

2007 高 考

第 一 轮 复 习 用 书



丛书主编：陈东旭

PK 高考

SHU XUE

数学



吉林文史出版社

高 考 第 一 轮 复 习 用 书

号 50 字 登 录 (吉)

PK 高考 数学

(选修 I)

江 西 金 太 阳 教 育 研 究 所

总 编 委 会

主 任:陈东旭

副主任:刘春华 邱先荣 谭铁平

委 员:(按姓氏笔划为序)

丁刚建	兰英焱	刘文清	刘春华	吴卫玲	张永忠	沈瑞林
邱先荣	陈东旭	范自强	姚利兹	施文辉	赵继咏	徐 昀
郭俊富	陶百强	饶锋平	葛立其	路明旺	谭铁平	谭锦生

本 册 编 委

主 编:葛立其

副主编:程为和 梁盛豹 唐志峰 张友力

编 委:(按姓氏笔划为序)

付宏伟	左 成	任燕午	祁春光
何盛宇	张艳芳	肖爱桥	陈梅生
周二雄	林友斌	郑光辉	金 锋

吉 林 文 史 出 版 社



(吉)新登字 07 号

书 名	PK 高考
丛书主编	陈东旭
责任编辑	周海英
出版发行	吉林文史出版社
地 址	长春市人民大街 4646 号 130021
印 刷	南昌市凌云印刷厂印制
规 格	889 mm×1194 mm
开 本	16 开本
印 张	151 印张
字 数	5738 千字
版 次	2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-80702-469-0
定 价	242.00 元

读者意见反馈表

科目: _____

姓名		电话		就读年级	
学校		电话		任课教师	
地址				邮政编码	
书名					
读者 意见	1. 您认为本书最大的特点是什么?				
	2. 本书有什么不足之处?				
	3. 您对本书的封面、体例等等,有什么意见和建议?				
	4. 您还需要什么书?				
① 为了进一步提高我所图书的品质,更好地为读者服务,便于再版时修订,特制订本表以征求各地读者的意见,我们热诚欢迎读者们能为我们指出本书的错误和不足之处,提出修改意见! ② 凡能正确指出本书中某一处错误(限前十位,以收到信函或传真日期为准),并详细标明正确的改正措施者,经本书编辑部确认后,将能获得一份精美的礼品。 ③ 能对本书的编排、体例以及创新方面提出切实可行的建议者,经采用后,同样能获得一份精美的礼品。 ④ 能在图书上详细标注出错误或不足并附文字说明者,经采用后,除能获得礼品外,还将有机会被聘为我所的“特约编审”。					
江西金太阳教育研究有限公司 地址:江西南昌国家经济技术开发区 昌北·麦园·菊圃路 1818 号 邮编:330032 网址:www.jtyjy.com 电话:0791-3829999 免费咨询电话:8008691222					

《金太阳》系列丛书

——江西金太阳教育研究所编著

——吉林文史出版社出版

《PK 高考》

——2007 高考第一轮复习用书

邮 购 目 录

书 名	邮购代码	邮购价(元)	数量
《PK 高考》· 语文分册	PKS31	25.00	
《PK 高考》· 数学分册(选修 I)	PKS32W	27.50	
《PK 高考》· 数学分册(选修 II)	PKS32L	27.50	
《PK 高考》· 英语分册	PKS33	25.00	
《PK 高考》· 物理分册	PKS34	19.00	
《PK 高考》· 化学分册	PKS35	23.00	
《PK 高考》· 生物分册	PKS36	23.50	
《PK 高考》· 政治分册	PKS37	26.50	
《PK 高考》· 历史分册	PKS38	22.00	
《PK 高考》· 地理分册	PKS39	23.00	

邮购方法：

注明所购图书代码、数量以及您的详细收件地址、姓名、邮编，将书款通过邮局汇至330027 江西南昌市江西师大 95 号信箱 黄利平 老师 收。款到三日内发书。

起邮数 100 册。

联系电话：13077966176

前言

在崎岖的书山中艰难跋涉的时候,谁不期盼得到名家名师的“轻功秘籍”?在茫茫题海里盲目漂游的时候,谁不渴望拥有一本开拓先锋的“航海指南”?那么,请选用《PK 高考》吧!

我们无意于给嶙峋的书山增添一方风景,我们只想在您奋勇登攀时悄悄递上一根支撑的手杖;我们无意于给浩淼的题海多添一瓢盐水,我们只想为您提供一叶穿越题海的轻舟。选择了她,我们不敢保证您一定能观赏到水木清华的荷塘月色,也不敢担保您一定能领略到未名湖畔的湖光塔影。然而,她定会在您人生的十字路口,给您指引方向,为您传播信息,给您信心、勇气和力量,让您轻松驾驭进取的风帆,驶向理想的港湾;使您愉快穿越茂密的丛林,登上希望的峰巅!

本套丛书,熔铸了全国数百名专家全部的心血与宝贵的经验,寄托着海内百万名师生拳拳的期望与浓浓的深情。拥有她,相信您就会多一份欢欣。轻轻翻开《PK 高考》,您会惊喜地发现,这里有您理想放飞的蓝天,这里也有您心灵停泊的港湾,这里还有您骏马奔驰的草原。我们坚信,随着我们的相识,相交,相知,《PK 高考》一定能成为您的益友良师!

本册是数学分册,其主要栏目有:

考纲要求 既叙述了 2006 年考试大纲的最新要求,又结合近年来高考试题的实际命题趋势,综合全国名师的备考经验,专门列出“复习应达到的要求”。让师生明确大纲要求与实际考试要求,轻松驾驭高考。

知识框图 以框图形式扼要展示本章知识体系,理清知识脉络条理,有机地整合各知识点,帮助学生理清思路,宏观把握整章知识结构。

复习指导 从指导性的角度叙述了全国名师最有效的复习方法,对学生、对教师都有很好的指导作用。

知识精要 叙述各小节的重要基础知识(包括定义、定理、公式)与重要规律,其目的是让学生全面掌握有关知识,巩固基础。

考题体验 选取近年高考基础性真题(选择题与填空题),供学生在学完知识精要后,自己练习完成。

例题精讲 根据本小节的内容、高考要求,结合主要题型和解题技巧,选择了若干例题。

错解剖析 在本小节内容中的易错点上选一至两道错解题。

方法归纳 叙述本内容的解题方法与技巧。

题型归纳 根据本章内容、高考要求,归纳出若干个高考热点题型,让学生明确高考试题的主要题型。

《PK 高考》编委会

目 录

CONTENT

(选修 I)

第一章 集合与简易逻辑	(1)	§3.5 数列的综合应用	(64)
§1.1 集合的概念与运算	(2)	本章小结	(67)
§1.2 逻辑联结词和四种命题	(5)	第四章 三角函数	(72)
§1.3 充要条件	(7)	§4.1 三角函数的概念	(73)
本章小结	(10)	§4.2 同角三角函数的关系及诱导公式	(76)
第二章 函数与导数	(13)	§4.3 三角函数式的化简与求值	(79)
§2.1 映射、函数、反函数	(14)	§4.4 三角函数的图象	(82)
§2.2 函数的解析式与定义域	(17)	§4.5 三角函数的性质(一)	(85)
§2.3 函数的值域	(20)	§4.6 三角函数的性质(二)	(88)
§2.4 函数的奇偶性与周期性	(23)	§4.7 三角函数的最值问题	(91)
§2.5 函数的单调性	(26)	本章小结	(94)
§2.6 函数的图象	(29)	第五章 平面向量	(99)
§2.7 函数的最大值和最小值	(32)	§5.1 平面向量的概念	(100)
§2.8 指数函数与对数函数	(35)	§5.2 平面向量的坐标运算	(102)
§2.9 函数的综合应用	(38)	§5.3 平面向量的数量积	(104)
§2.10 导数的概念及运算法则	(41)	§5.4 平移与解三角形	(106)
§2.11 导数的综合应用	(44)	§5.5 平面向量与代数的综合问题	(109)
本章小结	(47)	§5.6 平面向量与几何的综合问题	(111)
第三章 数列	(51)	本章小结	(113)
§3.1 数列的概念	(52)	第六章 不等式	(117)
§3.2 等差数列	(55)	§6.1 不等式的概念和性质	(118)
§3.3 等比数列	(58)	§6.2 不等式的证明(一)(比较法、分析法、综合法)	(120)
§3.4 数列的求和	(61)	§6.3 不等式的证明(二)(其他方法)	(122)

C O N T E N T

§6.4 不等式的解法	(125)	§9.5 空间角和距离	(198)
§6.5 含绝对值的不等式	(128)	§9.6 翻折问题	(201)
§6.6 不等式的综合应用	(130)	§9.7 棱柱、棱锥	(204)
本章小结	(133)	§9.8 多面体和正多面体	(207)
第七章 直线和圆	(137)	§9.9 球	(209)
§7.1 直线方程	(139)	§9.10 空间向量及其运算	(212)
§7.2 直线与直线的位置关系	(141)	§9.11 空间向量的坐标运算	(215)
§7.3 简单的线性规划及其实际应用	(144)	§9.12 空间位置关系的向量解法	(218)
§7.4 曲线和方程	(147)	本章小结	(221)
§7.5 圆的方程	(150)	第十章 排列、组合、二项式定理和概率	(224)
本章小结	(152)	§10.1 分类计数原理与分步计数原理	(225)
第八章 圆锥曲线	(156)	§10.2 排列、组合的基本问题	(228)
§8.1 椭圆	(157)	§10.3 排列、组合的综合应用	(231)
§8.2 双曲线	(160)	§10.4 二项式定理	(234)
§8.3 抛物线	(163)	§10.5 随机事件的概率	(236)
§8.4 直线与圆锥曲线的位置关系	(166)	§10.6 互斥事件有一个发生的概率	(239)
§8.5 关于对称的问题	(169)	§10.7 相互独立事件同时发生的概率	(242)
§8.6 与圆锥曲线有关的问题	(172)	本章小结	(245)
本章小结	(175)	第十一章 统计	(248)
第九章 直线、平面、简单几何体	(182)	§11.1 抽样方法	(249)
§9.1 平面与空间两条直线	(184)	§11.2 总体分布的估计 总体期望和方差的估计	(252)
§9.2 空间直线与平面	(188)	本章小结	(255)
§9.3 空间平面与平面	(191)		
§9.4 平行与垂直	(194)		

第一章 集合与简易逻辑



考纲要求

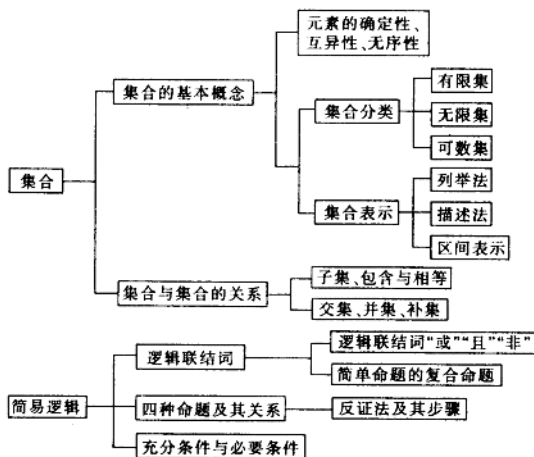
明确考纲 有的放矢

考试内容	考纲要求		在考纲要求的基础上复习还应达到的要求	
	层次	内容	层次	内容
集合	了解	了解空集和全集的意义, 了解属于、包含、相等关系的意义	灵活运用	正确进行集合的运算, 用文氏图进行集合的交、并、补运算, 借助数轴进行数集之间的运算
	理解	理解集合、子集、交集、补集、并集的概念		
	掌握	掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合		
简易逻辑	理解	理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义, 理解四种命题及其相互关系	了解	命题的概念和命题的构成,并能判断命题的真假, 初步认识反证法及其思想
	掌握	掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义	掌握	反证法证题的一般步骤,会用反证法证明简单的问题



知识框图

构建网络 胸有全局



复习指导

讲究方法 掌握技巧

集合的初步知识与简易逻辑知识以用集合语言表达数学问题为特点,与高中各章知识点交汇,考查考生的推理技能,发展学生的思维能力.

本章内容在高考中以考查空集与全集的概念,元素与集合、集合与集合之间的关系,集合的交、并、补运算为重点,以上内容又以集合的运算为重点考查内容,逻辑联结词与充要条件这部分,以充要条件为重点考查内容.

本章内容概念性强,考题大都为容易的选择题,因此复习中应注意:

1. 复习集合,可以从两个方面入手,一方面是集合的概念之间的区别与联系,另一方面是对集合知识的应用.
2. 主要是把握集合与元素、集合与集合之间的关系,弄清有关的术语和符号,特别是对集合中的元素的属性要分清楚.
3. 要深刻理解和准确把握集合、元素、子、交、补、命题、充要条件等基本概念和“或”“且”“非”等逻辑联结词的含义,这样才能准确地解答有关集合、简易逻辑的基本概念问题,才能对有关命题做出恰当的判断.要注意逻辑联结词“或”“且”“非”与集合中的“并”“交”“补”是相关的,相互对照可加深对双方的认识和理解.
4. 复习逻辑知识时,要抓住所学的几个知识点,通过解决一些简单的问题达到理解、掌握逻辑知识的目的.
5. 集合多与函数、方程、不等式有关,要注意知识的融会贯通,强化数形结合思想,自觉利用文氏图、数轴、函数图象等来帮助分析和理解,提高形象思维能力.

§ 1.1 集合的概念与运算



知识精要

考点知识 牢记在心

1. 集合中元素的三要素

(1) 确定性: 对于一个给定的集合, 任何一个对象或者是这个集合中的元素, 或者不是它的元素, 这是集合的最基本特征.

(2) 互异性: 集合中的任何两个元素都是能区分的 (即互不相同的), 相同的对象归入任何一个集合时, 只能算这个集合的一个元素.

(3) 无序性: 在一个集合中, 通常不考虑它的元素之间的顺序, 也就是说 $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$.

2. 常用的集合的表示法

常用的有列举法、描述法、区间表示法和图示法. 有限集常用列举法表示, 而无限集常用描述法或区间表示法.

用描述法表示集合时, 集合中元素的意义取决于它的“代表”元素.

3. 元素与集合, 集合与集合之间的关系

(1) 元素与集合之间的关系是“属于”或“不属于”; 对象 x 是集合 A 的元素称 x 属于 A , 记作 $x \in A$, 否则称 x 不属于 A , 记作 $x \notin A$. 记号“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”只能用于表示元素与集合之间的关系, 不能用来表述两个集合之间的关系.

(2) 若集合 A 中任一元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$, 读作 A 包含于 B , 或记作 $B \supseteq A$, 读作 B 包含 A . 若 A 是 B 的子集且 B 中至少存在一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$, 读作 A 真包含于 B , 或记作 $B \supset A$, 读作 B 真包含 A . 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

(3) 常用集合之间的包含关系

$$\emptyset \subseteq N^+ \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C.$$

注: N^+ 与 N 都表示正整数集.

4. 集合的运算

(1) 交集: 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(2) 并集: 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 与集合 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(3) 补集: 设 U 是一个集合 A 是 U 的一个子集 (即 $A \subseteq U$), 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做子集 A 在全集 U 中的补集 (或余集), 记为 $\complement_U A$, $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

5. 集合运算中常用结论

$$(1) \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B),$$

$$\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B).$$

$$(2) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

(3) 由 n 个元素所组成的集合, 其子集个数为 2^n 个, 即是 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

(4) 空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$. 这个结论在解集中容易忽略. 结论 (1) 和 (2) 常常是作为“等价转化”的依据, 若已知 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$. 结论 (3) 是集合与组合数的综合运用的结果, 用以计算集合子集的个数.

6. 在集合中应用数形结合的思想时要认清集合的特征, 准确地转化为图形关系, 借助图形使问题直观、具体、准确地得到解决, 因此要重视数形结合的思想方法的运用 (如数轴、几何图形、文氏图等).

7. 集合问题与函数、方程、不等式以及整个中学数学知识有关. 要正确运用集合的思想将问题相互转化, 特别是数与形、代数与几何之间的转化.



考题体验

试解真题 了解趋势

1. 设集合 $M = \{x | x^2 - x < 0\}$, $N = \{x | |x| < 2\}$, 则

[2006 年 · 全国 I]

- (A) $M \cap N = \emptyset$. (B) $M \cap N = M$.
(C) $M \cup N = M$. (D) $M \cup N = \mathbf{R}$.

[答案] B

2. 设集合 $A = \{x | |x - 2| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = -x^2, -1 \leq x \leq 2\}$,

则 $\complement_{\mathbf{R}} (A \cap B)$ 等于 [2006 年 · 安徽]

- (A) $\mathbf{R}$. (B) $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$.
(C) $\{0\}$. (D) $\emptyset$.

[答案] B

3. 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是 [2006 年 · 辽宁]

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 8.

[答案] C

4. 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有

[2006 年 · 江苏]

- (A) $A \subseteq C$. (B) $C \subseteq A$. (C) $A \neq C$. (D) $A \neq \emptyset$.

[答案] A



例题精讲

名师指点 注意顿悟

【例 1】(1)已知集合 $M=\{x|x^2-3x-28\leq 0\}$, $N=\{x|x^2-x-6>0\}$, 则 $M\cap N$ 为 ()

- (A) $\{x|-4\leq x<-2 \text{ 或 } 3<x\leq 7\}$.
 (B) $\{x|-4<x\leq -2 \text{ 或 } 3\leq x<7\}$.
 (C) $\{x|x\leq -2 \text{ 或 } x>3\}$.
 (D) $\{x|x<-2 \text{ 或 } x\geq 3\}$.

(2)判定下列集合之间的关系,用适当的符号表示它们的关系.

①若 $A=\{x\in\mathbb{Z}|x=2n, n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{x|x \text{ 是偶数}\}$,
 则 A B .

②若 $A=\{x|x \text{ 是平行四边形}\}$, $B=\{x|x \text{ 是正方形}\}$,
 则 A B .

③若 $A=\{x\in\mathbb{R}|x^2-\sqrt{5}x+1=0\}$, $B=\{x^2-\sqrt{5}x+1=0, 2x^2-3x-2=0\}$, 则 A B .

④若 $A=\{x\in\mathbb{R}|\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}>0\}$,
 $B=\{y\in\mathbb{R}|y=(x+1)^2-5, x\in\mathbb{R}\}$, 则 A B .

⑤若 $A=\{x|x \text{ 是奇数}\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}|x=4n\pm 1, n\in\mathbb{Z}\}$,
 则 A B .

[答案](1)A; (2)① $\subseteq$ ② $\supseteq$ ③ $\subset$ ④ $\supseteq$ ⑤ $=$

【例 2】设 $A=\{-4, 2a-1, a^2\}$, $B=\{9, a-5, 1-a\}$. 已知 $A\cap B=\{9\}$, 求实数 a 的值.

[答案] $a=-3$

【例 3】设 $A=\{x|1<x<3\}$, 又设 B 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x^2-2x+a\leq 0, \\ x^2-2bx+5\leq 0 \end{cases}$ 的解集. 试确定 a, b 的取值范围, 使得 $A\subseteq B$.

[答案] $a\leq -3$ 且 $b\geq 3$



错解剖析

前车之覆 后车之鉴

【例】已知 $f(x) = x^2$, 集合 $A = \{x | f(x+1) = ax\}$, 且 $A \cup \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+$, 求实数 a 的取值范围.

[错解] 由 $f(x+1) = ax$ 和 $f(x) = x^2$ 可得 $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$, 又由 $A \cup \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+$, 得 $A \subseteq \mathbf{R}^+$, 即 $x > 0$.

则有 $x^2 + (2-a)x + 1 = 0$ 有正根, 故有

$$\begin{cases} \Delta = (2-a)^2 - 4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = a - 2 > 0, \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 4 \text{ 或 } a \leq 0, \\ a > 2 \end{cases} \Rightarrow a \geq 4.$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

[答案] $a > 0$



方法归纳

牢记方法 掌握规律

1. 集合是近代数学的基本概念之一, 集合思想是一种从整体角度认识问题的思想. 掌握集合知识可以使数学中的一些基本概念表达得更加准确, 理解更为深刻, 中学数学里主要研究数集和点集.

2. 集合中元素的特征: 确定性、互异性、无序性. 这三个特征是理解集合概念和解决有关集合问题的关键.

3. 集合的相等是指两个集合的元素完全相同, 若两个有限的数集相等, 则它们元素的和(或积)也相等.

4. 在研究有关子集问题时, 不要忽略空集, 因为空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集.

5. 要重视数形结合思想的运用, 对于一些比较抽象的集合间的关系, 用图示法或者用曲线、数轴上的区间、韦恩图表示往往更直观. 对于用描述法表示的集合改用列举法, 或用不等式(方程)的解集表示出来, 会更具体、更明确.

6. 对含参数的集合问题, 常采用数形结合进行分类讨论.

7. 要准确理解集合语言, 集合问题常与函数、方程、不等式、解析几何等知识综合.

§ 1.2 逻辑联结词和四种命题



知 识 精 要

考点知识 牢记在心

1. 命题的概念

(1)命题是可以判断真假的语句,命题由题设和结论两部分构成.命题有真假之分,数学中的定义、公理、定理、公式等都是真命题.

(2)逻辑联结词有“或”、“且”、“非”,不含逻辑联结词的命题叫做简单命题.由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.复合命题的构成形式有三种:“ p 或 q ”,“ p 且 q ”,“非 p ”.

(3)判断复合命题真假的形式——真值表

p	真	真	假	假	p	真	真	假	假	p	真	假
q	真	假	真	假	q	真	假	真	假	p 或 q	真	真
p 且 q	真	假	假	假	p 或 q	真	真	真	假	非 p	假	真

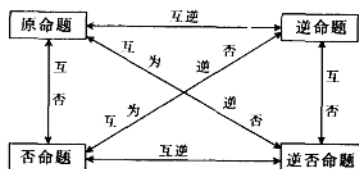
2. 命题的四种形式及相互关系

(1)命题的四种形式.

原命题:若 p 则 q . 逆命题:若 q 则 p .

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$. 逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

(2)四种命题的关系



注意:①原命题与逆否命题、逆命题与否命题是等价关系.

②注意区分“命题的否定”与“否命题”这两个不同的概念.

命题 p 的否定为“非 p ”,记作 $\neg p$,一般只是否定命题 p 的结论,否命题是对原命题“若 p 则 q ”既否定它的条件,又否定它的结论.

3. 当一个命题的真假不易判断时,往往可以判断其逆否命题的真假,从而判断出原命题的真假.

4. 反证法

用反证法证明命题的一般步骤为:

- (1)假设命题的结论不成立,即假设命题结论的反面成立.
- (2)从这个假设出发,经过推理得出矛盾.
- (3)由矛盾判断假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

反证法的第一步是否定结论,在解决实际问题中,需掌握以下词语的否定.

词语	是	都是	大于($>$)	小于($<$)
词语的否定	不是	至少有一个不是	不大于($\leq$)	不小于($\geq$)

词语	所有的	任一个	至少一个	至多一个
词语的否定	某些	某个	一个也没有	至少两个



考 题 体 验

试解真题 了解趋势

1. 关于直线 m, n 与平面 α, β , 有下列四个命题:

①若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$;

②若 $m \perp \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$;

③若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$;

④若 $m \parallel \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel n$.

其中真命题的序号是[2006年·湖北] ()

(A)①②. (B)③④. (C)①④. (D)②③.

[答案]D

2. 命题 p : 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a + b| > 1$ 的充分而不必要条件; 命题 q : 函数 $y = \sqrt{x-1} - 2$ 的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. 则[2004年·福建] ()

(A)“ p 或 q ”为假. (B)“ p 且 q ”为真.

(C) p 真 q 假. (D) p 假 q 真.

[答案]D

3. 设 A, B 为两个集合, 给出下列四个命题:

① $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \in B$; ② $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

③ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$; ④ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \in B$.

其中真命题的序号是_____. (把符合要求的命题序号都填上)[2004年·湖北]

[答案]④

4. 命题“若 $a > b$, 则 $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为_____.

[2005年·江苏]

[答案]“若 $a \leq b$, 则 $2^a \leq 2^b - 1$ ”



例 题 精 讲

名师指点 注意领悟

【例 1】分别写出由下列各组命题构成的“ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“非 p ”形式的复合命题, 并判断其真假.

(1) p : 3 是 9 的约数, q : 3 是 18 的约数.

(2) p : 菱形的对角线相等, q : 菱形的对角线互相垂直.

(3) $p: a \in \{a, b, c\}, q: \{a\} \subseteq \{a, b, c\}.$

(4) $p:$ 不等式 $x^2 + 2x + 2 > 1$ 的解集是 $\mathbf{R}, q:$ 不等式 $x^2 + 2x + 2 \leq 1$ 的解集为 $\emptyset.$

[答案] 略

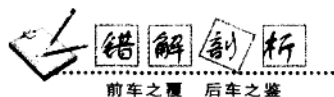
【例 2】已知命题 $p: |x^2 - x| \geq 6; q: x \in \mathbf{Z},$ 若“ p 且 q ”与“非 q ”同时为假命题, 求 x 的值.

[答案] $-1, 0, 1, 2$

【例 3】已知 x 为实数, $a = x^2 + \frac{1}{2}, b = 2 - x, c = x^2 - x + 1,$

用反证法证明: a, b, c 中至少有一个不小于 1.

[答案] 略



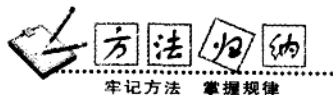
前车之覆 后车之鉴

【例】写出命题“若 $m \leq 2$ 或 $n \leq 3$, 则 $m+n \leq 5$ ”的否命题.

[错解一] 否命题为“若 $m \leq 2$ 或 $n \leq 3$, 则 $m+n > 5$ ”.

[错解二] 否命题为“若 $m > 2$ 或 $n > 3$, 则 $m+n > 5$ ”.

[答案] 若 $m > 2$ 且 $n > 3$, 则 $m+n > 5$



牢记方法 掌握规律

1. 复合命题真假的判断, 首先要判断组成复合命题的简单命题的真假, 然后再依据真值表判断.

2. 四种命题之间的真假关系:

(1) 原命题为真时, 其逆命题和否命题不一定为真, 只有其逆否命题为真;

(2) 原命题的逆命题和否命题互为逆否, 它们同真同假.

3. 用反证法证明命题的步骤是:

① 假设命题的结论不成立;

② 从这个假设出发, 经过推理论证, 得出矛盾;

③ 由矛盾判定假设不正确, 从而肯定原命题的结论正确.

反证法是一种重要的间接证法, 一般地, 命题的结论涉及“无限”的形式, “否定”的形式或“至多”、“至少”的形式可以考虑运用反证法.

§ 1.3 充要条件



知识精要

考点知识 牢记在心

1. 充分条件与必要条件

充分条件:若 $p \Rightarrow q$, 则 p 叫做 q 的充分条件, q 叫做 p 的必要条件. 原命题成立, 命题中的条件为充分的.

必要条件:若 $q \Rightarrow p$, 则 p 叫做 q 的必要条件, q 叫做 p 的充分条件, 逆命题成立, 命题中的条件为必要的.

充要条件:若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 即 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 叫做 q 的充要条件. 原命题和逆命题都成立, 命题中的条件和结论互为充要条件.

既不充分也不必要条件:若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 叫做 q 的既不充分也不必要条件.

以上四种结果通常作为选择题的四个选项.

值得注意的是, 充分性是:条件 $\Rightarrow$ 结论, 而不是“前” $\Rightarrow$ “后”的顺序关系.

2. 利用集合的包含关系判断命题之间的充要关系

设满足条件 p 的元素构成集合 A , 满足条件 q 的元素构成集合 B .

(1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 成立的充分条件.

(2) 若 $A = B$, 则 p 是 q 成立的充要条件.

(3) 若 $A \subsetneq B$, 则 p 是 q 成立的充分而不必要条件.

(4) 若 $A \not\subseteq B$, 且 $B \not\subseteq A$, 则 p 是 q 成立的既不充分也不必要条件.



考题体验

试解真题 了解趋势

1. 有限集合 S 中元素的个数记作 $\text{card}(S)$. 设 A, B 都为有限集合, 给出下列命题:

① $A \cap B = \emptyset$ 的充要条件是 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$;

② $A \subseteq B$ 的必要条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$;

③ $A \not\subseteq B$ 的充分条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$;

④ $A = B$ 的充要条件是 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

其中真命题的序号是 [2006 年 · 湖北]

(A) ③④. (B) ①②. (C) ①④. (D) ②③.

[答案] B

2. “ $\tan \alpha = 1$ ”是“ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”的 [2006 年 · 福建] ()

(A) 充分而不必要条件. (B) 必要而不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

[答案] B

3. 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集, 则 $A \subseteq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的 [2005 年 · 山东] ()

(A) 充分而不必要条件.

(B) 必要而不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

[答案] A

4. 集合 $A = \{x | \frac{x-1}{x+1} < 0\}$, $B = \{x | |x-b| < a\}$. 若“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件, 则 b 的取值范围可以是 [2005 年 · 湖南] ()

(A) $-2 \leq b < 0$.

(B) $0 < b \leq 2$.

(C) $-3 < b < -1$.

(D) $-1 \leq b < 2$.

[答案] D



例题精讲

名师指点 注意领悟

【例 1】(1) “两个三角形全等”是“这两个三角形相似”的 _____ 条件.

(2) 如果 p 是 q 的充分而不必要条件, r 是 q 的充要条件, s 是 r 的必要而不充分条件, 那么 s 是 p 的 _____ 条件.

(3) $-2 < x < 5$ 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的 _____ 条件.

(4) 已知 A 和 B 是两个命题, 如果 A 是 B 的充分条件, 那么 $\neg B$ 是 $\neg A$ 的 _____ 条件?

[答案] (1) 充分而不必要; (2) 必要而不充分; (3) 必要而不充分; (4) 充分而不必要

【例 2】已知 $p: A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + 1 \leq 0\}$, $q: B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$. 若 p 是 q 的充分而不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

[答案] $-2 \leq a < 2$

【例 3】求证:关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

[答案]略



错解剖析

前车之覆 后车之鉴

【例】设关于 x 的二次方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ 有两根 x_1, x_2 , 且满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$. 求 k 的取值范围.

[错解] $\because 0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$,

$$\therefore \begin{cases} 1 < \frac{k+13}{7} < 3, \\ 0 < \frac{k^2-k-2}{7} < 2, \\ \Delta = (k+13)^2 - 28(k^2-k-2) \geq 0, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\therefore k \in (1 - \frac{2}{3}\sqrt{21}, -1) \cup (2, 1 + \frac{2}{3}\sqrt{21}).$$

[答案] $-2 < k < -1$ 或 $3 < k < 4$



方法归纳

牢记方法 掌握规律

1. 判断充分条件和必要条件的方法:

(1) 定义法: 根据充分条件和必要条件的定义, 直接判断;

(2) 传递法: 对于较复杂的关系, 常用 $\Rightarrow, \Leftarrow, \nRightarrow$ 等符号进行传递, 就可以得出结论;

(3) 集合法: 运用集合思想来判断充分条件和必要条件是一种行之有效的方法.

若 p 以集合 A 的形式出现, q 以集合 B 的形式出现, 即 $A = \{x | p(x)\}, B = \{x | q(x)\}$, 则

①若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件;

②若 $B \subseteq A$, 则 p 是 q 的必要条件;

③若 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.

(4) 等价命题法: 利用原命题和逆否命题是等价的这个结论, 有时可以准确快捷地得出结果.

2. 充要条件的证明

要理解“ p 的充要条件是 q ”意思是“ q 是 p 的充要条件”. 在证“ p 的充要条件是 q ”时, 若 $q \Rightarrow p$, 则充分条件即充分性成立. 若 $p \Rightarrow q$, 则必要条件即必要性成立.