

高等数学
好题
精编系列

微积分

学习指导与题解

(下册)

○ 黄光谷 黄川 李杨 蔡晓英 编

- 大学生 **备考的帮手**
- 考研者 **成功的阶梯**
- 教师们 **命题的参考**

· 华中科技大学出版社 ·

<http://www.hustp.com>

HAOTI

微积分

学习指导与题解

（下册）

— 熊力强、肖冰、李强、熊瑞良 编

- 微分学：一元微分学、多元微分学
- 积分学：一元积分学、多元积分学
- 微分方程：常微分方程、偏微分方程

高等数学好题精编系列

微积分学习指导与题解

(下 册)

黄光谷 黄 川 编
李 杨 蔡晓英

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与题解(下册)/黄光谷 等编
武汉:华中科技大学出版社,2006年12月
ISBN 7-5609-3897-3

I. 微…

I. ①黄… ②黄… ③李… ④蔡…

Ⅱ. 微积分-高等学校-教学参考资料

Ⅳ. O172

微积分学习指导与题解(下册)

黄光谷 等编

策划编辑:钟小珉
责任编辑:王汉江
责任校对:陈 骏

封面设计:刘 卉
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:850×1168 1/32

印张:16.5

字数:393 000

版次:2006年12月第1版

印次:2006年12月第1次印刷

定价:24.80元

ISBN 7-5609-3897-3/O·402

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书精选了微积分(即高等数学)课程最常用的四种教材和一本考研辅导书中有代表性的习题或考题,按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称“考纲”)“数学一”中高等数学所列内容作了取舍,按前言中书[1]所列顺序编目,共分九章(上册含四章,下册含五章),各章章首列有学习指导,含考纲要求、重点难点和学习注意,以指导读者学习;各节开头列有该节的内容提要,包括主要概念、公式、方法和定理,然后精选了五种书的好题并逐题作了详细地分析或解答.

本书集各家之长,精选各书好题于一体,具有典型性、系统性、资料性和很强的可读性.特别适宜于作为理科、工科、农林、财经、管理等专业本、专科生学习微积分(即高等数学)课程的参考书,也可作为考研者的优秀复习资料和指南,还可为教师提供考试命题的参考.

前 言

要学好数学,一要深入理解数学概念、定理、公式等基础知识,二要学会解题,并从中掌握方法,培养能力和素质.本书侧重于后者,精选了下列四种常用教材和一本考研辅导书中的好习题或考题,并作了详细分析或解答,以作示范.

[1]同济大学应用数学系.微积分(上、下册).第2版.北京:高等教育出版社,2003.本书各节第一部分为内容提要,与书[1]的记号一致;第二部分对应于书[1],简称“微积分习题选解”.各题编号,如1-3,第一个数字1是本书序号,第二个数字3是原教材[1]的题号;而小题号是原书编号,以下类似.下面书中有(A)、(B)组题的,则分别记为1-A-3,3-B-6等.

[2]董加礼,孙丽华.工科数学基础(上、下册).北京:高等教育出版社,2001.对应的本书各节第三部分,简称“工科数学习题选解”.

[3]王锦森,马知恩.工科数学分析基础(上、下册).北京:高等教育出版社,2001.对应的本书各节第四部分,简称“工科分析习题选解”.

[4]华东师范大学数学系.数学分析(上、下册).第3版.北京:高等教育出版社,2001.对应的本书各节第五部分简称“数学分析习题选解”.

[5]黄光谷.考研数学题典.武汉:华中科技大学出版社,2002.对应本书各节的第六部分,简称“考研题选解”.其中序号1. I、01、一、(1)、(3')依次表示为指该节本书的第1题、考研“数学一”、2001年试题的第一大题之第(1)小题,本题满分3分,其他类似.

有些学校的向量代数与空间解析几何、微分方程是另作一门课程专门开设的,书[2]、[3]、[4]不包括这些内容,相应节中的第几部分的编号有变动.

本书按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称“考纲”)“数学一”中高等数学的考试内容决定内容取舍和选题,按教材[1]的顺序编目,共分九章.本书各章首列有学习指导,含考纲要求、重点难点和学习注意,以指导读者学习.其中,“考纲”与“高等数学课程基本要求”(相当于“教学大纲”)是基本一致的,达到了“考纲”的要求,也就达到了教学要求.阅读各章“考纲要求”时,要注意其中“了解”、“理解”、“会”、“掌握”等用词层次的不同,以便掌握分寸.“重点难点”与“学习注意”是提纲挈领、原则性的,有待读者在阅读了各部分习题选解以后,再重新细心体会.

选入的各节习题,有的题已有详细的分析或提示,则以其代替该题的解答,不重复解答.题后留有方括号[]的是选择题,画有横线_____的是填空题及其答案.由于本书是题解书,素材又取自不同的书,前后顺序不完全一致,有的解答可能用到稍后的知识,特此说明.

这五种书的习题或考题都较好,但本书限于篇幅,不能逐一解答;只精选了各书约 $1/4 \sim 1/3$ 的题解合成一书.本书采众家之长,熟读本书,相当于读了五种题解书的精华.有些题可以一题多解,本书只给出了一种常见解法,其他解法留给读者思考.

感谢华中科技大学出版社的领导和编辑对本书的指导、支持和细心工作.本书中用到了许多习题、考题和资料,特此向所引用书籍的作者一并表示感谢!

由于作者水平有限,本书中难免会有错误和缺点,恳请读者和同行批评指正,以便再版时修改.

编 者
2006年10月

记号说明

\mathbf{N} 、 \mathbf{Z} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 、 \mathbf{C} 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

\mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+ 表示正整数集 (\mathbf{N} 中去掉数 0 的集合).

\mathbf{R}^+ (\mathbf{R}^-) 表示正 (负) 实数集.

$U(a, \delta)$ 表示以 a 为中心, δ 为半径的邻域.

$\dot{U}(a, \delta)$ 表示去心邻域.

\forall 表示“任意给定”、“任给”或“对任意的”.

\exists 表示“存在”, “有”.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ 表示“记为”、“定义为”.

\Rightarrow 表示“推出”、“推得”或“蕴涵”.

\Leftrightarrow 表示可“互推出”、“等价于”或“充要条件”.

$\complement_A B$ 表示 A 中子集 B 的补集或余集.

$I \setminus A$ 表示 I 与 A 之差.

$f(x) \in B(I)$ 表示区间 I 上的全体有界函数之集.

$C(I)$ 表示 I 上全体连续函数之集.

$D(I)$ 表示 I 上全体可导函数之集.

$D^n(I)$ 表示 I 上全体 n 阶可导函数之集.

$R(I)$ 表示 I 上全体 (黎曼) 可积函数之集.

$f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 表示函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在开区间 (a, b) 内可导.

$e^{f(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \exp f(x)$.

目 录

第五章 向量代数与空间解析几何	(1)
学习指导	(1)
第一节 向量代数	(2)
一、内容提要	(2)
二、微积分习题选解	(4)
三、考研题选解	(10)
第二节 平面与空间直线	(10)
一、内容提要	(10)
二、微积分习题选解	(11)
三、考研题选解	(19)
第三节 曲面与空间曲线	(22)
一、内容提要	(22)
二、微积分习题选解	(24)
三、考研题选解	(30)
总习题选解	(31)
一、微积分总习题选解	(31)
第六章 多元函数微分学	(38)
学习指导	(38)
第一节 多元函数的基本概念	(39)
一、内容提要	(39)
二、微积分习题选解	(41)
三、工科教学习题选解	(43)
四、工科分析习题选解	(46)

五、数学分析习题选解·····	(49)
六、考研题选解·····	(53)
第二节 偏导数与全微分·····	(55)
一、内容提要·····	(55)
二、微积分习题选解·····	(56)
三、工科数学习题选解·····	(61)
四、工科分析习题选解·····	(65)
五、数学分析习题选解·····	(68)
六、考研题选解·····	(72)
第三节 复合函数的求导法则·····	(74)
一、内容提要·····	(74)
二、微积分习题选解·····	(75)
三、工科数学习题选解·····	(78)
四、工科分析习题选解·····	(82)
五、数学分析习题选解·····	(83)
六、考研题选解·····	(86)
第四节 隐函数的求导公式·····	(90)
一、内容提要·····	(90)
二、微积分习题选解·····	(91)
三、工科数学习题选解·····	(93)
四、工科分析习题选解·····	(94)
五、数学分析习题选解·····	(96)
六、考研题选解·····	(99)
第五节 方向导数与梯度·····	(102)
一、内容提要·····	(102)
二、微积分习题选解·····	(104)
三、工科数学习题选解·····	(106)
四、工科分析习题选解·····	(108)
五、数学分析习题选解·····	(110)

六、考研题选解	(111)
第六节 多元函数微分学的几何应用	(114)
一、内容提要	(114)
二、微积分习题选解	(116)
三、工科数学习题选解	(119)
四、工科分析习题选解	(121)
五、数学分析习题选解	(124)
六、考研题选解	(127)
第七节 多元函数的极值	(129)
一、内容提要	(129)
二、微积分习题选解	(130)
三、工科数学习题选解	(134)
四、工科分析习题选解	(136)
五、数学分析习题选解	(140)
六、考研题选解	(142)
总习题选解	(148)
一、微积分总习题选解	(148)
二、工科分析综合练习题选解	(152)
三、数学分析总练习题选解	(153)
第七章 重积分	(160)
学习指导	(160)
第一节 重积分的概念与性质	(161)
一、内容提要	(161)
二、微积分习题选解	(162)
三、工科数学习题选解	(165)
四、工科分析习题选解	(167)
五、数学分析习题选解	(168)
六、考研题选解	(170)

第二节 二重积分的计算	(172)
一、内容提要	(172)
二、微积分习题选解	(174)
三、工科数学习题选解	(179)
四、工科分析习题选解	(186)
五、数学分析习题选解	(190)
六、考研题选解	(195)
第三节 三重积分的计算	(205)
一、内容提要	(205)
二、微积分习题选解	(206)
三、工科数学习题选解	(210)
四、工科分析习题选解	(213)
五、数学分析习题选解	(220)
六、考研题选解	(225)
第四节 重积分的应用	(228)
一、内容提要	(228)
二、微积分习题选解	(230)
三、工科数学习题选解	(234)
四、工科分析习题选解	(235)
五、数学分析习题选解	(238)
六、考研题选解	(241)
总习题选解	(243)
一、微积分总习题选解	(243)
二、工科分析综合练习题选解	(248)
三、数学分析总练习题选解	(249)
第八章 曲线积分与曲面积分	(255)
学习指导	(255)
第一节 第一类曲线积分	(256)

一、内容提要	(256)
二、微积分习题选解	(257)
三、工科数学习题选解	(261)
四、工科分析习题选解	(264)
五、数学分析习题选解	(267)
六、考研题选解	(269)
第二节 第一类曲面积分	(270)
一、内容提要	(270)
二、微积分习题选解	(271)
三、工科数学习题选解	(275)
四、工科分析习题选解	(278)
五、数学分析习题选解	(282)
六、考研题选解	(283)
第三节 第二类曲线积分	(286)
一、内容提要	(286)
二、微积分习题选解	(288)
三、工科数学习题选解	(291)
四、工科分析习题选解	(294)
五、数学分析习题选解	(296)
六、考研题选解	(299)
第四节 格林公式	(303)
一、内容提要	(303)
二、微积分习题选解	(304)
三、工科数学习题选解	(309)
四、工科分析习题选解	(312)
五、数学分析习题选解	(316)
六、考研题选解	(319)
第五节 第二类曲面积分	(325)
一、内容提要	(325)

二、微积分习题选解	(327)
三、工科数学习题选解	(331)
四、工科分析习题选解	(333)
五、数学分析习题选解	(335)
六、考研题选解	(338)
第六节 高斯公式与散度	(340)
一、内容提要	(340)
二、微积分习题选解	(340)
三、工科数学习题选解	(343)
四、工科分析习题选解	(344)
五、数学分析习题选解	(346)
六、考研题选解	(348)
第七节 斯托克斯公式与旋度	(353)
一、内容提要	(353)
二、微积分习题选解	(354)
三、工科数学习题选解	(357)
四、工科分析习题选解	(359)
五、数学分析习题选解	(361)
六、考研题选解	(362)
总习题选解	(363)
一、微积分总习题选解	(363)
二、数学分析总练习题选解	(369)
第九章 无穷级数	(377)
学习指导	(377)
第一节 数项级数	(378)
一、内容提要	(378)
二、微积分习题选解	(381)
三、工科数学习题选解	(390)

四、工科分析习题选解	(396)
五、数学分析习题选解	(402)
六、考研题选解	(408)
第二节 幂级数及其应用	(415)
一、内容提要	(415)
二、微积分习题选解	(419)
三、工科数学习题选解	(427)
四、工科分析习题选解	(429)
五、数学分析习题选解	(436)
六、考研题选解	(441)
第三节 傅里叶级数	(448)
一、内容提要	(448)
二、微积分习题选解	(450)
三、工科数学习题选解	(454)
四、工科分析习题选解	(459)
五、数学分析习题选解	(462)
六、考研题选解	(467)
总习题选解	(471)
一、微积分总习题选解	(471)
二、工科分析综合练习题选解	(478)
三、数学分析总练习题选解	(480)
附录 全国硕士研究生入学统一考试数学一至四	
试题、参考答案和评分参考	(485)
参考文献	(510)

第五章 向量代数与空间解析几何

学习指导

(一) 考纲要求

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件.
3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.
4. 掌握平面方程和直线方程及其求法,会用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.
5. 理解曲面方程的概念,了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行坐标轴的柱面方程.
6. 了解空间曲线的参数方程和一般方程.
7. 了解空间曲线在坐标面上的投影,并会求其方程.

(二) 重点难点

1. 重点:数量积与向量积,平面与直线的各式方程及位置关系,常见曲面(柱面、锥面、旋转曲面、球、椭球及其他常用二次曲面)的方程与图形.
2. 难点:建立空间观念,进行数形转化(曲面、曲线的方程与图形的对应关系),画空间立体图形.

(三) 学习注意

1. 如果读者学习立体几何已形成空间观念,学习平面解析几

何已习惯数(式)形转化,那么学习本章不会困难,无非是将平面直角坐标系中曲线(含直线)的方程与图形的问题,推广到空间直角坐标系中曲面(含平面)、曲线(含直线)的方程与图形的问题.读者在学习本章时,要注意用类比的方法,将三维空间与二维平面上的相应问题进行对比,比较它们的异同,从已知到未知,是容易掌握空间解析几何的知识的.

至于向量代数的内容,读者在中学物理与复数(向量表示)中已有接触,学习这部分也不会困难.较困难的是向量积,可用行列式表示向量积,就容易计算了.

2. 空间曲线与曲面在坐标面上的投影(或投影域)在计算重积分时经常用到,要想象空间曲线与曲面、投影柱面、投影曲线(或投影区域)的形状,它们方程的异同.

3. 在想象或画出空间立体的图形时,常用“截痕法”与“拼图法”,读者要熟悉它们.

第一节 向量代数

一、内容提要

(一) 向量及其线性运算

空间直角坐标系(略),距离公式

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

向量定义、几何表示与坐标表示(略).

向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ① 的模 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

① 有时我们记 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \stackrel{\text{def}}{=} (a_x, a_y, a_z)$, 下同.