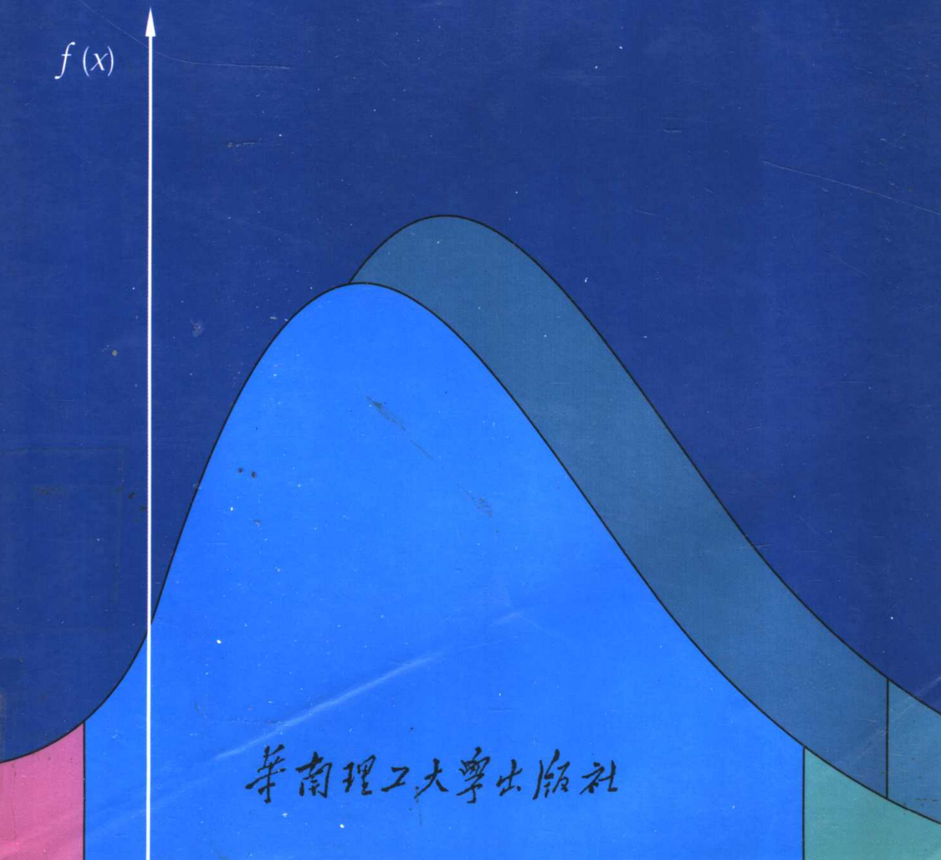
21世纪高校教材

高等数学

张 建 周展宏 主编



华南理工大学出版社

高等数学

张　建　周展宏　主编

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/张建，周展宏主编. —广州：华南理工大学出版社，2002. 9（2004. 1 重印）

ISBN 7-5623-1878-6

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ① 张… ② 周…　Ⅲ. 高等学校-教材　Ⅳ. O13

总 发 行： 华南理工大学出版社

（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）

发行部电话：020-87113487　87111048（传真）

E-mail: scut202@scut.edu.cn

http://www.scutpress.com

责任编辑： 吴兆强

印 刷 者： 广东省农垦总局印刷厂

开　　本： 850×1168　1/32　**印张**：13　**字数**：326 千

版　　次： 2004 年 1 月第 1 版第 2 次印刷

印　　数： 4201—6200 册

定　　价： 22.00 元

《高等数学》编委

主　编　张　建　周展宏

参　编　邝雪松　苏明成　吴土明

前　言

我们在多年教学实践的基础上，结合我校学生的实际情况及我校各相关专业对数学教学的要求，对非理科本科各专业“高等数学”课程的教学内容、深度等问题进行了深入的调查研究，对一些内容进行了必要的删减，在保持“高等数学”课程的基本体系不变的前提下，增加了大量的例题及微积分在经济中的应用等内容，使本教材在培养学生的思维能力方面有所提高。本教材的特点是：①主要适用于普通本科院校非理工类的学生，充分考虑到学生实际情况，具有较强的实用性。②考虑到了“高等数学”教学的发展及社会的需要，具有较强的科学性。

参加本书编写的教师有：张建、周展宏、邝雪松、苏明成、吴土明等。刘志美副教授对全书进行了认真的审阅，并提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

编　者

2002年8月

目　　录

第一章　函数与极限

高等数学以变量为研究对象，而变量之间往往存在相互依赖的关系，这种依赖关系就是所谓的函数关系．极限方法则是研究变量的基本方法．本章将介绍变量、函数、极限和函数连续性的基本概念以及它们的简单性质．

第一节　函　　数

一、集合

集合概念是数学中一个原始的概念，就是说，它不能用更简单的概念定义．例如一个试验区中所有的作物植株，一个牧区的所有羊只，一个教室中的所有学生，实数的全体等等．一般地说，所谓集合是指具有某种特定性质的事物的全体．组成这个集合的事物称为该集合的元素，本书以大写拉丁字母表示集合．对于一个集合 M 来说，如果事物 a 是 M 的元素，就说 a 属于 M，记作 $a \in M$；如果事物 a 不是集合 M 的元素，就说 a 不属于 M，记作 $a \notin M$.

如果一个集合由有限个元素组成，可用列举出它的全体元素的方法来表示，如由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可记作 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

如果一个集合 A 由无穷多个元素组成，通常用如下记号表示：设 A 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，可记作 $A = \{x \mid x$ 所具有的特征$\}$.

例如,xOy 平面上与原点的距离为 1 的所有点组成的集合 A,可记作 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

每个元素都是数的集合称为数集.例如,全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$ 等都是数集.以后用到的集合主要是数集.

如果集合 A 的每个元素都属于集合 B,即若 $x\in A$,则必有 $x\in B$,就说 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).例如,$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$,就称 A 与 B 相等,记作 $A=B$,例如 $A=\{2,3\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,则 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$,并规定空集为任何集合的子集.例如,$\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$是空集.

区间是一种常用的数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x\mid a<x<b\}$称为开区间,记作(a,b),即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$,a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,并且 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,$a$ 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,并且 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似地,可以说明$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,这里$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度.从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段(见图 1-1).

除此之外,还有无限区间.引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则无限的半开或开区间表示如下:$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$,$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$,$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$.数集$[a,+\infty)$及$(-\infty,b]$称为无限的半开区间.数集$(a,+\infty)$及$(-\infty,b)$称为无限的开区间.它们在数轴上表现为长度为无限的半直线,例如图 1-2:

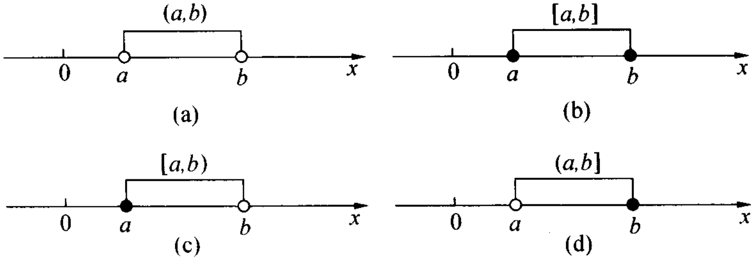


图 1-1

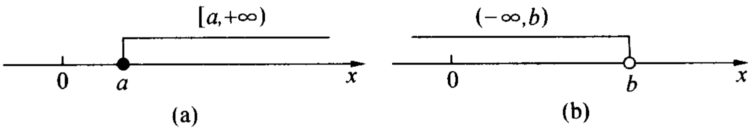


图 1-2

全体实数的集合 **R** 也记作$(-\infty,+\infty)$,它也是无限的开区间.

以后,如果遇到所作的论述对不同类型的区间(有限的、无限的、开的、闭的、半开的)都可能适用,为了避免重复论述,就用"区间 I"代表各种类型的区间.

邻域也是一个经常用到的概念.设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$,数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$,点 a 叫做 $U(a,\delta)$ 的中心,δ 叫做 $U(a,\delta)$ 的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于 $-\delta<x-a<\delta$,即 $a-\delta<x<a+\delta$,所以 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$,由此看出,$U(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$,这个开区间以点 a 为中心,而长度为 2δ(图 1-3):

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $U(\hat{a},\delta)$,即 $U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$,这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

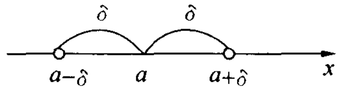


图 1-3

二、常量与变量

我们观察或研究某种自然现象或技术过程中,常常遇到各种不同的量,其中有的量在整个现象或过程中不起变化,即保持一定的数值,这种量叫做常量;而有些量在整个现象或过程中是变化的,也就是可取不同的数值,这种量叫做变量.例如,我们选定了一块试验田,它的面积就是常量,而这块试验田每年的产量则是变量.

一个量是常量还是变量,都是在某一确定的现象或过程中说的.有时,同一个量在某种情况下是常量,而在另外一种情况下则是变量.例如,重力加速度在同一个地区来说,它是常量,但在地球上不同的地区来说,它是变量.

常量通常用字母 a,b,c 等表示,变量通常用字母 x,y,z,u,v,t 等表示.

常量可以看成是取同一数值的变量,即常量可以看作变量的特殊情况.

三、函数的概念

(一)函数的定义

在一个自然现象或技术过程中,常常同时有几个变量在变化着.这几个变量往往并不是孤立地在变化,而是相互联系并遵循着一定的规律而变化.下面先就两个变量的情况,举例加以说明.

【例 1】圆的面积 A 与它的半径 r 之间有如下相依关系:$A=$

πr^2.

当半径 r 取定某一正的数值时，由上面相依关系，圆面积有确定的数值和它对应.

【例 2】一物体自距地面高 h 米处无初速自由落下，在落地之前，其经过的距离 S 与经过的时间 t 之间的关系为 $S=\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 为重力加速度. 在落地之前，给定一个 t 值，根据上述变化规律，就有一个 S 值与之对应.

【例 3】某气象站用自动记录仪记下某日从 0 时到 24 时的温度变化曲线(如图 1-4)，它形象地表示温度 T 随时间 t 的变化规律.

根据温度变化曲线所表示的规律，对于这一天，0 时到 24 时中每一个时刻 t_0，都有确定的温度 T_0 和它相对应.

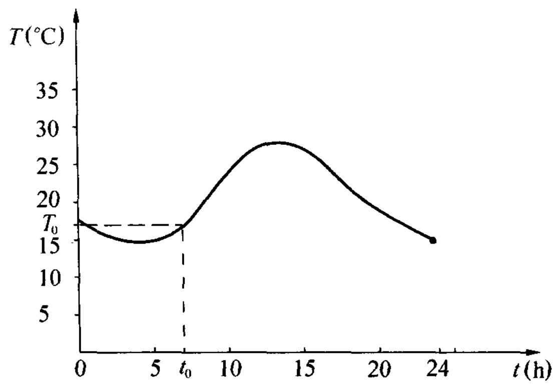


图 1-4

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义

域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如“φ”,“ψ”,“F”,“g”等等，这时函数就记作 $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $y=F(x)$, $y=g(x)$ 等.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值都只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 例 1、例 2 及例 3 都是单值函数，下面再举一个多值函数的例子.

【例 4】在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，这方程在闭区间 $[-r,r]$ 上确定一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 当 x 取开区间 $(-r,r)$ 内的任一数值时，对应的函数值就有两个，所以这函数是多值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

(二) 函数定义域的确定

在具体问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定. 如例 1 中，定义域为 $[0,+\infty)$；例 2 中，定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$；例 3 中，定义域为 $[0,24]$.

在数学中，当只给出函数的表达式，而没有说明函数的实际意义时，函数的定义域就是使表达式有意义的自变量所能取的一切实数.

【例 5】求函数 $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解：要使所给定的函数表达式有意义，必须：$\begin{cases}\frac{1}{1-x}>0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，解之

得 $-2\leqslant x<1$，因此，该函数定义域为 $[-2,1)$.

【例 6】求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\arcsin\frac{x+1}{3}$ 的定义域.

解：要使所给定的函数表达式有意义，必须 $\begin{cases}x^2-1>0\\ -1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant 1\end{cases}$，

解之得：$-4\leqslant x<-1$ 或 $1<x\leqslant 2$.

因此，该函数的定义域为 $[-4,-1)\cup(1,2]$.

(三)函数的表示法

函数可以用表达式、图像或列表法表示，如例 3 是用图像表示的函数，有时把自变量 x 所能取的数值和对应的函数 y 取的数值列成表，如在一块试验田上，某农作物 6 年来的产量列成如下表格：

年份	1	2	3	4	5	6
产量(kg)	410	417	395	492	470	475

上表反映了农作物产量随年份变化的对应规律，按照这个对应规律，对于每一个确定的年份，就有确定的产量和它对应.

数学中，函数主要是用表达式来表示的. 有时，一个函数当自变量在不同的范围内取值时，其对应规律不同，这个函数要用不同的表达式来表示. 例如，符号函数 $y=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-5 所示.

又如设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记作 $[x]$. 如 $\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 把 x 看作变量，则函数 $f(x)=[x]$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域

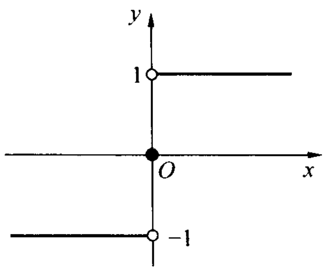


图 1-5

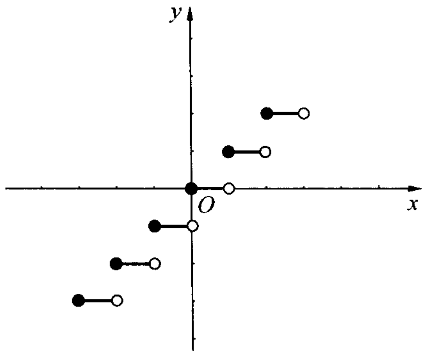


图 1-6

W 为全体整数,其图形如图 1-6 所示.这图形称为阶梯曲线.

像这样对应规律在不同的范围内是由不同的式子分段表示的函数,通常叫做分段函数.

求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应范围的表达式去计算.

【例 7】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ 3-x & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$,试求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解:$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1=\dfrac{5}{4}$, $\quad f(0)=0^2+1=1$,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

四、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在正数 M,使得与任一 $x\in X$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\leqslant$

M,就叫做函数 $f(x)$在 X 内有界;如果这样的 M 不存在,就叫做 $f(x)$在 X 内无界.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为无论 x 取任何实数,$|\sin x|\leqslant 1$ 都能成立.这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M).函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 在$(0,1)$内一切 x 都成立.但 $f(x)=\frac{1}{x}$在$(1,2)$内是有界的,如取 $M=1$ 可使$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对区间$(1,2)$内的一切 x 都成立.

如果 $f(x)$在(a,b)上有界,则在此区间上函数的图形必介于两条水平线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$.如果对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 内是单调增加的(图 1-7);如果对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 内是单调减少的(图 1-8).

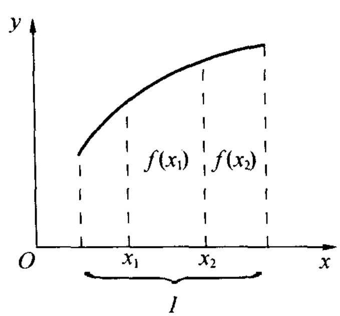


图 1-7

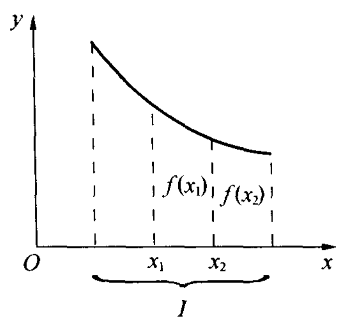


图 1-8