紡織工业新技术譯丛

牵伸力研究

吳立民 許正学 譯

紡 織 工 业 出 版 社

內 容 簡 介

关于牵伸力的确定及其与牵伸倍数的关系，是一項重要的紡紗理論問題，苏联科学研究工作者在这方面，进行了一系列极細致的实驗，以求从理論上来解决牵伸力的数值問題。

本書系由苏联“紡織工业”和苏联“紡織工业工艺”中收集的五篇有关牵伸力方面的研究論文彙編而成。其中有的对已故H. A. 华西里耶夫教授的牵伸理論作了进一步的闡述，有的以各种不同的試驗来确定牵伸力及其变化因素。

这些对我国在这一問題的研究以及具体应用方面，都有一定的参考价值。

本書可供研究单位、紡織企业工程技术人員以及紡織院校师生参考。

紡織工业新技术譯叢
牵 伸 力 研 究
吳立民 許正学 譯
*
紡織工业出版社出版
（北京东長安街紡織工业部內）
北京市書刊出版业营业許可証出字第 16 号
北京五十年代印刷厂印刷・新华書店发行
*
787×1092 1/32开本・3 10/32 印张・67 千字
1959年12月初版
1959年12月北京第 1 次印刷・印数1～3000
定价（10）0.48 元

紡織工业新技术譯叢

牽伸力研究

吳立民　許正學　譯

紡織工业出版社

目 錄

H. A. 華西里耶夫牽伸理論的闡述

莫斯科紡織工学院
数学教研組教授　C. C. 闊夫湼尔

苏联 H. A. 华西里耶夫教授关于紡織生产过程的数学論証，已經得到了广泛的承認。同时，大家也常常認为，对这些著作还解释得不够，往往也不完全明了。因此，莫斯科紡織工学院曾提出再版H. A. 华西里耶夫教授一些重要著作的問題，用来闡述一般紡織工程技术人員不甚了解的論点。在我們重讀这些著作之后感覺到　在作者遺留下的著作中有一部分沒有作出詳細的結論；而另一部分华西里耶夫教授的遺著，1932 年出版的題为"紡紗理論問題"的集子中，出現了很多印錯的地方，完全曲解了天才的作者毫无錯誤的数学原意。

本文考查了 H. A. 华西里耶夫的第一类牽伸理論，对他所确定的牽伸过程基本方程式作了詳細的結論，并分析了他沒有研究到的一些問題。

一、第一类牽伸微分方程式的結論❶

以 v_0 和 v_1 分别表示喂給罗拉和牵伸罗拉的圓周速度，并取坐标軸的位置如图 1 所示，来研究力 P 随时間的变化情况。

H. A. 华西里耶夫假定，力 P 仅随时間变化，而不随地点变化：

❶ 在牵伸时，制品按虎克定律伸长，这种牵伸，被称为第一类牵伸——譯註。

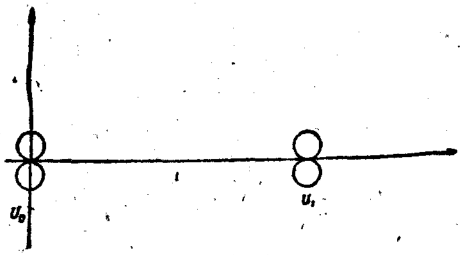

图 1

$$P=P\ (t).$$

设制品原长为 L_0，受力 P 作用，按虎克定律伸长，伸长后的长度 L 即等于牵伸罗拉間的距离。以 i 表示制品单位长度的变化量，即相对伸长，则 L_0 变为：

$$L_0+iL_0=L_0(1+i)=L$$

假定伸长 i 比例于作用力 P，且以 α 表示比例系数，则 $i=\alpha P$.

即 $$L_0\ (1+\alpha\ P)=L, \tag{1}$$

或 $$L_0=\frac{L}{1+\alpha P} \tag{2}$$

H. A. 华西里耶夫称 α 为伸长系数，并認为它是一个常数。

因而，L 为 t 瞬間时的制品长度。在 $t+dt$ 的瞬时，作用力 P 变为 $P+dP$, dP 是力 P 的有限增量，在力 $P+dP$ 的作用下，长度 L_0 变为：

$$L_0[1+\alpha(P+dP)]=L_0(1+\alpha P)+L_0\alpha dP,$$

由于（1）、（2）式，該式可写成：

$$L+\frac{aL\cdot dP}{1+aP}.$$

又在 dt 的时間內，喂給罗拉将长 $v_0 dt$ 的材料送进牵伸区內，v_0dt 受力 $P+dP$ 的作用而伸长，并等于：

$$v_0dt[1+a(P+dP)]=v_0dt+aPv_0dt+av_0dtdP.$$

同样在 dt 的时間內，牵伸罗拉由牵伸区中輸出制品长 v_1dt，而在牵伸罗拉之間，仍留有纖維材料，其长度等于牵伸罗拉間的距离，即 L。由此，可得下式：

$$L+\frac{aLdP}{1+aP}+v_0dt+av_0Pdt+av_0dPdt-v_1dt=L,$$

略去二阶无穷小値 av_0dPdt，移項后得：

$$\frac{aLdP}{1+aP}+av_0Pdt=(v_1-v_0)dt. \qquad (3)$$

此即 H. A. 华西里耶夫的微分方程式，它表明不稳定的力 P 随时間而变化的規律。

二、H. A. 华西里耶夫方程式的积分及若干結論

作者在他早期的著作中(1915年)，对(3)式进行了积分。如果在文献[1]中，沒有一些符号印錯的話，这一积分本是不需加以說明的。这个問題也要牵涉到 C. A. 安特拉波夫的評述[2]。因此，我們准备在完全保留 H. A. 华西里耶夫当初使用的符号的基础上，引出这一积分过程。

首先，我們研究华西里耶夫方程式的极限情况，此时力 $P(t)$ 变为一个常数，不再随时間而变化，因而：

$$\frac{dP}{dt}=0 \qquad (4)$$

这时，方程式(3)当呈：

$$\alpha v_0 P_1 = v_1 - v_0$$

除以 v_0 后引入华西里耶夫的符号：

$$\frac{v_1}{v_0} = z, \tag{5}$$

得：

$$z = 1 + \alpha P_1 \tag{6}$$

此时，P_1 变为作用力的极限值。将方程式（3）移项，括出 v_0，引入（5）式的符号，整理之后得：

$$\frac{\alpha dP}{(1+\alpha P)[z-(1+\alpha P)]} = \frac{v_0 dt}{L} \tag{7}$$

此为分离变量的一阶微分方程。将等式左边变为：

$$\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1+\alpha P} + \frac{1}{z-(1+\alpha P)}\right]\alpha dP$$

可直接得到下列全解积分：

$$\ln(1+\alpha P) - \ln[z-(1+\alpha P)] = \frac{v_0 z}{L}t + C. \tag{8}$$

或 $$\ln\frac{1+\alpha P}{z-(1+\alpha P)} = \frac{v_1}{L}t + C. \tag{9}$$

（这里，引以为奇的是，H. A. 华西里耶夫没有做 $v_1 = zv_0$ 这一显明的代换，而是将 zv_0 一直保持到最后）。

为确定积分常数 C，H. A. 华西里耶夫注意了其物理意义，即在开始的一瞬間 $t=0$ 时，在工作空間作用着的始力 P_0。因此，$t=0$ 时，方程式（9）当呈：

$$C = \ln\frac{1+\alpha P_0}{z-(1+\alpha P_0)},$$

这样，就定出了积分常数 C。

再引入下列符号：

$$z_0=1+aP_0;$$

$$z(t)=1+aP(t)=1+aP.$$

将（9）式变为：

$$\ln\frac{z(t)}{z-z(t)}-\ln\frac{z_0}{z-z_0}=\frac{v_1}{L}t;$$

經过一些代数变换后得：

$$\ln\left(\frac{z}{z(t)}-1\right)=-\frac{v_1}{L}t+\ln\left(\frac{z}{z_0}-1\right),$$

亦即：

$$\frac{z}{z(t)}-1=e^{-\frac{v_1}{L}t}\left(\frac{z}{z_0}-1\right). \tag{11}$$

等式右边第一个乘数随 t 的增长而趋于 0，其余乘数均为常数。这也表示，等式左边也趋于 0，但此时，其第一項須趋于 1，亦即：

$$\lim_{t\to\infty} z(t)=z \tag{12}$$

分析所得結果后，H. A. 华西里耶夫写道：“因此，无論在牵伸过程开始时，具有怎样的預伸长，牵伸倍数总要趋于 z 值，不管它是經过增加或是減小。开始时的牵伸倍数如等于 z，制品将在整个时間内获得这一牵伸倍数，因为假若 $z_0=z$，则无論 t 的值如何，始終是 $z(t)=z$。”

为使这一結論更明显，我們从相应的（11）式，也可得到 H. A. 华西里耶夫方程式的解：即当 $z_0=z$ 时，等式右边部分变为 0，因此左边亦为 0。

其次，H. A. 华西里耶夫指出，对于实际常用的 v_1 和

L 的比値，会使 $e^{-\frac{v_1}{L}t}$ 很快趋于 0，因此，仅是在机器調度之后的初期，$z(t)$ 和制品的牵伸倍数 z 之間，才有显著的差値。还需要补充的是，$P(t)$ 的极限值恰是 P_1，而P_1 在 (6) 式中已有。这样，H. A. 华西里耶夫便确立了：牵伸区中的作用力，仅在很短的时間內是不稳定的，而最使我們注意的也正是力 P 在不随时間而变化的情况。但力 P 可能随空間坐标 x 而变化，对这一問題 H. A. 华西里耶夫未曾进行分析，我們在这里也将加以討論。

三、最簡單的稳定牵伸区的牵伸过程

牵伸区中的作用力 P 不随时間而变，但可能随坐标 x 的位置而变，因为速度 $v(x)$ 是随地点而变的。若以坐标 $(x、v)$ 表示这一速度，则在我們注意到的曲綫 $v=f(x)$ 中，事先仅知道两点，該曲綫說明 v 随 x 变化的关系：$x=0$ 时，$v=v_0$；$x=L$ 时，$v=v_1$。因此，某一形式的曲綫 1 是可能存在于图 2 的。

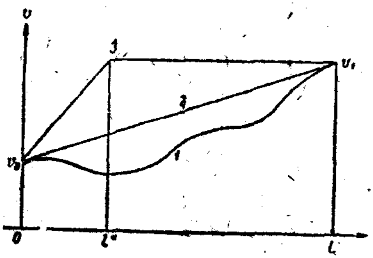

图 2

很自然会認为，在这种形式最簡单的牵伸区中，运动学的性質为数量場的梯度，亦即，假定存在某一个可能的数性函数 W，矢量 $\bar{v}$ 是 w 的梯度：

$$\bar{v}=\mathrm{grad}\, w.$$

此处 $\bar{v}$，最好是了解为不是一根纖維个别点的速度，而是通过牵伸区該点制品的单位长度的数量。因为在牵伸区

中，作用发生在一定的长度上❶，则：

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} \neq 0$$

假設牽伸区的性質是最簡单的一种情况，則显然可得：

$$\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} w = C_1, \qquad (13)$$

C_1——常数，又因为仅有坐标 x 为变量，所以方程式(13)当呈：

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = C_1, \qquad (14)$$

由此
$$\frac{dw}{dx} = v = C_1x + C_2;$$

$x=0$ 时，$v=v_0$，因此：

$$C_2 = v_0;$$

$x=L$时，$v=v_1$；亦即：

$$v_1 = C_1L + v_0$$

由此
$$C_1 = \frac{v_1 - v_0}{L} \qquad (15)$$

最后可得：

$$v = \frac{v_1 - v_0}{L} x + v_0 \qquad (16)$$

此为牽伸区中速度分佈最簡单的規律，亦即图 2 中的直綫 2。

分析該速度場可得下列結論：如果方程式（16）是正确的，而且：

---

❶ 如果散度 $\operatorname{div} \bar{v}=0$，則表示牽伸区速度矢量 $\bar{v}$ 的矢綫是封閉的；而实际上，牽伸作用发生在一定长度上，即速度矢量 $\bar{v}$ 的矢綫方向不变，不是封閉的，因而 $\operatorname{div} \bar{v}=0$ 不能成立。对于牽伸过程的性質，正好了解为：

$$\operatorname{div} \bar{v} \neq 0$$

——譯註。

$$v = \frac{dx}{dt},$$

则制品每一点的运动方程式将呈：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_1 - v_0}{L} x + v_0 \qquad (17)$$

該式为常数一阶綫性微分方程。簡化后可将該式写为：

$$\frac{dx}{dt} - ax = v_0 \qquad \left(a = \frac{v_1 - v_0}{L}\right)$$

由此可得下列全解积分：

$$x = Ce^{at} - \frac{v_0}{a}$$

由牵伸区中出現制品的一瞬間开始算起，此时 $t = 0$，$x=0$，亦即：

$$C - \frac{v_0}{a} = 0,$$

或 $$C = \frac{v_0}{a},$$

最后 $$x = \frac{v_0}{a}(e^{at} - 1)$$

或 $$x = \frac{Lv_0}{v_1 - v_0}\left(e^{\frac{v_1 - v_0}{L}} - 1\right) \qquad (18)$$

方程式（18）表示牵伸罗拉中，制品任一点的运动規律。

可以得到以簡便的实驗来检查所得規律的准繩，这就在于，方程式（18）可經牵伸罗拉的參变数表示出牵伸罗拉中，制品完全通过的时間 T，实际上，$t=0$时，在牵伸罗拉中出現的一点，到 $t=T$时，其坐标变为 L，因此，在 $t=T$ 时，又呈：

$$L=\frac{Lv_0}{v_1-v_0}\left(e^{\frac{v_1-v_0}{L}T}-1\right).$$

即

$$\frac{v_1}{v_0}=e^{\frac{v_1-v_0}{L}T} \tag{19}$$

由此 $$T=\frac{L}{v_1-v_0}\ln\frac{v_1}{v_0}=\frac{L}{v_1-v}\ln z$$

对 t 微分（18）式，且設 $t=T$时，$v=v_1$，也可得到这一結果；实际上，这时：

$$v=\frac{dx}{dt_{(t=T)}}=\frac{Lv_0}{v_1-v_0}\,\frac{v_1-v_0}{L}\,e^{\frac{v_1-v_0}{L}\,\frac{L}{v_1-v_0}\ln\frac{v_1}{v^0}}=v_1$$

第一类牽伸时，制品通过牽伸区的时間，等于牽伸罗拉間的距离除以其圓周速度差，并乘以 $z=\dfrac{v_1}{v_0}$ 的自然对数。

如果能以实驗的方法来驗証这一結論那是再好不过的事。这种实驗，并沒有什么原則性的困难。假如，这一結論那怕只是在某一区段上得到証明，那么关于在牽伸罗拉中力場的問題，也就会比現在清楚得很多。

現在，我們研究一下（16）和（18）式所表示的牽伸区中的第一类牽伸过程。先以純几何学的方法来研究在牽伸区中的牽伸問題。

令 A、B 两点的坐标各为 x 和 $x+\Delta x$，其中 Δx 为两点間很小的距离。設点 A 移动 u，而点 B 移动 $u_1=u+\Delta u$，則两点間的距离将增加 Δu，略去高阶无穷小值后，这一距离便可写成：

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x.$$

这样，两点間的距离，便可由 Δx 变为：

$$\Delta x + \Delta u = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$在弹性理論中，称为相对伸长〔3〕。同时，在討論中，并未考虑这一过程是随时間变化的。

在我們这一研究情况下，在 Δt 的时間内，点 A 的位移等于 $u=v(x)\Delta t$；而点 B 的位移等于 $u_1=v(x+\Delta x)\Delta t$。因此：

$$\Delta u = [v(x+\Delta x) - v(x)]\Delta t = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t\Delta x.$$

在 Δt 的时間内，片段 Δx变为：

$$\Delta x + \Delta u = \Delta x\left(1 + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t\right).$$

因此，$\frac{\partial v}{\partial x}$即等于在单位时間内，制品的相对伸长 [4]。这样，就可写成通常在流体动力学中相对伸长的式子：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{div}\bar{v} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

在本例中，方程式（13）、（14）、（15）❶可通过牵伸罗拉的参变数精确地求得这个式子：

$$\operatorname{div}\bar{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = C_1 = \frac{v_1 - v_0}{L} \tag{15'}$$

这样，在最簡單的情况下，制品在單位时間内的相对伸

---

❶ 原印为……(13)、(14)、(16)……譯註。

長，等于牽伸机件圓周速度的差，除以它們之間的距离，它不随点的坐标位置和时間而变化。

在第一类牵伸的范围內，亦即在按虎克定律伸长的范围內，相对伸长比例于作用力 P：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lambda P \tag{20}$$

或

$$\lambda P=\frac{v_1-v_0}{L}. \tag{21}$$

因此，对于牵伸力，也可再次重复上面在单位时間內相对伸长的講法：**即在同一种制品通过时，在研究的这一类牽伸区中的作用力，比例于圓周速度的差，除以牽伸罗拉間的距离，它不随点的位置和时間而变化。**

附註 根据 B. E. 左奇科夫教授的假設，[5]，牵伸区中纖維的运动速度不是这样的。B. E. 左奇科夫認为，在牵伸区中，速度会很快由 v_0 增长到 v_1，而后变为一个常数。如果認为，在由 0 到 L^* 的区段上，($L^*<L$) 速度是按綫性增长的，如曲綫 3 所示（图 2），那么，我們講过的这些，对于左奇科夫所假定的速度場，也同样是正确的，只是应該将全部討論中的 L 代以 L^*。

四、伸長系数 a 为变數时的情况

H. A. 华西里耶夫教授繼續研究了下述情况，即跟在伸长系数等于 a_1 的制品之后，又进入到牵伸罗拉中另一性質的制品，这种制品的伸长系数等于 a_2。微分方程式的結論与第一节的情况相同。实际上，如果在接近 t 的时間內，第一制品进到牵伸区（見图 3）的长度为 L_{01}，第二制品进入

的长度为 L_{02}，那么在力 $P(t)$ 的作用下：

L_{01} 变为 $L_1=L_{01}(1+a_1P)$.

而 L_{02} 变为 $L_2=L_{02}(1+a_2P)$； (23)

两者的和等于牵伸罗拉間的距离 L：

$$L_1+L_2=L=L_{01}(1+a_1P)+L_{02}(1+a_2P). \tag{24}$$

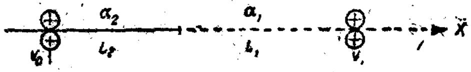

图 3

經过时間 dt 后，該值变为：

$$L_{01}[1+a_1(P+dP)]+L_{02}[1+a_2(P+dP)]；$$

在相同的时間內，喂給罗拉喂进的制品长度等于 v_0dt，且这一长度变为 $v_0[1+a_2(P+dP)]\ dt$，而輸出罗拉輸出的长度为 v_1dt，总的长度仍为 L，

相加可得：

$$L_{01}[1+a_1(P+dP)]+L_{02}[1+a_2(P+dP)]+$$
$$+v_0(1+a_2(P+dP)]dt-v_1dt=L.$$

去括号则得：

$$L_{01}(1+a_1P)+L_{01}a_1dP+L_{02}(1+a_2P)+L_{02}a_2dP+$$
$$+v_0(1+a_2P)dt+v_0a_2dPdt-v_1dt=L.$$

按（24）式簡化，并将（23）式的 L_{01} 和 L_{02} 代入上式，再略去二阶无穷小值，則得：

$$\frac{a_1L_1\ dP}{1+a_1P}+\frac{a_2L_2dP}{1+a_2P}+a_2v_0Pdt=(v_1-v_0)dt, \tag{25}$$

除以 v_0dt，引用（5）式的符号，得：

$$\frac{1}{v_0}\left[\frac{\alpha_1 L_1}{1+\alpha_1 P}+\frac{\alpha_2 L_2}{1+\alpha_2 P}\right]\frac{dP}{dt}=z-1-\alpha_2 P, \qquad (26)$$

較之 H. A. 华西里耶夫在〔1〕的35和36頁的該式中，有下列誤差，在該書的初版中漏掉了乘数$\frac{1}{v_0}$，而在作者逝世后的再版中，式中的 L_1 和 L_2 竟被无故地代以 z_1 和 z_2。

H. A. 华西里耶夫指出，如果进行計算的时間由第二制品出現的瞬时算起，則：

$$L_1=L-v_1 t,$$

因而，　$L_2=v_1 t$，将此二式代入（26）式，H. A. 华西里耶夫又将（26）式变为下式：

$$\frac{1}{v_0}\left[\frac{\alpha_1 L}{1+\alpha_1 P}-v_1 t\frac{\alpha_1-\alpha_2}{(1+\alpha_1 P)(1+\alpha_2 P)}\right]\frac{dP}{dt}$$
$$=z-1-\alpha_2 P \qquad (27)$$

并繼續指出：积分該式会得到非常复杂的式子，华西里耶夫沒有积出这个式子。看来，最簡单的积分过程是将該式变为下式：

$$\frac{dt}{dP}+z\frac{\alpha_1-\alpha_2}{(1+\alpha_1 P)(1+\alpha_2 P)(z-1-\alpha_2 P)}t$$
$$=\frac{1}{v_0}\frac{\alpha_1 L}{(1+\alpha_1 P)(z-1-\alpha_2 P)}, \qquad (28)$$

亦即变为对 t 的一阶綫性微分方程。

H. A. 华西里耶夫并未积分（26）或（27）式，便作了这一解答的定性分析，并由此得到一系列重要的工艺結論。

这一定性結論，在作者原著〔1〕和在1915年的著作中并不一样，在〔1〕中要詳細些。我們不知道在〔1〕36頁中的註述是H. A. 华西里耶夫自己做的，还是其它人，但这一註述