21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

理论力学（II）

全程导学及习题全解

哈工大第六版

傅晋　马晓燕　彭慧莲　编

金硕　主审

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

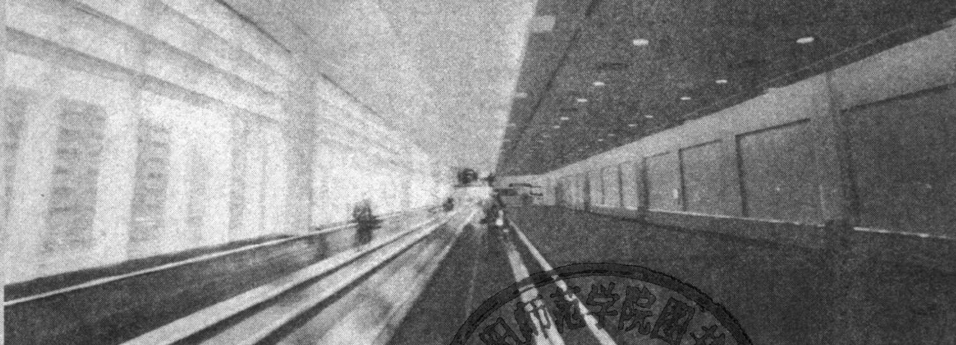
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO



理论力学

全程导学及习题全解

哈工大第六版

傅晋　马晓燕　彭慧莲　编
金硕　主审

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

理论力学全程导学及习题全解. Ⅱ/傅　晋、马晓燕、彭慧莲编.
—北京：中国时代经济出版社，2007. 1
（21 世纪高等院校经典教材同步辅导）
ISBN 7－80221－116－6
Ⅰ. 理…　Ⅱ. ①傅… ②马… ③彭…　Ⅲ. 理论力学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. 031
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 055928 号

理论力学全程导学及习题全解（Ⅱ）

傅　晋　马晓燕　彭慧莲　编

出 版 者	**中国时代经济出版社**
地　　址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦东办公区 11 层
邮政编码	100007
电　　话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传　　真	(010)68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京市优美印刷有限责任公司
开　　本	880×1230　1/32
版　　次	2007 年 1 月第 1 版
印　　次	2007 年 1 月第 1 次印刷
印　　张	6. 375
字　　数	180 千字
印　　数	1～5000 册
定　　价	8. 50 元
书　　号	ISBN 7－80221－116－6/G・064

内容简介

本书是结合高等教育出版社出版、哈尔滨工业大学理论力学教研室编写《理论力学》的学习辅导教材与习题全解参考书。全书紧扣教材内容，对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局，全面掌握基本知识。编写的重点在于对原教材全部习题（包括思考题）给出了精解详答，可以作为读者自我考核的标准与参考。在《理论力学》教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业本科学生《理论力学》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书，也可以作为《理论力学》课程教师的教学参考书。

前　言

《理论力学》是理工科学生必须学习和掌握的一门重要的基础学科，它是学好其他各专业基础课乃至专业课的基石，很多高等院校都将理论力学列为核心课程之一。在学习中，应注重理解和掌握理论力学的基本概念和规律，对所研究的问题建立起清晰的力学模型，有助于同学们分析和解决问题。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《理论力学》课程的理论精髓和解题方法，我们根据哈尔滨工业大学理论力学教研室编写的《理论力学》教材，编写了这本配套辅导教材。

本辅导教材根据《理论力学》教材中每章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

主要内容和方法要点：对教材中的相应内容进行了系统、全面的归纳和总结，囊括了基本概念、主要定理和重要公式，有助于读者全面掌握基本知识，清晰把握各章知识的脉络。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点例题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

习题及思考题全解：依据教材各章节的全部习题和思考题，进行详尽的解答。从学习者的角度，给出了解题的每一个步骤，以免忽略掉那些看似简单但对解题思路关键的细节问题。

本教材由彭慧莲、马晓燕、傅晋等同志编写，全书由金硕老师主审。金硕老师高深的造诣、严谨的治学态度，使编者受益匪浅，对此

深表感谢。本书编写过程中得到胡涛、王天磊等同志的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！

对《理论力学》教材作者哈尔滨工业大学理论力学教研室的老师们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，这些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2007 年 1 月

目　录

第一章　非惯性系中的质点动力学

主要内容和方法要点

1. 非惯性系中的质点动力学基本方程

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{Ie}+\boldsymbol{F}_{IC}$$

其中

$\boldsymbol{F}$ 是作用于质点上的外力；

$\boldsymbol{F}_{Ie}=-\mathrm{m}\boldsymbol{a}_e$ 是牵连惯性力；

$\boldsymbol{F}_{IC}=-m\boldsymbol{a}_C$ 是科氏惯性力；

$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}$ 是质点在动参考系中的加速度.

使用:可用于考察质点在非惯性系中的动力学行为,描述质点在非惯性系中的运动.

2. 非惯性系中的质点动能定理

微分形式

$$d\left(\frac{1}{2}mv_r^2\right)=\delta W_F'+\delta W_{Ie}'$$

使用:可用于考察质点在非惯性系中的瞬态行为,它不要求 W_F' 和 W_{Ie}' 一定可导. 因此适用范围要比微分方程形式的表达要广.

积分形式

$$\frac{1}{2}mv_r^2-\frac{1}{2}mv_{r0}^2=W_F'+W_{Ie}'$$

科氏惯性力在质点的相对运动中不作功.

使用:可用于考察较长时间尺度下质点的运动,尤其是不关心中间过程时.

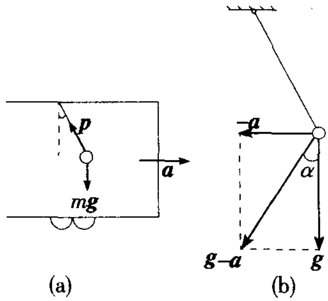
典型例题讲解

例 1—1　车厢中的单摆:设车厢以等加速度 $\boldsymbol{a}$ 前进,分析悬挂在车厢顶板上的单摆的运动. 单摆质量为 m,摆长为 l.

【解】取车厢为参考系，它相对惯性系作平动，单摆在这个参考系中受到的惯性力为$-m\boldsymbol{a}$，对单摆使用非惯性系中的动力学基本方程可得：

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{p}+m\boldsymbol{g}+(-m\boldsymbol{a})=\boldsymbol{p}+m(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a})$$

其中$\boldsymbol{p}$是绳子拉力，这个结果可以看作单摆在"重力加速度大小为$\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$的重力场"中摆动，其"重力加速度"大小为：



例 1—1 图

$$g'=\sqrt{g^2+a^2}$$

方向与竖直方向夹角：

$$\alpha=\arctan\frac{a}{g}$$

所以单摆在相对平衡位置$\varphi=-\alpha$处摆动，周期为：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$$

思考题解答

1—1　根据相对运动动力学基本方程，小球在变速运动的车厢中自由降落时受有牵连惯性力，飞机在高空飞行时受有科氏惯性力. 试分析这两个惯性力的反作用力作用在哪?牛顿第三定律对它们成立吗?

【答】这两个惯性力没有反作用力，它们的产生是基于参考系的选取而非真实的物体间的相互作用，因此也就谈不上牛顿第三定律.

1—2　对固结在变速运动的列车上的参考系来说，地面上静平衡的物体并不平衡，而随列车一起运动的物体却是平衡的. 试从这一点出发说明惯性力的相对性、虚如性及真实性.

【答】相对性：惯性力的大小和方向是依赖于坐标系的选取的，相对不同的坐标系同一物体受到的惯性力是不同的，比如取相对地面静止的参考系，物体受到的惯性力为零；取固连在火车上的参考系，物体受到的惯性力就不为零.

虚假性：惯性力没有反作用力，它的产生是由于坐标系的选取而不是真实物体间的相互作用.

真实性：惯性力能产生可观察到的力学效应，比如在火车上看，相对地面处于静平衡状态的物体由于受惯性力作用而不再静止，但原本相对地面运动的随车运动的物体却由于惯性力的作用而保持静止.

1—3　在质点相对运动中，下述哪些说法是正确的？

A. 若 $\boldsymbol{a}_r = 0, v_r = 0$，则必有 $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} = 0$

B. 若 $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} = 0$，则必有 $\boldsymbol{a}_r = 0, v_r = 0$

【答】A 正确.

$$\boldsymbol{F}_{IC} = -m\boldsymbol{a}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r = -2m\boldsymbol{\omega} \times 0 = 0$$

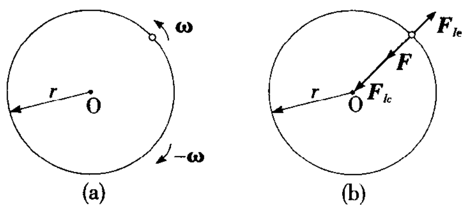
$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{IC} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} + 0 = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie}$$

由 $\boldsymbol{a}_r = 0$，可得 $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} = m\boldsymbol{a}_r = m \cdot 0 = 0$

B 不正确.

$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{IC}$，由 $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} = 0$ 可推出 $m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}_{IC}$，这并不能保证 $\boldsymbol{a}_r = 0, \boldsymbol{v}_r = 0$.

反例：如答 1—3 图所示的套在圆环上的小球，环和球之间没有摩擦，球以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕环心 O 逆时针旋转. 环以角速度 $-\boldsymbol{\omega}$ 绕环心顺时针旋转.



答 1—3 图

以固连在环上的参考系作为动参考系，小球在其中要受到牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ie}$，科氏惯性力 $\boldsymbol{F}_{IC}$ 和环的约束力 $\boldsymbol{F}$，设小球质量为 m，环半径为 r

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}_{Ie} = m\omega^2\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} = 0$$

$$\boldsymbol{v}_r = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \neq 0, \boldsymbol{a}_r = -4\omega^2\boldsymbol{r} \neq 0$$

$$\boldsymbol{F}_{IC} = -2m(-\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{v}_r = -4m\omega^2\boldsymbol{r} = m\boldsymbol{a}_r$$

1—4　某人水平抛出一个球，如果考虑科氏惯性力，则在下述情况下，由抛

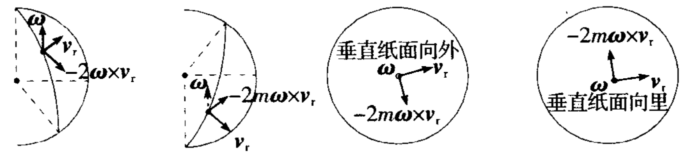
球的人来看,球的路径会偏向不考虑科氏惯性力时路径的右侧还是左侧?

(1) 在北半球水平抛出;(2) 在南半球水平抛出;(3) 在南极和北极水平抛出.

【答】(1) 向右偏.因为在北半球科氏力的水平方向分量总是指向相对运动速度方向的右侧,如答 1—4 图(a) 所示.

(2) 向左偏.因为在南半球科氏力的水平方向分量总是指向相对运动速度方向的左侧,如答 1—4 图(b) 所示.

(3) 在南极向左偏,在北极向右偏,原因同上.如答 1—4 图(c)、(d) 所示.



(北半球) (a)　(南半球) (b)　北极俯视 (c)　南极俯视 (d)

答 1—4 图

1—5 在惯性系中,质点系的动能为 $T=\frac{1}{2}mv_C^2+T'$.其中 m 为质点系总质量,v_C 为质心速度,T' 为质点系相对于质心坐标系(即以质心为基点的平移坐标系)的功能.称上式为柯尼希定理.试利用柯尼希定理导出质点系相对于质心坐标系的动能定理.

【答】由于动参考系取的是质心为基点的平动坐标系,这里没有旋转,所以相对导致和绝对导数是相等的,我们由定参考系下的动能定理出发:

$$\mathrm{d}T=\sum_i \boldsymbol{F}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 是作用在第 i 个质点上的外力,$\boldsymbol{F}_{ij}$ 是第 j 个质点对第 i 个质点的作用力,由柯尼希定理:

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+T'$$

可得:

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_C^2+T'\right)=\sum_i \boldsymbol{F}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

整理得:

$$\mathrm{d}T'=\sum_i \boldsymbol{F}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\sum_i\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i-\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_C^2\right) \quad ①$$

设 $\boldsymbol{r}'_i$ 是第 i 个质点在质心系下的位置,有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_i$$

① 式中右边第一项：$\sum_i \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_i) = \sum_i \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + \sum_i \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i$

其中第一项

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = \left(m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = m\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v}_C \mathrm{d}\boldsymbol{v}_C = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_C^2\right)$$

第二项保留不变.

① 式中右边第二项：$\sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'i + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$

由于质点系内力合力为零，有：

$$\sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = \left(\sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = 0$$

综上 ① 式可化为：

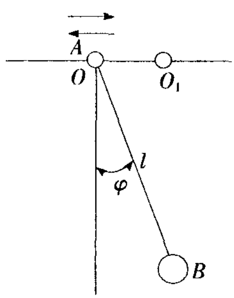
$$\begin{aligned}\mathrm{d}T' &= \sum_i \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_C^2\right) + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i - \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_C^2\right) \\ &= \sum_i \boldsymbol{F}_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i\end{aligned}$$

这便是质点系相对质心平动参考系的动能定理，即在质心平动参考系中，动能 T' 的微分等于外力和内力元功的和.

这个定理只是在质心平动参考系中才成立，如果所选取的参考系还带有转动，这个结论就不成立了，因为此时绝对导数与相对导数不相等，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_i$ 不能再看作 $\boldsymbol{r}'_i$ 在动参考系下的微分了.

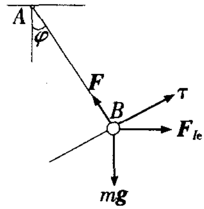
习题全解

1—1　图示单摆 AB 长 l，已知点 A 在固定点 O 的附近沿水平作微幅谐振动：$OO_1 = a\sin pt$，其中 a 与 p 为常数. 设初瞬时摆静止，求摆的相对运动规律.



题 1—1 图

【解】取固连在 A 点上的平动参考系作为动参考系，小球受力如解 1—1 图，它受重力 $m\boldsymbol{g}$，绳子拉力 $\boldsymbol{F}$ 和牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ie}$，由于动参考系没有转动，所以科氏惯性力为零.



解 1—1 图

$$F_{Ie} = -ma_e = -m\frac{d^2(a\sin pt)}{dt^2} = map^2\sin pt$$

代入非惯性系中动力学基本方程：

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{Ie}$$

并在与绳子垂直的方向 τ 上投影有：

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = m\frac{d^2 l(\varphi)}{dt^2} = ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$= -mg\sin\varphi + map^2\sin pt \cdot \cos\varphi$$

由于摆幅很小所以这里近似认为 $\sin\varphi \approx \varphi, \cos\varphi \approx 1$

这样方程可简化为：

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\varphi + map^2\ \sin pt$$

整理为：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi + \frac{ap^2}{l}\sin pt$$

这里一个二阶非齐次线性微分方程，一般的解决步骤为：先解出齐次方程的通解，再用常数变易法求出非齐次方程的一个特解，最后由定解条件确定参数的值.

齐次方程为：

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

相应特征方程为：

$$\lambda^2 + \frac{g}{l}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,i \xlongequal{\text{令}\,\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \pm\omega i$$

齐次方程通解为：

$$\varphi = c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$$

再用常数变易法求非齐次方程的特解，令$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \psi$，可将二阶方程化为一阶方程组

$$\begin{pmatrix}\dot\varphi\\ \dot\psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi\\ -\frac{g}{l}\varphi + \frac{ap^2}{l}\sin pt\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \frac{ap^2}{l}\sin pt\end{pmatrix}$$

令 $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l} & 0\end{pmatrix}$，则齐次方程 $\begin{pmatrix}\dot\varphi\\ \dot\psi\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$ 的通解为：

$$\Phi c = \begin{pmatrix}\sin\omega t & \cos\omega t\\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

设 $\Phi c(t)$ 是非齐次方程的一个特解，

$$\frac{\mathrm{d}[\Phi c(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}c(t) + \Phi\frac{\mathrm{d}[c(t)]}{\mathrm{d}t} = A\Phi c(t) + \Phi\frac{\mathrm{d}[c(t)]}{\mathrm{d}t}$$

代入

$$\frac{\mathrm{d}[\Phi c(t)]}{\mathrm{d}t} = A[\Phi c(t)] + \begin{pmatrix}0\\ \frac{ap^2}{l}\sin pt\end{pmatrix}$$

可得

$$\Phi\frac{\mathrm{d}[c(t)]}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{ap^2}{l}\sin pt\end{pmatrix} \Rightarrow c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{ap^2}{l}\sin pt\end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

其中

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix}\sin\omega t & \cos\omega t\\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\omega\sin\omega t & \cos\omega t\\ \omega\cos\omega t & \sin\omega t\end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{ap^2}{l}\sin pt\end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\omega\sin\omega t & \cos\omega t\\ \omega\cos\omega t & \sin\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{ap^2}{l}\sin pt\end{pmatrix} = \frac{ap^2}{\omega l}\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin pt\\ -\sin\omega t & \sin pt\end{pmatrix}$$

现在要进行积分，这里介绍两种积分方法.

1. 利用积化和差的三角公式.

$$\int_0^t \cos\omega t\ \sin pt\ \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}[\sin(\omega + p)t + \sin(p - \omega)t]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\omega + p}[1 - \cos(\omega + p)t] + \frac{1}{p - \omega}[1 - \cos(p - \omega)t]\right\}$$

$$=\frac{1}{2(p^2-\omega^2)}\{2p-p[\cos(p-\omega)t+\cos(p+\omega)t]-\omega[\cos(p-\omega)t-\cos(p+\omega)t]\}$$

$$=\frac{1}{p^2-\omega^2}(p-p\cos pt\cos\omega t-\omega\sin pt\sin\omega t)$$

2. 利用分部积分.

令
$$I=\int_0^t\sin\omega t\ \sin pt\,\mathrm{d}t$$

$$I=\frac{1}{p}\left[\int_0^t\sin\omega t\ \mathrm{d}(-\cos pt)\right]=\frac{1}{p}\left(-\sin\omega t\cos pt+\omega\int_0^t\cos pt\cos\omega t\ \mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{p}\left[-\sin\omega t\cos pt+\frac{\omega}{p}\left(\int_0^t\cos\omega t\ \mathrm{d}\sin pt\right)\right]$$

$$=\frac{1}{p}\left[-\sin\omega t\cos pt+\frac{\omega}{p}\left(\cos\omega t\ \sin pt+\omega\int_0^t\sin pt\sin\omega t\ \mathrm{d}t\right)\right]$$

$$=\frac{1}{p}\left(-\sin\omega t\cos pt+\frac{\omega}{p}\cos\omega t\sin pt+\frac{\omega^2}{p}I\right)$$

整理得:

$$I=\frac{1}{p^2-\omega^2}(\omega\cos\omega t\sin pt-p\sin\omega t\cos pt)$$

$$c(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\end{pmatrix}=\frac{ap^2}{\omega l}\begin{pmatrix}\int_0^t\cos\omega t\sin pt\,\mathrm{d}t\\-\int_0^t\sin\omega t\sin pt\ \mathrm{d}t\end{pmatrix}$$

$$=\frac{ap^2}{\omega l(p^2-\omega^2)}\begin{pmatrix}p-p\cos pt\cos\omega t-\omega\sin pt\sin\omega t\\p\sin\omega t\ \cos pt-\omega\cos\omega t\sin pt\end{pmatrix}$$

特解:

$$\Phi c(t)=c_1(t)\sin\omega t+c_2(t)\cos\omega t=\frac{ap^2}{\omega l(p^2-\omega^2)}(p\sin\omega t-\omega\sin pt)$$

通解:

$$\varphi=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t+\frac{ap^2}{l(\omega^2-p^2)}\left(\sin pt-\frac{p}{\omega}\sin\omega t\right)$$

由定解条件 $t=0$ 时摆用 $\varphi=0$ 可得:

$$\varphi(0)=c_2=0$$

还有一个定解条件即初瞬时摆静止,但这里存在歧意,存在以下两种理解.

1. 初瞬时摆在静参考系中静止,事实上这是不可能的,因为 A 点速度 $\left.\frac{\mathrm{d}(a\sin pt)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=ap$ 它显然是不静止的,若理解为摆球 B 静止,则在动参考系中 B 有初速度 $-ap$,

$$\dot{\varphi}(0)=c_1\omega=-\frac{ap}{l}\Rightarrow c_1=-\frac{ap}{\omega l}$$

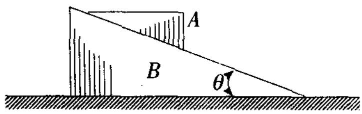
$$\varphi=-\frac{ap}{\omega l}\sin\omega t+\frac{ap^2}{l(\omega^2-p^2)}\left(\sin pt-\frac{p}{\omega}\sin\omega t\right)$$

2. 初瞬时摆在我们所选取的这个动参考系中静止，则

$$\dot{\varphi}(0)=c_1\omega=0\Rightarrow c_1=0$$

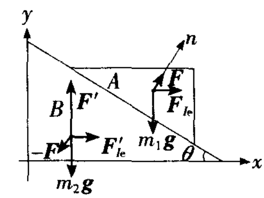
$$\varphi=\frac{ap^2}{l(\omega^2-p^2)}\left(\sin pt-\frac{p}{\omega}\sin\omega t\right)$$

1—2　三棱柱 A 沿三棱柱 B 的光滑斜面滑动，如图所示. 三棱柱 A 和三棱柱 B 的质量分别为 m_1 与 m_2，三棱柱 B 的斜面与水平面成 θ 角. 如开始时物系静止，求运动时三棱柱 B 的加速度. 摩擦略去不计.



题 1—2 图

【解】以固连在 B 上的参考系作为动参考系，则 A 的受力分析如解 1—2 图：A 受重力 $m\boldsymbol{g}$，支持力 $\boldsymbol{F}$ 和牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ie}$，由于动参考系没有转动，所以科氏惯性力为零.



解 1—2 图

物体 A 在非惯性系中的动力学基本方程为：

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}+m_1\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}_{Ie}=\boldsymbol{F}+m_1\boldsymbol{g}-m_1\boldsymbol{a}_e$$

在垂直 A，B 接触面的 n 方向投影为：

$$F-m_1g\cos\theta+m_2a_e\sin\theta=0 \qquad ①$$

① 中含有两个未知量 F 和 a_e，这需要再联立一个方程才能求解，我们可以通过对 B 的分析得到这个方程.

B 在动参考系中受压力 $-\boldsymbol{F}$，重力 $m_2\boldsymbol{g}$，支持力 $\boldsymbol{F}'$ 和牵连惯性力 $\boldsymbol{F}'_{Ie}$ 且保持相对静止 B 在非惯性中的动力学基本方程为：

$$-\boldsymbol{F}+m_2\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{F}'_{Ie}=-\boldsymbol{F}+m_2\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}'-m_2\boldsymbol{a}_e=0$$

在水平方向 x 上投影可得：

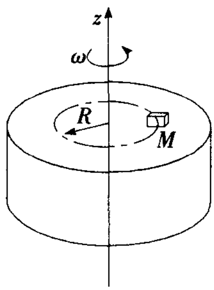
$$F\sin\theta=m_2a_e \qquad ②$$

联立①,②即可解出

$$a_e = \frac{m_1 g\sin\theta\cos\theta}{m_1\sin^2\theta + m_2}$$

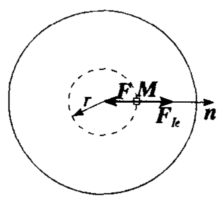
这便是 B 的加速度,方向向左.

1—3　图示一重物 M 放在粗糙的水平平台上,平台绕铅直轴以匀角速度 ω 转动,重物与平台间摩擦因数为 f,试求重物能在平台上保持相对静止时的位置.



题 1—3 图

【解】以固连在转台上的参考系作为动参考系,物体 M 的受力如图解 1—3 图,它受摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 和牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_{Ie}$,当物体处于相对静止状态时 $\boldsymbol{a}_r = 0$,科氏惯性力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r = 0$



解 1—3 图

非惯性系下的动力学方程为:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{Ie} = 0$$

在径向 $\boldsymbol{n}$ 方向投影可得:

$$F = F_{Ie} = m\omega_r^2$$

又由

$$F \leqslant fmg$$