (180) |
| 8.3 三个积分公式 | (182) |
| 8.3.1 格林公式 | (183) |
| 习题 8.3 | (187) |
| 8.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件 | (189) |
| 习题 8.4 | (195) |
| 8.3.3 高斯公式 | (196) |
| 习题 8.5 | (200) |
| 8.3.4 斯托克斯公式 | (202) |
| 习题 8.6 | (207) |
| 8.3.5 场论的几个概念 | (208) |
| 习题 8.7 | (214) |
| 第 9 章 级数 | (217) |
| 9.1 数项级数 | (217) |
| 9.1.1 级数的概念和基本性质 | (217) |
| 9.1.2 正项级数 | (220) |
| 9.1.3 任意项级数 | (226) |
| 习题 9.1 | (229) |
| 9.2 幂级数 | (232) |
| 9.2.1 函数项级数 | (232) |
| 9.2.2 一致收敛 | (233) |
| 9.2.3 一致收敛和函数的性质 | (234) |

| | | |
|---------------|--------------------------------|--------------|
| 9.2.4 | 幂级数的基本性质 | (236) |
| 9.2.5 | 函数的幂级数展开 | (244) |
| | 习题 9.2 | (249) |
| 9.3 | 傅立叶级数 | (251) |
| 9.3.1 | 欧拉公式 | (251) |
| 9.3.2 | 任意函数展开成傅立叶级数 | (253) |
| 9.3.3 | 奇偶展开 | (255) |
| 9.3.4 | 傅立叶级数的复数形式 | (256) |
| 9.3.5 | 傅立叶级数的收敛性 | (257) |
| 9.3.6 | 平均平方误差 | (258) |
| 9.3.7 | 傅立叶变换 | (260) |
| | 习题 9.3 | (260) |
| 第 10 章 | 广义积分与含参变量积分 | (263) |
| 10.1 | 无穷限积分的收敛判别法 | (263) |
| 10.1.1 | 无穷限积分与无穷级数的联系 | (263) |
| 10.1.2 | 非负函数无穷限积分的收敛判别法 | (264) |
| 10.1.3 | 柯西判别法、狄利克雷判别法和阿贝尔判别法 | (268) |
| 10.2 | 瑕积分的收敛判别法 | (270) |
| | 习题 10.1 | (274) |
| 10.3 | 含参变量积分 | (276) |
| | 习题 10.2 | (284) |
| 10.4 | 欧拉积分 | (285) |
| 10.4.1 | Γ -函数 | (285) |
| 10.4.2 | B -函数 | (287) |
| 10.4.3 | Γ -函数与 B -函数的关系 | (288) |
| | 习题 10.3 | (291) |
| 第 11 章 | 微分方程初步 | (292) |
| 11.1 | 微分方程的基本概念 | (292) |
| 11.2 | 一阶微分方程 | (294) |
| 11.2.1 | 解的存在与惟一性定理 | (294) |
| 11.2.2 | 可分离变量的微分方程 | (295) |
| 11.2.3 | 齐次方程 | (295) |
| 11.2.4 | 一阶线性微分方程 | (297) |
| 11.2.5 | 伯努利方程 | (299) |

| | |
|-----------------------------|--------------|
| 11.2.6 全微分方程····· | (300) |
| 习题 11.1 ····· | (304) |
| 11.3 二阶微分方程····· | (305) |
| 11.3.1 特殊型二阶微分方程····· | (305) |
| 11.3.2 二阶线性微分方程的通解结构····· | (308) |
| 11.3.3 二阶常系数齐次线性微分方程解法····· | (313) |
| 11.3.4 二阶常系数非齐次线性微分方程····· | (316) |
| 11.3.5 欧拉方程····· | (319) |
| 习题 11.2 ····· | (320) |
| 11.4 应用举例····· | (321) |
| 11.4.1 几何应用····· | (321) |
| 11.4.2 分析应用····· | (328) |
| 11.4.3 物理及其他应用····· | (338) |
| 习题 11.3 ····· | (347) |
| 部分习题参考答案····· | (349) |

第5章 解析几何与向量代数

5.1 向量代数

5.1.1 空间的笛卡儿坐标

在古代,点和数是完全不同的数学对象,研究点的学问(比如欧几里得(Euclid)几何)与研究数的学问(比如代数方程的解)之间也没有任何联系.笛卡儿(Descartes)坐标却将空间的点(还有向量)与有序数组建立了1-1对应,使几何与代数联系成为一体,产生了深刻影响.

笛卡儿坐标系,又称空间的直角坐标系,就是指空间中三条相互垂直且相交在一个点的有向直线.三条线的公共交点称为坐标系的原点,用 O 表示.三条线称为坐标轴,分别用 x 轴、 y 轴、和 z 轴来表示.坐标系有左手系和右手系之分.如果我们用右手握住 z 轴,大拇指指向 z 轴正向,则其余四指弯曲的方向表示从 x 轴正向沿最小角度转至 y 轴正向的旋转方向(如图5.1),这样的坐标系叫做右手系.如果四指弯曲的方向表示从 y 轴正向沿最小角度转至 x 轴正向的旋转方向,则为左手系.一般总是建立右手系来讨论问题.

任意两条坐标轴可以确定一个平面,如 x 轴和 y 轴确定 $O-xy$ 平面, y 轴和 z 轴确定 $O-yz$ 平面, x 轴和 z 轴确定 $O-xz$ 平面,这三个面称为坐标面.三个坐标面把空间分为八个部分.每一部分称为一个卦限.把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第一卦限,依反时针顺序得 I, II, III, IV 四个处于 $O-xy$ 平面上面的卦限,对应于 $O-xy$ 平面下部就得到

$V, VI, VII, VIII$ 四个卦限.

坐标系最重要的作用就是建立起一个空间中点与三元实数组之间的对应关系.

空间任何一个定点 P ,过该点存在惟一平面平行于 $O-yz$ 平面,该平面与 x 轴有惟一的交点,因而代表 x 轴上的惟一一个实数 a .同样,过点 P 存在惟一平面

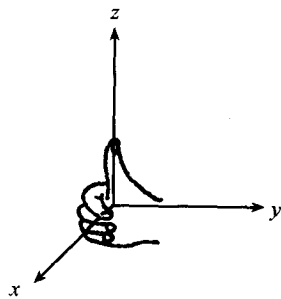


图 5.1

平行于 $O-xz$ 平面, 该平面与 y 轴有惟一的交点, 因而代表 y 轴上的惟一一个实数 b ; 过点 P 存在惟一平面平行于 $O-xy$ 平面, 该平面与 z 轴有惟一的交点, 因而代表 z 轴上的惟一一个实数 c (如图 5.2). 称有序数组 (a, b, c) 为点 P 在坐标系下的坐标.

注意坐标系与坐标之间的关系. 取定一个坐标系后, 空间中的点与三元数组之间就有一个 1-1 对应, 也就是一个点就对应惟一的一个坐标. 但是空间的坐标系是不惟一的, 因而同一点在不同的坐标系下有着不同的坐标. 所以, 通常总是在一个固定的坐标系下讨论问题. 在这种情况下, 点和它的坐标往往是不区分的, 点 $P(a, b, c)$ 就表示点 P 的坐标为 (a, b, c) , 其中 a, b 和 c 分别称为点 P 的 x 轴, y 轴和 z 轴的坐标分量. 空间的八个卦限内的点的坐标分量的正负关系如下.

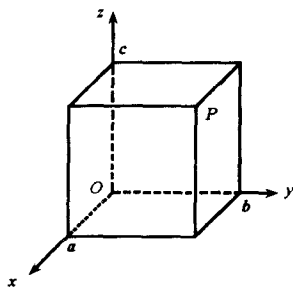


图 5.2

| | x 轴分量 | y 轴分量 | z 轴分量 | | x 轴分量 | y 轴分量 | z 轴分量 |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| I 卦限 | + | + | + | V 卦限 | + | + | - |
| II 卦限 | - | + | + | VI 卦限 | - | + | - |
| III 卦限 | - | - | + | VII 卦限 | - | - | - |
| IV 卦限 | + | - | + | VIII 卦限 | + | - | - |

有了坐标系后, 我们就可以计算空间中任意两点的距离. 易证如果点 P 和点 Q 的坐标分别为 (a_1, b_1, c_1) 和 (a_2, b_2, c_2) , 则两点间的距离为

$$d(P, Q) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}.$$

5.1.2 向量的定义

在物理中, 除了质量, 能量等有大小的量之外, 还有力, 速度等既有大小又有方向的物理量, 这样的量就是向量.

定义 5.1.1 既有大小, 又有方向的量就叫向量. 向量也称矢量.

以上定义还很抽象. 具体地, 总是用有向线段来表示向量. 空间中两个不同的点 P 和 Q 确定了一个以 P 为起点以 Q 为终点的有向线段, 这条有向线段 \overrightarrow{PQ} 既有大小又有方向, 就代表一个向量. 但是, 向量的性质应该是与起点和终点的选取无关的, 因而假如另外一条有向线段 \overrightarrow{ST} 与 \overrightarrow{PQ} 平行, 长度相等, 且由起点朝终点的指向也一致的话, 我们就认为这两条有向线段代表同一个向量, 记为 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}$. 一般

用一个带长度的箭头表示向量(如图5.3).

空间中的所有点都可以看做起点和终点重合,长度为零的(惟一没有指向的)线段,它们代表同一个向量,该向量称为**零向量**,记为黑体的 $\mathbf{0}$.两个大小相同并且平行但指向相反的向量互为**负向量**.特殊地,零向量的负向量为它自己.

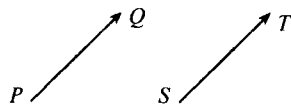


图 5.3

两个向量平行是指任何代表它们的两条有向线段都是平行的,但指向和长度可以不同.规定零向量与任何向量都平行.

理解向量的概念最好的例子就是速度.点在空间中的运动每一时刻都对应着一个速度,可以用以该点为起点,方向沿着点运动的方向,长度为该时刻运动的瞬时速率的有向线段表示.但是这个速度是不依赖于点的具体位置的,因而点在不同位置的运动可以有相同的速度.

5.1.3 向量的基本性质

与空间中的点相比,向量有更好的数学性质,因为向量上有运算,而点没有.比如,任何两点就没法相加得到一个新的点,点也没有倍数的概念,但向量却有.向量的性质正是通过各种运算体现出来的.一般用黑体字母来表示一个向量,以区别一般的数量和点.向量 A 的负向量用 $-A$ 表示.

1. 数量与向量的乘积(倍数)

定义 5.1.2 一个实数 k 与一个向量 A 相乘就得到一个向量 kA ,它与 A 平行且长度是 A 的长度的 $|k|$ 倍.当 $k>0$ 时, kA 与 A 指向相同;当 $k<0$ 时, kA 与 A 指向相反;当 $k=0$ 时, kA 为零向量.

由以上定义可知,零向量与任何数的数乘向量总是零向量.对于非零向量 A ,任何与它平行的向量 B 都存在惟一实数 k ,使得 $B=kA$.对任何向量 A 总有 $1A=A$, $(-1)A=-A$, $0A=0$.

2. 向量的加法

定义 5.1.3 两个向量 A 与 B 的和向量 $A+B$ 以如下方式定义.若 A 由一个以 P 为起点, Q 为终点的有向线段 \overrightarrow{PQ} 表示, B 由一个以 Q 为起点,以 S 为终点的有向线段 \overrightarrow{QS} 表示,则 $A+B$ 由以 P 为起点,以 S 为终点的有向线段 \overrightarrow{PS} 表示.另一种等价的定义方法是让 B 由一个仍以 P 为起点,以 R 为终点的有向线段 \overrightarrow{PR} 表示,则 $A+B$ 由仍以 P 为起点,以 \overrightarrow{PQ} 和 \overrightarrow{PR} 为两条平行边的平行四边形的另一个顶点 S 为终点的有向线段表示(如图5.4).

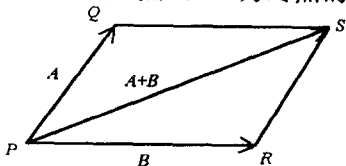


图 5.4

由以上定义可知对任意的实数 λ, μ 和任意的向量 A, B, C , 以下性质成立.

性质 1 (交换律) $A+B=B+A$.

性质 2 (结合律) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

性质 3 (零元存在性) $0+A=A+0=A$.

性质 4 (负元存在性) $A+(-A)=0$.

性质 5 (第一分配律) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

性质 6 (第二分配律) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

性质 7 (数量结合律) $\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)=(\lambda\mu)A$.

定义了向量的加法后, 自然就可以定义向量的减法为 $A-B=A+(-B)$. 减法的几何意义如下. 当把两个向量的起点拉到一起后, 两个向量的差向量以后面向量的终点为起点, 以前面向量的终点为终点.

空间中三个非零向量的和向量在几何上等于(把三向量的起点拉到一起)以三个向量为边的平行六面体的长对角线向量 \vec{OP} (如图 5.5).

由于向量比点有着更好的数学性质, 所以经常把点问题化做向量问题来处理. 其中最常见的方法就是把点看成位置向量. 定义以原点为起点, 以点 P 为终点的有向线段所代表的向量为点 P 的位置向量.

显然, 原点的位置向量为零向量. 这样, 位置向量就和空间中的点有了 1-1 对应. 同样, 当把向量都看成位置向量时, 向量的性质又对应着向量终点的几何性质.

一个向量 A 的长度称为它的模, 记做 $\|A\|$.

例 5.1.1 试证对任何向量 A 和 B , 不等式 $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ 成立.

证 A 和 B 不平行时, 由三角形两边和大于第三边就推出不等式成立. A 和 B 平行时, $\|A+B\| = |\|A\| \pm \|B\|| \leq \|A\| + \|B\|$.

3. 标准正交基

设 i, j, k 为空间中三个不共面的向量, 也就是说, 把它们起点拉到一起, 则三条线段不在一个平面上. 那么空间中的任何向量都可以惟一地表示成为 $xi+yj+zk$ 的形式, 其中 x, y, z 为实数. 这是因为任何向量 r 都惟一地对应空间中某点 P 的位置向量, 而对于点 P , 存在惟一的一个如图 5.5 那样的平行六面体 (O 为原点), 三条有向边 A, B, C 分别与 i, j, k 平行, 若三条边的长度与 i, j, k 的模的比值为 x, y, z (指向相同取正, 指向相反取负) 的话, 则 P 的位置向量就为 $xi+yj+zk$. 于是, 向量 r 就惟一对应了一个三元数组 (x, y, z) . 称三个不共面的向量 i, j, k 为空间向量的一组基, 称三元数组 (x, y, z) 为向量 r 在这组基下的坐标. 这种针对向量建立坐标的方法完全类似对点建立笛卡儿坐标系的方法, 只是不考虑垂直性.

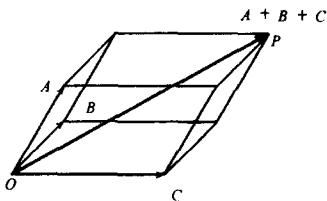


图 5.5

把向量表示成基下的坐标有什么意义呢?定义坐标的数乘和加法如下. $k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$, $(a, b, c) + (a', b', c') = (a+a', b+b', c+c')$. 则在这种定义下, 向量与实数的乘积向量的坐标为向量的坐标与实数的乘积; 两个向量的和向量的坐标为两个向量坐标的和. 于是, 通过坐标的方法向量的运算就变成具体的数量运算了, 也就是说抽象的几何性质变成具体的代数运算了.

当进一步考虑向量的性质(比如向量长度, 两向量夹角, 平行六面体体积等)时, 需要选择性质好的基才可以使得对应的坐标运算最简单, 而这种性质好的基就是标准正交基.

定义 5.1.4 空间中 3 个互相垂直, 长度为 1 的有序向量组称为空间向量的标准正交基.

注意 标准正交基的选取是任意的, 与空间的笛卡儿坐标系无关. 但是, 当空间取定了笛卡儿坐标系之后, 总是选择 x, y, z 三个坐标轴上的单位正向向量为标准正交基. 分别记为 i, j, k . 换句话说, 取定了笛卡儿坐标系后就取定了空间向量的标准正交基, 因而任何向量的坐标也就确定了. 为什么非要这样取标准正交基呢? 在这样的取法下, 空间中任何点的位置向量的坐标与点的笛卡儿坐标一样. 如果硬要取另外的标准正交基的话, 就容易在计算上造成混乱. 比如, 质点在空间中点的运动可以表示为 $(x(t), y(t), z(t))$, 其中 $(x(t), y(t), z(t))$ 表示在时刻 t 质点在空间笛卡儿坐标系下的坐标, 如果取向量的标准正交基为三坐标轴上的单位向量的话, 那么质点在时刻 t 的速度向量在这组标准正交基下的坐标就为 $(x'(t), y'(t), z'(t))$. 如果取别的标准正交基的话, 速度的坐标就不这么简单了.

向量的模要通过坐标来计算. 以向量的起点为原点, 则模为终点到原点的距离, 所以, 设 A 的坐标为 (x, y, z) , 则 $\|A\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 长度为 1 的向量称为单位向量. 一个非零向量又代表空间中的一个方向, 显然平行且指向相同的所有非零向量都代表同一个方向, 这样的向量叫做方向向量. 一个方向有惟一的单位向量表示该方向, 此时该单位向量的坐标为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 其中 α, β, γ 分别代表单位向量与三个坐标轴的夹角, 这三个余弦数也称为方向余弦. 任意三个不全为零的实数 l, m, n 就代表一个方向向量 (l, m, n) , 该方向的三个方向余弦为

$$\left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right).$$

以上所有的概念都可以只在平面上定义, 只不过平面上的标准正交基的向量个数为 2, 因此平面向量的坐标也只有 2 个分量. 同样, 不难理解 n 维向量空间在所有的性质上与 2 或 3 维向量空间完全相同, 就是标准正交基的个数为 n 个.

通过以上的定义可以看出研究向量的两种基本方法. 一种方法是通过向量的基本性质而不通过坐标来研究向量, 另一种是通过建立坐标系, 把向量问题化为坐

标的运算来研究向量. 两种方法各有优势, 具体问题需要根据具体情况来选择不同的方法来解决.

例 5.1.2 求边长为 a 的正八面体的外接球面和内接球面的半径.

解 建立如图 5.6 的坐标系

则正八面体的六个顶点的坐标为 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 0, a)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(0, a, 0)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(a, 0, 0)$. 于是外接球面的半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 由于三角形的重心点的位置向量等于三顶点位置向量和的 $\frac{1}{3}$, 所以第一卦限内的三角形的重心坐标为 $\frac{\sqrt{2}}{6}(a, a, a)$, 原点到该点距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$. 所以, 内接球面的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

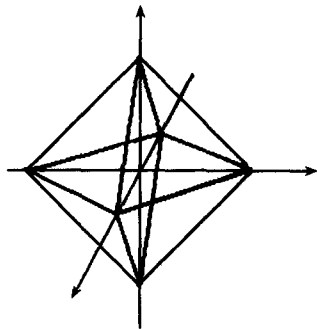


图 5.6

例 5.1.3 试证任意六边形(不一定凸)六条边的中点间隔连成的两个三角形的重心重合.

证 设六个顶点按相邻顺序的位置向量分别为 r_1 到 r_6 , 则六条边的中点的位置向量分别为 $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$, $\frac{1}{2}(r_2+r_3)$, $\frac{1}{2}(r_3+r_4)$, $\frac{1}{2}(r_4+r_5)$, $\frac{1}{2}(r_5+r_6)$, $\frac{1}{2}(r_6+r_1)$. 而三角形重心的位置向量等于三顶点位置向量和的三分之一, 于是两个三角形的重心的位置向量就都为 $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 r_i$.

例 5.1.4 求过圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 和圆 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 的两交点所确定方向的方向余弦.

解 交点坐标为 $(1, 1)$ 和 $(\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$, 于是方向向量坐标为 $\pm(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$, 所以与横轴的方向余弦为 $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, 与纵轴的方向余弦为 $\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$.

5.1.4 向量的运算

1. 向量的内积(数量积)

定义 5.1.5 两个向量 A 和 B 的内积, 又称点积或数量积, 为 $A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \alpha$, 其中 α 表示把 A 和 B 的起点拉到一起后两个有向线段正向所夹的不大于 180° 的角度.

由定义可知,当 B 为单位向量时, $A \cdot B$ 为向量 A 往方向 B 投影向量的长度,其中当投影向量与 B 的指向相同时,取正值;当投影向量与 B 的指向相反时,取负值(见图5.7).

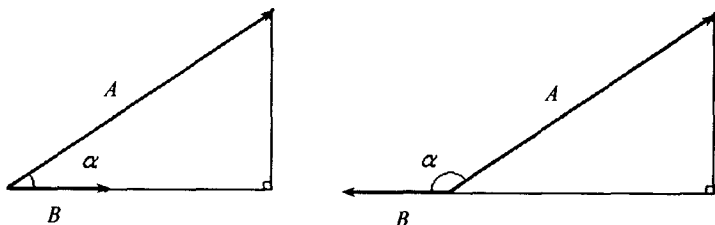


图 5.7

对任意的实数 λ 和任意的向量 A, B, C , 以下关于内积的性质成立.

性质 1 (正定性) $A \cdot A = \|A\|^2 \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = 0$.

性质 2 (交换律) $A \cdot B = B \cdot A$.

性质 3 (分配律) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

性质 4 (对数量的结合律) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

以上性质除了分配律外,其余的性质都很显然.下面证明分配律.由性质 4,不妨假设 C 为单位向量.取坐标系使得 C 为 x 轴正向单位向量 i , $A = xi + yj + zk$, $B = x'i + y'j + z'k$, 则 $A+B = (x+x')i + (y+y')j + (z+z')k$, $A \cdot C = x$, $B \cdot C = x'$, $(A+B) \cdot C = x+x'$, 所以性质 3 成立.

有了内积,就可以从内积角度定义两个向量的垂直了.两个非零向量垂直时它们的夹角为 90 度,它们的内积为 0 .所以,定义两个向量 A 和 B 垂直当且仅当它们的内积为 0 ,记为 $A \perp B$.由此定义可知,零向量与任何向量垂直.注意,零向量也与任何向量平行.

下面求内积关于坐标的表达式.由于标准正交基的向量互相垂直且模为 1 ,所以如果 A 和 B 的坐标分别为 (a, b, c) 和 (a', b', c') , 则

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (ai + bj + ck) \cdot (a'i + b'j + c'k) \\ &= aa'(i \cdot i) + bb'(j \cdot j) + cc'(k \cdot k) + (ab' + a'b)(i \cdot j) \\ &\quad + (bc' + b'c)(j \cdot k) + (ac' + a'c)(i \cdot k) \\ &= aa' + bb' + cc'. \end{aligned}$$

例 5.1.5 试证由圆心向圆的内接正三角形的三顶点连接的三个向量的和为零.

证 设这三个向量为 a, b, c , 不妨设它们的模为 1 , 则它们彼此间的夹角都为