线性代数

解题方法

刘金山　吴明芬 编著

华南理工大学出版社

线性代数解题方法

刘金山　吴明芬 编著

華南理工大學出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题方法/刘金山,吴明芬编著.—广州:华南理工大学出版社,2000.6

ISBN 7-5623-1532-9

Ⅰ.线…

Ⅱ.①刘…②吴…

Ⅲ.线性代数-解题

Ⅳ.O151.2-44

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山　邮编 510640)

责任编辑　欧建岸

各地新华书店经销

中山市新华印刷厂印装

*

2000 年 6 月第 1 版　2000 年 6 月第 1 次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:9.75 字数:250 千字

印数:1—5000 册

定价:14.00 元

前　　言

《线性代数解题方法》是根据工科“线性代数”课程教学基本要求而编写的辅助教材、学习参考书. 本书依照一般《线性代数》教材的内容而编写，因此，不管读者使用什么样的工科类或其它各类《线性代数》教材，都能使用本书.

本书编写的目的是对在校大学生学习线性代数提供一些帮助，同时对电大和各类自学考试，或成人教育的学生提供一些辅导.

学生在学习线性代数时，往往感到抽象难懂，对基本概念及定理结论在理解上感到困难，特别是对如何把所学内容具体用到解题上更感到难以下手，缺少思路，在这些方面迫切需要得到具体指导与帮助. 本书就是为了这些问题而编写的.

本书内容包括行列式、矩阵、向量与线性空间、线性方程组、相似矩阵与矩阵对角化、二次型及线性变换共 7 章. 每章包括 4 个部分：

1. 基本要求与主要内容

明确本章内容的基本要求，指出应掌握的程度，简要概括本章的主要概念、定理和公式等基本内容，归纳在理解概念与掌握方法上应掌握的要点、结论.

2. 例题分析

精选线性代数中具有代表性的典型例题，通过对典型例题的解题分析，归纳出线性代数中各类问题的解题方法和技巧，使学生可以举一反三，触类旁通.

3. 同步练习题

练习题都是经过精心编选的，多数是例题分析中所介绍的解题方法与技巧的训练和运用. 学生可以通过这些练习题进一步掌握解题要领，巩固加深对基本概念的理解，增强解决问题的能力，并检验自己对所学知识的掌握程度.

4. 答案与提示

对同步练习题提供了简答、答案或解法提示. 由于解题方法不惟一，所给的简答与提示不一定是最好方法. 对于具有多种解法的习题，一般只给出一种解法或提示，仅供参考、自查之用.

为了帮助学生了解并适应考试，书末附录中提供了几套线性代数模拟试题，包括全国高等教育自学考试试题和北京航空航天大学研究生入学考试试题.

本书前 3 章由刘金山编写，后 4 章由吴明芬编写，刘金山审阅了全书并统稿. 书中不妥之处，敬请读者批评和指正.

编著者

2000 年 3 月

目　　录

第 1 章　行列式及其计算

§1.1　基本要求与主要内容

一、基本要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.
2. 熟练掌握行列式的性质,会利用行列式的性质计算行列式.
3. 熟练掌握利用行列式按行(列)展开的运算方法.
4. 掌握克莱姆法则.

二、主要内容

1. 排列及其逆序的定义.
2. n 阶行列式的定义:

n 阶行列式是一个数,其定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

它是所有取自不同行、不同列的元素乘积的代数和,其中列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列, t 为这个排列的逆序数.

上述 n 阶行列式D 也可以写成下列代数和形式

$$D=\sum(-1)^{s+t}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 s 和 t 分别是行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

3. 行列式的性质:

(1)行列式 D 转置后其值不变,即 $D=D'$,这里 D'表示D 的转置.

(2)交换行列式的任意两行(或两列),行列式仅改变正负符号.

(3)行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

(4)行列式如果有某两行(列)元素完全相同或成比例,则此行列式为零.

(5)若行列式某一行(列)是两组数之和,则此行列式等于两个行列式之和.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6)把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)上,行列式的值不变.

4. 行列式按行(列)展开:

(1)把行列式中元素 a_{ij}所在的第 i 行、第 j 列划去后,余下的元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}. 而

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为元素 a_{ij}的代数余子式.

(2)行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

(3)行列式 D 的任一行(列)元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s),$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t).$$

5. 行列式按某 k 行(列)展开($1\leqslant k\leqslant n-1$):

(1)把行列式 D 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行,第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列对应的公共元素组成的k阶行列式称为D的一个k阶子式,把剩余的 $n-k$ 行,$n-k$ 列对应元素组成的 $n-k$ 阶子式乘以 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}$称为上述$k$ 阶子式的代数余子式.

(2)[拉普拉斯定理]在 n 阶行列式D 中任取k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n-1$),则这 k 行(列)中的一切 k 阶子式$M_1,M_2,\cdots,M_t$($t=C_n^k$)与它们各自对应的代数余子式 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 的乘积之和等于行列式D,即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t.$$

6. 克莱姆法则:

考虑含有 n 个未知数$x_1,\cdots,x_n$ 和n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该方程组有惟一解 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$,其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$是用$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$代替 D 的第 j 列$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$后构成的 n 阶行列式.

7. 几个特殊的行列式:

(1)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & \cdots & a_{3n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1}a_{n-1\,2}\cdots a_{1n}.$$

(2)范德蒙行列式

$$V_n(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

§1.2 常用方法与例题分析

为简便起见,我们采用以下记号:用 $r_i(c_i)$表示行列式的第 i 行(列),用 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$表示第 i 行(列)与第 j 行(列)交换,用 $kr_i(kc_i)$表示第 i 行(列)各元素乘以数值 k,用 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$表示第 i 行(列)乘以 k 加到第 j 行(列).

一、常用方法

1.利用行列式定义直接计算:

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 D 中不为零的项用一般形式表示为

$$a_{1n-1}a_{2n-2}\cdots a_{n-11}a_{nn}=n!.$$

该项列标排列的逆序数 $t(n-1\ n-2\cdots 1n)$ 等于 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,故

$$D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 此行列式按行看,每行只有一个非零元素,且这些非零元素处在不同行不同列,所以它们的乘积构成该行列式的惟一一个非零项,若按行的顺序排列,此项可表示为 $a_n a_{n-1} a_1 a_2\cdots a_{n-2}$,其逆序数为 $(n-1)+(n-2)=2n-3$,故有

$$D=(-1)^{2n-3}a_n a_{n-1}a_1 a_2\cdots a_{n-2}=-a_1 a_2\cdots a_n.$$

小结 若行列式不含零因子的项只有少数几项,则可考虑用定义直接计算,关键是处理好每项前的符号,求出逆序数. 一般方法是按行序排好,计算列标排列的逆序数. 当然,按列序排好,计算

行标排列的逆序数也一样.对于一般行列式,用定义计算往往相当麻烦,故只有在很特殊情况下才使用这种方法.

2.化为三角形行列式:

若能把一个行列式经过适当变换化为三角形,其结果则可立即算出.因此化三角形是行列式计算中的一个重要方法.常用化法有:

(1)保留某行(列)不动,将其它各行(列)分别乘一个常数加到这一行(列)上.

例 3 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{vmatrix}.$$

解 将第 i 列乘以 $-b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 全部加到第 $n+1$ 列得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & -\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n+3}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

(2)将某行(列)的倍数分别加到其它各行(列).

例 4 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 将各列全部加到第 1 列，并提出公因子，得

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\1&x&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2&x&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2&a_3&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

将第 1 列分别乘 $-a_1$ 加到第 2 列，乘 $-a_2$ 加到第 3 列，…，乘 $-a_n$ 加到第 $n+1$ 列，得

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&x-a_1&0&\cdots&0\\1&a_2-a_1&x-a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2-a_1&a_3-a_2&\cdots&x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

(3)逐行(列)相加.

例 5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&n\\3&4&5&\cdots&n&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}.$$

解 从 $n-1$ 行开始直到第 1 行，每一行乘 -1 加到下一行，得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&1&\cdots&1&0\\1&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n.$$

(4)加边法

加边法是在原行列式的边上增加 1 行 1 列，使 n 阶行列式变成 $n+1$ 阶行列式，但其值保持不变.

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix}.$$

解 将 D 增加 1 行 1 列得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+m & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+m & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+m \end{vmatrix}.$$

用第 1 行的 -1 倍加到其它各行，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & m \end{vmatrix}.$$

从第 2 列开始，每列都乘以 $\frac{1}{m}$ 加到第 1 列，得

$$D=\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{vmatrix}=\left(1+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)m^n.$$