高职高专高等数学精品课程教材

# 高等数学

（工科类专业适用）

## 下册

胡　农 主编

高等教育出版社
Higher Education Press

高职高专高等数学精品课程教材

# 高等数学

(工科类专业适用)

下　　册

胡农　主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书是高职高专高等数学精品课程教材。全书借鉴了国外先进职业技术教育理念，突出体现了职业教育的特点，注重对学生数学素养、基本计算能力和应用能力的培养。

全书分为上、下两册共十章，本册内容包括多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、拉普拉斯变换、矩阵及其应用等内容，在每一章中均编有“应用与实践”和“提示与提高”两节内容，其中“应用与实践”一节包括数学软件Mathematica使用，高等数学在物理、机械、电工电子、信息技术等方面的应用；“提示与提高”一节是在基本要求的基础上适当增加了内容、难度和技巧，满足学有余力的学生的需要，同时培养学生的自学能力和综合素质。本书教学内容起点较低，范围和深度有一定弹性，语言叙述简练、通俗，例题示范量较大。

本书可作为高职高专院校工科类专业数学通用教材，也可供相关科技人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学．下册／胡农主编．—北京：高等教育出版社，2006.9

工科类专业适用

ISBN 7-04-020109-7

Ⅰ.高...　Ⅱ.胡...　Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第091467号

**策划编辑** 周先海　**责任编辑** 胡乃冏　**封面设计** 张　志　**责任绘图** 吴文信

**版式设计** 张　岚　**责任校对** 王　雨　**责任印制** 陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010－58581118 |
| 社　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800－810－0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　机 | 010－58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　刷 | 北京宝旺印务有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　本 | 787×1092　1/16 | 版　次 | 2006年9月第1版 |
| 印　张 | 15.25 | 印　次 | 2006年9月第1次印刷 |
| 字　数 | 370 000 | 定　价 | 19.40元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。



**物料号　20109-00**

# 目　　录


6　多元函数微积分 …… 1

6－1　空间解析几何简介 …… 1

习题 6－1 …… 10

6－2　向量及其运算 …… 10

习题 6－2 …… 15

6－3　多元函数的概念 …… 15

习题 6－3 …… 19

6－4　多元函数的导数 …… 19

习题 6－4 …… 24

6－5　全微分 …… 25

习题 6－5 …… 27

6－6　多元函数的极值和最值 …… 27

习题 6－6 …… 32

6－7　二重积分 …… 33

习题 6－7 …… 42

6－8　应用与实践 …… 43

习题 6－8－1 …… 46

习题 6－8－2 …… 50

6－9　提示与提高 …… 50

习题 6－9 …… 56

复习题六[A] …… 57

复习题六[B] …… 59

7　无穷级数 …… 62

7－1　数项级数 …… 62

习题 7－1 …… 70

7－2　幂级数 …… 71

习题 7－2 …… 80

7－3　傅里叶级数 …… 80

习题 7－3 …… 84

7－4　应用与实践 …… 84

习题 7－4－1 …… 87

习题 7－4－2 …… 90

7－5　提示与提高 …… 90

习题 7－5 …… 100

复习题七[A] …… 101

复习题七[B] …… 102

8　常微分方程 …… 104

8－1　微分方程的概念 …… 104

习题 8－1 …… 105

8－2　一阶微分方程 …… 105

习题 8－2 …… 110

8－3　二阶微分方程 …… 111

习题 8－3 …… 116

8－4　应用与实践 …… 117

习题 8－4－1 …… 122

习题 8－4－2 …… 124

8－5　提示与提高 …… 124

习题 8－5 …… 134

复习题八[A] …… 136

复习题八[B] …… 136

9　拉普拉斯变换 …… 138

9－1　拉普拉斯变换的概念 …… 138

习题 9－1 …… 143

9－2　拉氏变换的性质 …… 143

习题 9－2 …… 145

9－3　拉氏变换的逆变换 …… 145

习题 9－3 …… 147

9－4　应用与实践 …… 147

习题 9－4－1 …… 150

习题 9－4－2 …… 151

9-5 提示与提高 …… 151
习题9-5 …… 152
复习题九[A] …… 153
复习题九[B] …… 153
10 矩阵及其应用 …… 155
10-1 行列式的概念 …… 155
习题10-1 …… 160
10-2 行列式的性质和克拉默法则 …… 161
习题10-2 …… 168
10-3 矩阵的概念及其运算 …… 169
习题10-3 …… 177
10-4 逆矩阵与初等变换 …… 178
习题10-4 …… 189
10-5 一般线性方程组的求解 …… 190
习题10-5 …… 198
10-6 应用与实践 …… 199
习题10-6-1 …… 205
习题10-6-2 …… 209
10-7 提示与提高 …… 210
习题10-7 …… 213
复习题十[A] …… 214
复习题十[B] …… 216
习题参考答案 …… 218
参考文献 …… 237

# 6 多元函数微积分

我们已经讨论过一元函数的微积分，而在实际生活中很多问题与多种因素有关，反映到数学上就是多元函数问题. 本章就来讨论多元函数的微积分及其应用.

## 6-1 空间解析几何简介

### 6-1-1 空间直角坐标系

过空间定点 $O$ 作三条互相垂直的数轴，各个数轴的正向符合右手法则，形成了空间直角坐标系（如图 6-1 所示，用四个手指指向 $x$ 轴正向，旋转 90°指向 $y$ 轴正向，然后拇指的指向为 $z$ 轴的正向.）. 其中 $O$ 称为坐标原点；三个数轴称为坐标轴：分别称为 $x$ 轴（横轴）、$y$ 轴（纵轴）、$z$ 轴（竖轴）；每两条坐标轴确定的平面为坐标面，分别称为 $xOy$ 面、$yOz$ 面和 $zOx$ 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 其中，$x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的正半轴形成的卦限称为第 Ⅰ 卦限开始，$xOy$ 面的上方按逆时针方向依次称为第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限，$xOy$ 面的下方依次称 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限（如图 6-2 所示）.

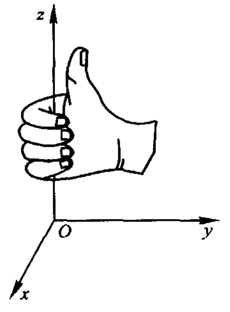


图 6-1

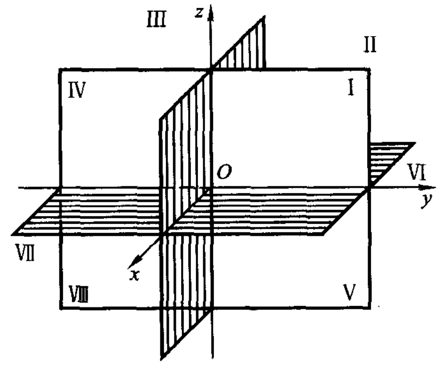


图 6-2

设 $P$ 为空间一点，过点 $P$ 分别作垂直于三个坐标轴的平面，分别与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴相交于 $A$、$B$、$C$ 三点，且这三点在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的坐标依次为 $x$、$y$、$z$，则点 $P$ 唯一地确定了一组有序数组 $x$、$y$、$z$. 反之，设给定一组有序数组 $x$、$y$、$z$，且它们在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上依次对应于 $A$、$B$、$C$ 点，过 $A$、$B$、$C$ 点分别作平面垂直于所在坐标轴，则这三张平面确定了唯一的交点 $P$. 这样，空间的点 $P$ 与一组有序数组 $x$、$y$、$z$ 之间建立了一一对应关系（如图 6－3 所示）. 有序数组 $x$、$y$、$z$ 就称为点 $P$ 的坐标，记为 $P(x、y、z)$，点 $P$ 的三个分量分别称为点 $P$ 的 $x$ 坐标、$y$ 坐标、$z$ 坐标.

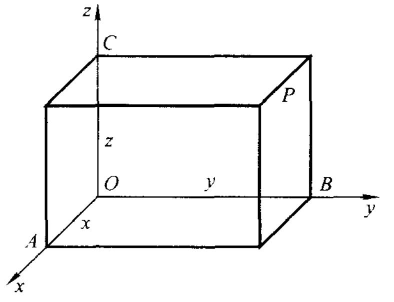

图 6－3

显然，原点 $O$ 的坐标为 $(0,0,0)$，$x$ 轴上任意一点的坐标为 $(x,0,0)$，$y$ 轴上任意一点的坐标为 $(0,y,0)$，$z$ 轴上任意一点的坐标为 $(0,0,z)$，$xOy$ 面上任意一点的坐标为 $(x,y,0)$，$xOz$ 面上任意一点的坐标为 $(x,0,z)$，$yOz$ 面上任意一点的坐标为 $(0,y,z)$. 各卦限点的坐标具有如下特征：

**表 6－1**

| 卦限 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ | Ⅵ | Ⅶ | Ⅷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − | + | + | − | − |
| $z$ | + | + | + | + | − | − | − | − |

容易看出：设空间一点的坐标为 $M(x,y,z)$，它关于 $xOy$ 面的对称点的坐标为 $M(x,y,-z)$；关于 $x$ 轴的对称点的坐标为 $M(x,-y,-z)$；关于原点的对称点的坐标为 $M(-x,-y,-z)$，其它类推.

**例 6－1**　在空间直角坐标系中，求出点 $A(3,1,2)$ 关于（1）$yOz$ 面；（2）$y$ 轴；（3）原点的对称点的坐标.

**解**　（1）点 $A(3,1,2)$ 关于 $yOz$ 面的对称点为 $(-3,1,2)$.

（2）点 $A(3,1,2)$ 关于 $y$ 轴的对称点为 $(-3,1,-2)$.

（3）点 $A(3,1,2)$ 关于原点的对称点为 $(-3,-1,-2)$.

## 6－1－2　空间两点间的距离

设空间有 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 两点，由图 6－4 可以看出 $AB$ 之间的距离为

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \tag{6-1}$$

特别地，平面 $xOy$ 面两点 $A(x_1,y_1,0)$ 与 $B(x_2,y_2,0)$ 的距离为

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} \tag{6-2}$$

**例 6－2**　在 $z$ 轴上求与 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

**解**　设 $z$ 轴上点的坐标为 $C(0,0,z)$，由题意可得

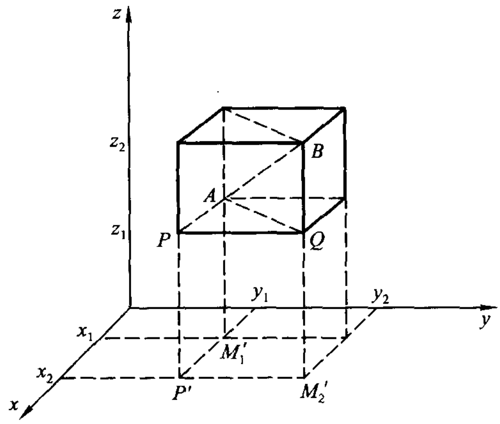


图 6-4

$$|AC| = |BC|,$$
$$\sqrt{4^2+1^2+(z-7)^2} = \sqrt{3^2+5^2+(z+2)^2}.$$

于是 $$z = \frac{14}{9},$$

所以　此点为$(0,0,\frac{14}{9})$.

## 6-1-3 平面

一般地,在空间直角坐标系中,三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 代表一空间平面.满足方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的点在平面上,平面上的点的坐标满足方程 $Ax+By+Cz+D=0$,所以称 $Ax+By+Cz+D=0$ 为平面的方程.

1. 平面方程

在空间直角坐标系中,将三元一次方程

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \quad (A,B,C\text{ 不全为 }0) \tag{6-3}$$

称为平面的**一般式方程**.

**例 6-3**　求过 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$ 的平面方程(如图 6-5 所示)(其中 $a,b,c\neq0$).

**解**　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 由已知

$$\begin{cases} Aa+D=0, \\ Bb+D=0, \\ Cc+D=0. \end{cases}$$

解得 $$A=-\frac{D}{a}, B=-\frac{D}{b}, C=-\frac{D}{c},$$

则平面方程为 $$-\frac{Dx}{a}-\frac{Dy}{b}-\frac{Dz}{c}+D=0.$$

整理得

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1} \tag{6-4}$$

上式称为平面的**截距式方程**,其中 $a$、$b$、$c$ 分别为平面在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的截距.

**例 6-4**　求通过点 $P(1,2,3)$ 和 $x$ 轴的平面方程(如图 6-6 所示).

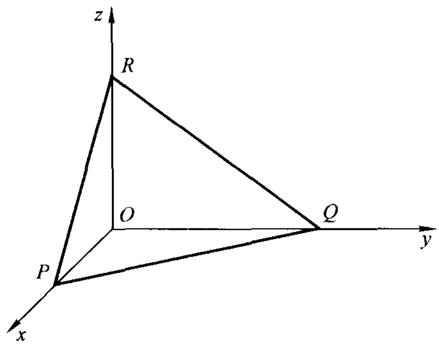


图 6-5

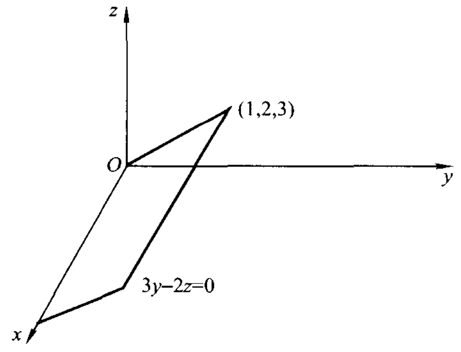


图 6-6

**解**　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$($A,B,C$ 不全为 0). 因为所求平面过原点,易得 $D=0$. 由平面过 $P(1,2,3)$,得

$$A+2B+3C=0.$$

又所求平面过 $x$ 轴,在 $x$ 轴任取点(1,0,0),得

$$\begin{cases}A=0,\\ A+2B+3C=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}A=0,\\ B=-\dfrac{3}{2}C,\end{cases}$$

则平面的方程为

$$3y-2z=0.$$

由本题可以看出,过 $x$ 轴的平面不含 $x$ 项及常数项. 一般地,如果 $A$、$B$、$C$、$D$ 出现零值,则方程(6-3)表示特殊的平面.

2. 平面方程图形的特点

$$Ax+By+Cz+D=0\begin{cases}\begin{matrix}D=0\\(Ax+By+Cz=0)\end{matrix}\left\{\text{过原点平面}\begin{cases}\text{不含 } x \text{ 项,平面过 } x \text{ 轴}\\ \text{不含 } y \text{ 项,平面过 } y \text{ 轴}\\ \text{不含 } z \text{ 项,平面过 } z \text{ 轴}\\ \text{(其余情况也可总结)}\end{cases}\right.\\[2em] \begin{matrix}D\neq 0\\(Ax+By+Cz+D=0)\end{matrix}\left\{\text{不过原点平面}\begin{cases}\text{不含 } x \text{ 项,平面平行 } x \text{ 轴}\\ \text{不含 } y \text{ 项,平面平行 } y \text{ 轴}\\ \text{不含 } z \text{ 项,平面平行 } z \text{ 轴}\\ \text{(其余情况也可总结)}\end{cases}\right.\end{cases}$$

**例 6-5**　分别说出 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 表示的图形.

**解**　$x=0$ 表示 $yOz$ 面;$y=0$ 表示 $xOz$ 面;$z=0$ 表示 $xOy$ 面.

**例 6-6**　画出 $z=5$ 的图形.

**解** $z=5$ 表示平行于 $xOy$ 面,且 $z$ 值为 5 的一平面(如图 6-7 所示).

**例 6-7** 画出 $y+z-1=0$ 的图形.

**解** 如图 6-8 所示.

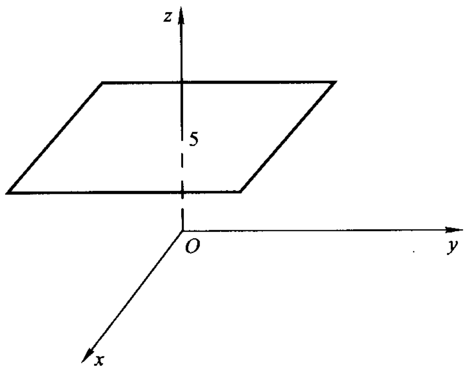


图 6-7

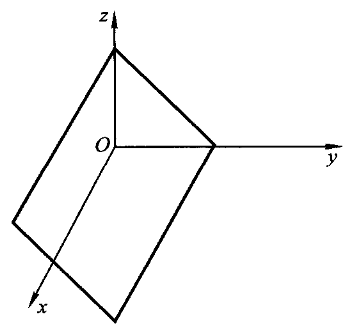


图 6-8

## 6-1-4 简单的二次曲面

任何曲面都可以看作点的轨迹.如果空间曲面 $\Sigma$ 上的任一点的坐标 $(x,y,z)$ 都满足方程 $F(x,y,z)=0$,而满足 $F(x,y,z)=0$ 的 $(x,y,z)$ 值均在曲面 $\Sigma$ 上,则称 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 $\Sigma$ 的方程,称曲面 $\Sigma$ 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.若方程是二次的,所表示的曲面为二次曲面.下面主要研究几类特殊的二次曲面:球面、柱面、旋转曲面等.

1. 球面、柱面、旋转曲面方程

(1) 球面

空间中与一定点的距离为定长的点的轨迹称为球面,定点称为球心,定长称为半径.设球心坐标为 $(a,b,c)$,半径为 $R$,则球面方程标准形式为(如图 6-9 所示)

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2} \tag{6-5}$$

特别地,球心为原点,半径为 $R$ 的球面方程为(如图 6-10 所示)

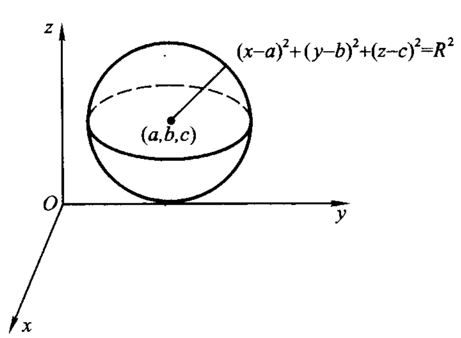


图 6-9

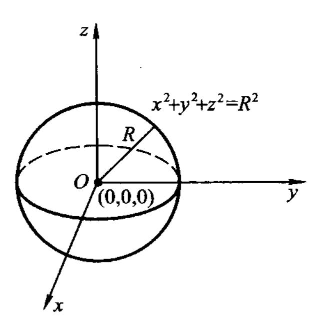


图 6-10

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2} \tag{6-6}$$

将球面方程(6-5)稍作整理

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0.$$

令

$$-2a=D,\ -2b=E,\ -2c=F,a^2+b^2+c^2-R^2=G,$$

得到球面的一般式方程为

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0} \tag{6-7}$$

**例 6-8** 方程 $2x^2+2y^2+2z^2+2x-2z-1=0$ 表示怎样的曲面?

**解** 方程变为

$$x^2+y^2+z^2+x-z=\frac{1}{2}.$$

配方得
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

所以,原方程表示球心在$\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,半径为 1 的球面.

(2) 母线平行于坐标轴的柱面方程

将一直线 $L$ 沿一给定的平面曲线 $C$ 平行移动,直线 $L$ 的轨迹形成一曲面,称之为**柱面**. 其中,直线 $L$ 称为柱面的**母线**,曲线 $C$ 称为柱面的**准线**.

下面只研究母线平行于坐标轴的柱面方程.

设柱面的准线是 $xOy$ 面上的曲线 $C:F(x,y)=0$,柱面的母线平行于 $z$ 轴,在柱面上任取一点 $M(x,y,z)$,过点 $M$ 作平行于 $z$ 轴的直线,交曲线 $C$ 于点 $M_1(x,y,0)$(如图 6-11 所示). 故点 $M_1$ 的坐标满足方程 $F(x,y)=0$,因为方程中不含变量 $z$,而点 $M_1$ 和点 $M$ 有相同的横坐标和纵坐标,所以点 $M$ 的坐标也满足此方程,因此,方程 $F(x,y)=0$ 就是母线平行于 $z$ 轴的柱面的方程.

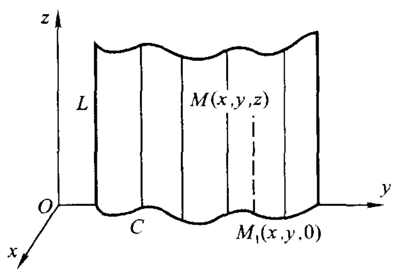

图 6-11

可以看出,母线平行于 $z$ 轴的柱面的方程中不含有变量 $z$. 同理:仅含有 $x,z$ 的方程 $F(x,z)=0$;仅含有 $y,z$ 的方程 $F(y,z)=0$,分别表示母线平行于 $y$ 轴和 $x$ 轴的柱面.

**例 6-9** 指出 $x^2+z^2=R^2$ 在空间直角坐标系中是什么图形.

**解** 因为方程中不含有字母 $y$,所以在空间坐标系中 $x^2+z^2=R^2$ 表示一个柱面,其母线平行于 $y$ 轴(如图 6-12 所示). 它是以 $xOz$ 面上的圆 $x^2+z^2=R^2$ 为准线,母线平行于 $y$ 轴的圆柱面.

**例 6-10** 指出 $y=x^2$ 在空间直角坐标系中是什么图形?

**解** 因为该方程不含有 $z$,所以在空间坐标系中 $y=x^2$ 表示一个柱面,其母线平行于 $z$ 轴(如图6-13所示). 它是以 $xOy$ 面上的曲线 $y=x^2$ 为准线,母线平行于 $z$ 轴的**抛物柱面**.

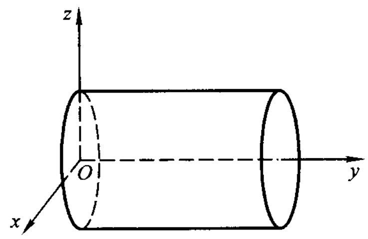


图 6-12

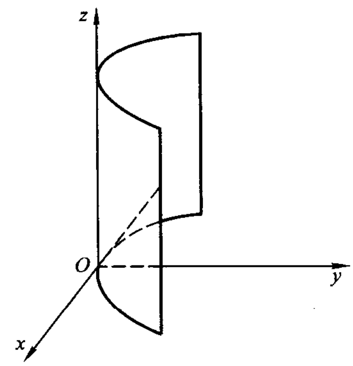


图 6-13

(3) 以坐标轴为旋转轴的旋转曲面的方程

将 $xOy$ 面上的曲线 $f(x,y)=0$ 绕 $x$ 轴旋转一周,就得到一个**旋转曲面**,它的方程为

$$\boxed{f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0} \tag{6-8}$$

类似地,绕 $y$ 轴旋转而成的旋转曲面的方程为

$$\boxed{f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0} \tag{6-9}$$

一般地,平面曲线绕哪个坐标轴旋转,方程中对应此轴的变量保持不变,而把另一个变量变成其余两个变量的平方和再开方的正负值.

比如,$xOy$ 面上的椭圆曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转曲面的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$,绕 $y$ 轴旋转而成的旋转曲面的方程为$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,称它们为**旋转椭球面的方程**.(如图 6-14,6-15 所示)

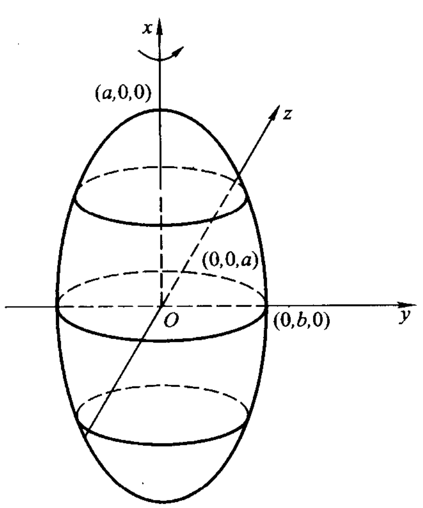


图 6-14

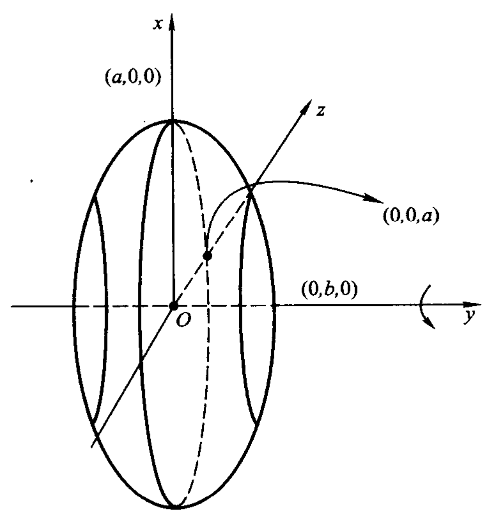


图 6-15

$yOz$ 面上的抛物线 $y^2=2pz(p>0)$ 绕 $z$ 轴旋转而成的旋转曲面的方程为 $x^2+y^2=2pz$，称为**旋转抛物面**的方程(如图 6－16)

$xOy$ 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转曲面的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$，称为**旋转双叶双曲面**的方程；绕 $y$ 轴旋转而成的旋转曲面的方程为$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，称为**旋转单叶双曲面**的方程(如图 6－17，6－18 所示).

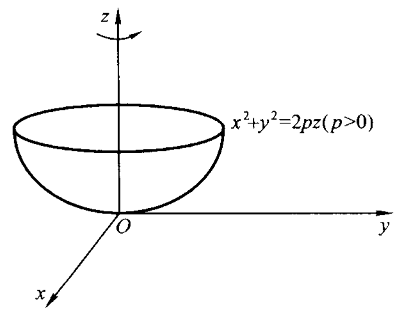


图 6－16

综上所述易得：

2. 球面方程，柱面方程，旋转曲面方程的特征

(1) 球面方程特征　含有 $x$、$y$、$z$ 的二次项其系数相等，用配方法易求出球心，半径.

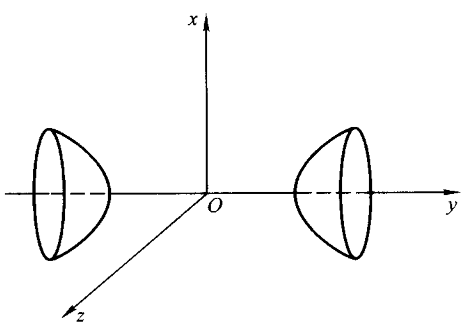


图 6－17

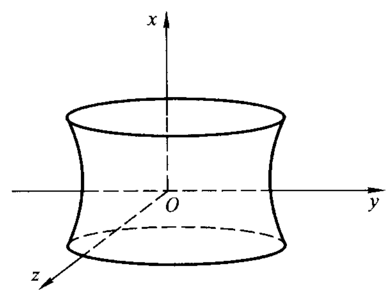


图 6－18

(2) 母线平行于坐标轴的柱面方程特征　若 $x$、$y$、$z$ 项中少一字母，则母线平行于该字母所表示的坐标轴.

(3) 旋转曲面方程特征　$xOy$ 面上曲线 $f(x,y)=0$，若绕 $x$ 轴旋转，旋转曲面方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$；若绕 $y$ 轴旋转，旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$. 其它类推.

**例 6－11**　说明方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示什么曲面.

**解**　因为方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 少字母 $z$，所以它表示柱面. 它是以 $xOy$ 面的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为准线，母线平行于 $z$ 轴的椭圆柱面(如图 6－19).

**例 6－12**　说明方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ 表示什么曲面.

**解**　因为方程中字母 $x$，$z$ 的系数相同，且不缺少字母，所以它是由 $xOy$ 面上曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 $y$ 轴旋转而成的旋转椭球面(如图 6－15).

**例 6－13**　说明下列各方程的图形是什么？

（1）$x^2-y^2=36$，（2）$x^2-y^2=z^2$，（3）$3x^2+4y^2+4z^2=12$.

**解** （1）由于方程中缺少字母 $z$，故其图形为一柱面. 它表示母线平行于 $z$ 轴，以 $xOy$ 面上曲线 $x^2-y^2=36$ 为准线的双曲柱面（如图 6－20）.

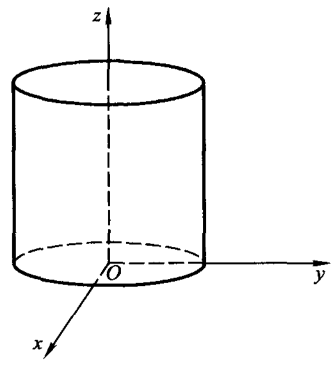


图 6－19

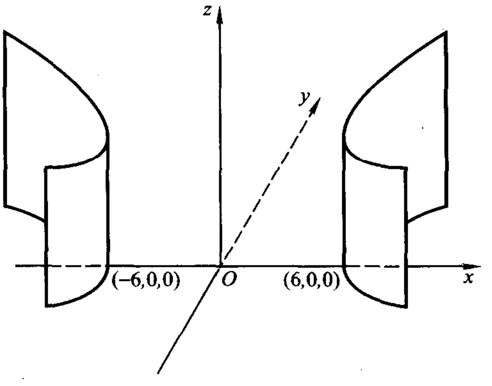


图 6－20

（2）由于 $x^2=y^2+z^2$，其中 $z^2,y^2$ 的系数相等，所以可判定出是旋转曲面，曲面可写为 $x=\pm\sqrt{y^2+z^2}$，所以它是由 $xOy$ 面上的直线 $x=\pm y$ 绕 $x$ 轴旋转而成的圆锥曲面（如图 6－21）.

（3）由于在 $3x^2+4y^2+4z^2=12$ 中 $y^2,z^2$ 系数相同，所以可判定为旋转曲面. 曲面方程可化为 $3x^2+4(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=12$，所以，它是由 $xOy$ 面上的曲线 $3x^2+4y^2=12$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转椭球面（如图 6－22）.

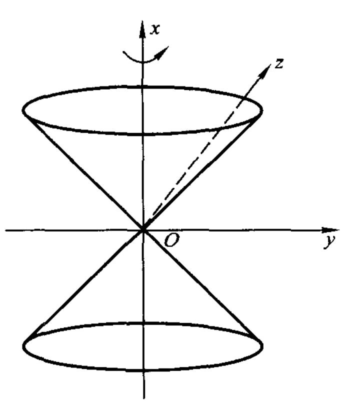


图 6－21

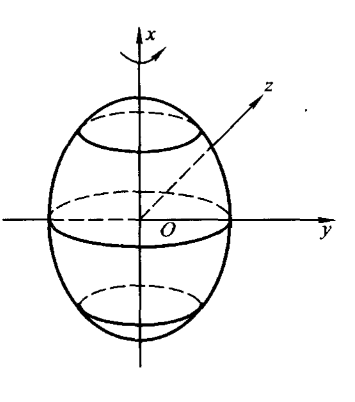


图 6－22

## 习题 6－1

1. 在空间直角坐标系中，求点 $A(4,-5,6)$ 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)原点的对称点的坐标.

2. 点 $(4,-3,5)$ 到(1)坐标原点；(2)各坐标轴；(3)各坐标面的距离.

3. 试证以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

4. 在 $xOy$ 面上找一点，使它的 $x$ 坐标为 1，且与点 $(1,-2,2)$ 和点 $(2,-1,4)$ 等距离.

5. 指出下列平面的特殊性质

(1) $x-y+z=0$； (2) $x+2y=0$； (3) $z=5$； (4) $x+y-1=0$.

6. 求过三点：$A(1,2,-1)$、$B(2,1,-2)$、$C(3,-1,0)$ 的平面方程.

7. 求过点 $(1,2,-1)$ 且在三坐标轴上的截距相等的平面方程.

8. 求 $x^2+y^2+z^2-6x+8y=0$ 的球心与半径.

9. 指出下列方程在平面解析几何和空间解析几何中表示什么图形.

(1) $x^2+y^2=R^2\,(R>0)$； (2) $y^2=2x$.

10. 说明下列方程表示的曲面：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$； (2) $x^2+\dfrac{y^2+z^2}{4}=1$.

11. 下列曲面哪些是旋转曲面？它们是如何生成的？

(1) $x^2+y^2+3z^2=1$； (2) $2x^2-2y^2-3z^2=1$； (3) $2x^2-2y^2+2z^2=1$；

(4) $2x^2-2y^2-2z^2=1$； (5) $x^2+y^2+z^2=R^2$.

# 6－2 向量及其运算

## 6－2－1 向量的概念

在物理学中，我们已经遇到过既有大小又有方向的量，如：力、位移、速度、加速度等，这种量叫做**向量**或矢量，一般记为 $|\overrightarrow{AB}|$，$\overrightarrow{AC}$ 或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等.

向量的大小称为向量的**模**，用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示. 模为 1 的向量称为**单位向量**，与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，方向不定.

方向相同，模相等的向量称为**相等向量**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 可以自由平移的向量称为**自由向量**，我们所研究的对象是自由向量.

## 6－2－2 向量的几何运算

1. 加法运算

设两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,有共同的起点 $O$,则以 $O$ 为起点,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OC}$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 6-23(a)). 这个法则称为加法的**平行四边形法则**.

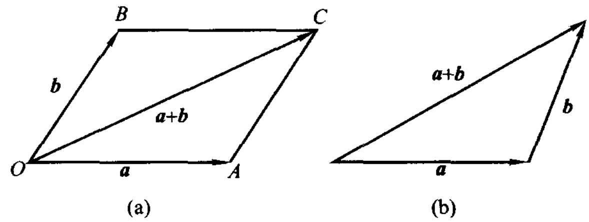


图 6-23

平移向量 $\boldsymbol{b}$ 至向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点,以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量也表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这种方法称为向量加法的三角形法则(图 6-23(b)). 这个法则可以推广到有限多个向量相加.

向量的加法满足:

交换律 $$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}} \tag{6-10}$$

结合律 $$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})} \tag{6-11}$$

2. 减法运算

与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{b}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{b}$.

由于 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到同一点 $O$,易得以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 6-24),这种方法称为向量减法的三角形法则.

3. 数乘向量

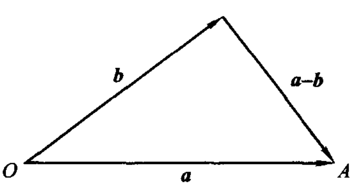


图 6-24

**定义 6-1** 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,$\lambda$ 是一个非零实数,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda$ 的乘积仍是向量,称为数乘向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 且(1)$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$ (2)$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为$\begin{cases}\text{与 } \boldsymbol{a} \text{ 同向}, \lambda>0, \\ \text{与 } \boldsymbol{a} \text{ 反向}, \lambda<0.\end{cases}$

若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

数乘向量满足结合律与分配律:

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

其中 $\lambda$、$\mu$ 都是数量.

由数乘向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的定义可知,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量,也称为平行向量.

## 6-2-3 向量的坐标表示法

1. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系中,与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的正向同向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称为**基本单位向量**.