

张学曾 编著

新课标

高中数学解题方法示例一本全



甘肃教育出版社

前言

岁月易逝,人生易老,转瞬间,在中学数学的讲台上,爬爬滚滚已摔打了四十个春秋,而今已近花甲之年,在这四十年中,既有丰收的欣慰,也有失意的无奈,而更多的是无风无浪的平庸。年岁渐增,总思谋着拿出点与自己数学教学有关的东西,权作为我这已有五代从教的“教师世家”的第四代对社会和时代的一点回报。但写什么,怎样写,一直举棋不定。

数学知识和数学方法是中学数学的两大支柱,在一定程度上方法比知识显得更重要。然而,回顾前些年我们使用过的数学教材,其编写方式基本上是以数学知识为主线的,对方法缺少应有的和足够的重视。虽然数学问题的思维和解决需要知识,但更需要方法。

近年来,素质教育的春风吹拂着神州大地,温暖了人们的心,也吹醒了我这个似睡非睡的凡夫俗子。适逢此时,教育部制定了新的《课程标准》(试验),新编教材随之以其全新的面目进入了数学课堂。此时此刻,我才痛下决心,毅然决然地拿起笔,立意编撰《新课标高中数学解题方法示例一本全》一书。对中学数学中蕴涵的思想方法进行爬梳、整理、归类、挖掘,使之系统化,模型化。

本书的编写工作始于2003年,于今已有一年多时间。在这段时间里,我忙中偷闲,秉烛伏案,宵残不倦,涂涂抹抹,修修改改,几经反复,几易其稿,现在总算编撰成册,此中艰辛,无庸赘言,劳作之后的心有所得,非三言两语可尽道。

这部书的内容特点是:1. 没有沿袭传统的、流行的以题衬法的编写模式,而是一反常规,突出数学思想方法,以方法统摄问题,以方法为主线进行珠串。2. 注重理论和实践的联系。是数学问题,当然少不了具体题目的引进。但在此,我们没有为解题而解题,而是侧重于探索对问题的思维方式和解决方法的合理选取;对数学思想方法的运用,很少是枯燥的理论说教,而更多的是注意理论与实际问题相结合进行

阐释,使之有血有肉,肌体丰满。3. 比较系统、全方位地对中学数学所蕴涵的思想方法和中学生应该具备的思维素质作了透视。书中既有对高层次数学思想和思维方法的论证,又有对数学问题的解答策略的探索,同时也涉略到人们感兴趣的数学问题的非常规解决。从某种意义上说本书的覆盖面还是比较宽阔的,虽不能说对中学数学中的点点滴滴事无巨细的都着笔,但起码一些关键的重要的方法策略都还是有所揭示的。倘若年轻稚嫩的中学生不将其粗疏展卷一读或许还是有所教益的,抑或从中得到一点什么也是可能的。

一部书在编写的过程中,写给谁看,这是作者应该把握的基本原则。对于该书,笔者没有过多的奢望,其阅读主体就是广大的中学生,因为对他们来说,虽经一个阶段的学习,累积了较为厚实的数学知识,但思考问题和解决问题的方法相对是欠缺的。参阅此书,或许能使他们的短缺得以补偿。作者的意图是想通过此书,把广大的中学生从题海中解救上岸。这个愿望未必完全实现,但至少能使他们在解决问题时少走一些弯路,减轻一些不必要的负担。当然,对一些刚走出大学校门,步入教学第一线的年青的数学教育工作者也会是有所启发的。

本书通过努力虽已问世,但由于编者水平有限,孤见寡闻,不谙治学之道,加之资料匮乏,教学繁忙,错讹、不确、以至谬误在所难免,在此诚望方家赐教,恳请读者指正。

张学曾

2004年7月9日

目 录

第一章 中学数学蕴涵的数学思想方法

- 1.1 函数的思想方法/1
- 1.2 方程的思想方法/5
- 1.3 等价转化的思想方法/8
- 1.4 分类讨论的思想方法/15
- 1.5 集合的思想方法/28
- 1.6 数形结合的思想方法/33
- 1.7 强化数学思想方法的应用意识/40

第二章 数学思维方法

- 2.1 数学思维活动概述/43
- 2.2 数学演绎法/43
- 2.3 归纳推理/48
- 2.4 分析法和综合法/53
- 2.5 化归的思维方法/58
- 2.6 数学模型化思维方法/67

第三章 数学问题思维和解答的策略

- 3.1 “以退求进”的思维和解题策略/71
- 3.2 “整体把握”的思维和解题策略/78
- 3.3 “逆向思维”的解题策略/85
- 3.4 “回到定义”的思维和解题策略/93
- 3.5 “特殊化”的思维和解题策略/97
- 3.6 “引参设变”的思维和解题策略/102

第四章 中学数学中几种最基本的方法

- 4.1 配方法/109
- 4.2 换元法/116
- 4.3 待定系数法/125
- 4.4 数学归纳法/132
- 4.5 反证法/140

目 录

第五章 一些基本数学问题的思维和解答

- 5.1 简析三角不等式及其解法/147
- 5.2 用变换法作函数图象/153
- 5.3 数学近似计算之点滴/157
- 5.4 三点共线问题的八种证法/160
- 5.5 已知双曲线上一点和渐近线求双曲线方程
几种方法/164
- 5.6 数学归纳法证题中从 k 向 $k+1$ 过渡的几种
方法/166
- 5.7 数列通项公式的几种求法/170
- 5.8 数学应用问题及其解答/175
- 5.9 复合函数及相关问题的解答/176
- 5.10 对直线与双曲线交点个数的论证/182
- 5.11 对于过圆锥顶点的截面的论证/184
- 5.12 函数的值域及其求解方法/187
- 5.13 函数的最值及其求解方法/196
- 5.14 求解函数的解析式/207
- 5.15 几种距离和相应的求解方法/213

第六章 创新思维,探索数学问题的非常规解答

- 6.1 例说构造函数模型解题/223
- 6.2 用复数法思维和解答非复数问题/229
- 6.3 探索用构造法思维和解题/236
- 6.4 开发复数的几何意义,寻求数学问题的非常
规解答/242
- 6.5 用数例思想探索复数的开方/247

第一章 中学数学蕴涵的 数学思想方法

1.1 函数的思想方法

1. 以函数思想为指导,确立处理问题的策略

在数学中引入函数后,运动、变化的观点随之也就进入问题,量与量之间联系,对应的规律就会有意无意地渗进人们的思维活动.促使人们用动态的眼光看待貌似静态的问题.从相互制约、依存的复杂关系中,找出问题中所涉及的事件之间的联系,从而理出一个清晰的头绪,确定解决问题的对策.譬如有这样一个问题:“求证不论 a 取什么实数,方程 $x^2-(a^2+a)x+a-2=0$ 必有两个不相等的实根.”观察所给出的问题,在此有两个变量, a 和 x 共处于方程 $x^2-(a^2+a)x+a-2=0$ 中,这里容易看到 a 和 x 的依存关系,即 a 的变化必牵动 x ,相应的 x 值也影响着 a .在此若拟用常规方法从判别式切入,则可预知 Δ 是一个关于 a 的四次式,符号是不容易确定的,若改变思路让函数作用于问题,情况当即会有奇变.设 $f(x)=x^2-(a^2+a)x+a-2$,问题就转化为寻求 $f(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点,换一种说法,就是看能否在 x 轴的上、下方都有图象,即是能否找到一个 x_0 ,使得 $f(x_0)<0$,显然,当 $x_0=1$ 时,有 $f(1)=1-a^2-a+a-2=-1-a^2<0$,问题即刻有了结果.

这里正是函数的思想引导人们避开了繁琐的常规方法,果断地选择了函数的策略,促成了问题快速而卓有成效的解决.或者说这种合理的策略就是函数思想左右人们思维的结果.此例仅是函数思想在数学问题解决中指挥人们的思维活动进行策略调控的一个缩影.但就此足以窥见函数在问题解决中策略决断的重要性.

2. 函数图象架设了数形结合的桥梁

图象是函数的一个重要特征,是瞭望函数的窗口.对一个函数来说,只要作出其较为规范的图象,它的所有性质和变化情况都可得到直观的显示,即是说两个变量的变化,依存对关系,通过图象可一览无余.正是这种特点,使得函数构成

了数和形的一个重要结合部。

在数学问题中,有些类型是用代数形式刻划和表示的.当然,这种形式有它高度抽象、概括、具有一定的严谨性的一面;但也有思维艰难、不易切入的缺陷.在此,若能把它视为某个类型的函数,作出其图象,则其关系就会昭然若揭,清澈见底.反过来有些数学问题是以图形的形式给出的,直观而显亮,是它的特点;但粗疏而失其严谨又是它的缺憾.在此,若能找到或建立表示它的函数关系式,借助代数方法来研究讨论图形的性质和变化情况,则图形的粗疏失真就可得以弥补.这种以数促形,以形助数的思维和解题的模式就是倍受人们喜爱的数形结合的思想方法,自然这种方法人们对它是极其看重的.但函数在数和形沟通中的桥梁作用也是不允许人们轻看的,在许多问题中正是通过函数这一纽带的维系,才使得数和形达到完美的结合.碰撞出人们思维的火花,在此函数的价值虽不能说达到了登峰造极,但却得到了足够的显示.

例1 当实数 a 在什么范围内取值时,方程 $\frac{\lg 2x}{\lg(x+a)}=1$,有两个不相等的实数解.

解析:为使人们在对此例有所慧悟,这里我们拟用两种不同的方法对问题给出解答,优胜劣败,自然就会一目了然.

法(Ⅰ):显然方程有解的必要条件是 $\begin{cases} 0 < x \neq \frac{1}{2} \\ 0 < x+a \neq 1 \end{cases}$ 于是原方程 $\Leftrightarrow$

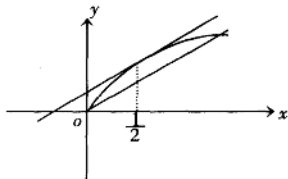
$$\begin{cases} \lg 2x = \lg(x+a)^2 \\ x+a > 0 \\ x+a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+a)^2 = 2x \\ x+a > 0 \\ x+a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2(a-1)x + a^2 = 0 \\ x+a > 0 \\ x+a \neq 1 \end{cases} \quad \text{从而可得原方程有两个不相等}$$

$$\text{的实数解的条件为} \begin{cases} \Delta = 4(a-1)^2 - 4a^2 > 0 \\ -(a-1) - \sqrt{1-2a} + a > 0 \\ -(a-1) \pm \sqrt{1-2a} + a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2a > 0 \\ 1-\sqrt{1-2a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ \sqrt{1-2a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2} \quad \text{即当 } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 时原方程有两个不相等的实数解.}$$

$$\text{法(Ⅱ):由原方程} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a = \sqrt{2x} \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{在直角坐标系中作出曲线 } y = \sqrt{2x} \ (x > 0, \text{ 且}$$

$x \neq \frac{1}{2}$) 和直线 $y=x+a$, 易得原方程实数解的个数就是两个函数图象交点的个数, 从图象可以看到它们相切的条件为 $a = \frac{1}{2}$, 让图象说话易得使原方程有两个不等实根的 a 的取值范围是 $0 < a < \frac{1}{2}$.



[评注] 上边所给的解法(Ⅰ)是在纯代数形式下进行的, 不仅思考量大, 而且操作也极为繁琐, 虽经拼搏也有了最后的结果, 但其中的艰难自在不言之中. 而解法(Ⅱ)就简单得多了, 函数图象一经作出, 问题的结论当即被人们得出, 两种思想方法一经比较, 孰优孰劣是显而易见的.

通过上述问题两种不同的求解途径, 我们深感在数学问题解决中, 通过图形探索解题途径的重要作用, 而函数可以说是促成数学结合的绝好形式. 若能有效地利用函数这一独具的优势, 无疑对问题的解决是十分有意义的.

3. 函数向人们提供了行之有效的解法方法

函数有许多重要的性质, 诸如奇偶性、单调性、定义域、值域、周期性等. 而函数的思想在很大程度上就是依靠这些性质来体现和反映的, 函数的方法也多是通过这些性质作用于问题的. 这就使得在数学问题的解决中人们常常在对问题所具有的条件和欲获得的结论周密分析的基础上联系函数的某些性质, 觅寻解题的方法, 从而形成解决问题的思路.

例2 已知奇函数 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递减, 比较: $a=f(\log_2 8)$ 与 $b=f[\ln_2 \pi]$ 的大小.

解析: 这是一个两个实数比较大小的问题, 其解法各有千秋, 然而依据问题的结构形式和题目提供的信息向函数索取方法或许更有意义.

依题意 $[-4, -2]$ 是 $f(x)$ 定义域之子集, 于是 $a=f(\log_2 8)=f(-3)$, $b=f[\ln_2 \pi]=f(-\pi)$, 又奇函数在 $[2, 4]$ 上单调递减, 可知在其对称巨间 $[-4, -2]$ 上, 也必是单调递减, 由此可得 $f(-3) < f(-\pi)$ 即 $a < b$

例3 求函数 $y = \frac{3\sin\alpha - 2}{\cos\alpha + 1}$ 的值域.

解析: 这里形式中出现了 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$, 而 $|\sin\alpha| \leq 1$, $|\cos\alpha| \leq 1$ 故可考虑和函数的有界性联系, 或许问题有望突破.

$$\begin{aligned} \text{由 } y = \frac{3\sin\alpha - 2}{\cos\alpha + 1} \text{ 可得 } 3\sin\alpha - y\cos\alpha = 2 + y, \text{ 引进辅助角, 有 } \sqrt{9+y^2} \left(\frac{3}{\sqrt{9+y^2}}\sin\alpha - \right. \\ \left. \frac{y}{\sqrt{9+y^2}}\cos\alpha \right) = 2 + y, \text{ 即有 } \sin(\alpha - \beta) = \frac{2+y}{\sqrt{9+y^2}}, \therefore |\sin(\alpha - \beta)| \leq 1 \text{ 从而有 } \left| \frac{2+y}{\sqrt{9+y^2}} \right| \\ \leq 1 \text{ 依此可解得 } y \leq \frac{5}{4}. \therefore \text{此函数的值域为 } y \in (-\infty, \frac{5}{4}). \end{aligned}$$

[评注]这里的两个问题都是拟取函数的方法解决的.在此,函数不仅引导人们扣开了思维的大门,而且提供了相应的方法,实在是功不可灭.当然这两个问题也是可以用别的方法求解的,但以函数的方法最为简捷、精彩.由此可以看到在某些较为复杂、思维难以启动的数学问题解决中,追求和寻觅函数的方法无疑是很有意义的.

4. 构造函数模型,求解数学问题

目前国际数学界风行“数学建模”,当然,数学建模的概念,意义是极其深刻的,也是非常广泛的.但有一点可以说是十分明确的,就是把同类型的问题,有共同特点的知识,抽象成为模块,进而又用这些模块解决相关的问题.

在我国传统的数学方法中,虽没有像今天这样把问题明确的提出,但潜意识的已经在应用模型方法解决问题,诸如在《九章算术》、《孙子算经》等重要的历史文献中,都不缺少这方面的记载,特别是到了近代,函数理论的建立和发展,更使人们迅速的将这一理论和方法应用于实际,许多原来难以解决和不能解决的数学问题一经和函数沟通,就可以轻而易举的得以突破,在此函数所具有的魅力,可以说得到了充分的显示.

数学模型是一种泛指,有函数模型、不等式模型、数列模型等等.然而函数模型的应用最为广泛,特别是近年来应用数学的异军突起,更使函数的身价倍增.函数构成了数学知识和实际问题沟通的主渠道,许多实际应用问题都是通过选择自变量,抽象函数模型,进而让函数模型作用于实际问题的模式来解决的.

例4 某商人如果将进货单价为8元的商品,按每件10元出售,每天可销售100件,现在他采用提高售价减少进货量的办法增加利润,已知这种商品每件售价提高1元,销售量就要减少10件,问他将销售价每件定为多少元时,才能每天赚的利润最大.

解析:这是一个时下流行的与市场经济相联系的具有强烈时代气息的问题,同时也是凝聚了一定的数学知识和思维方法的数学问题.在此,我们容易发现每天所获得的利润等于每件的利润与销售量之积,且销售量随着单价的提高而减

小,这样依题意,可把每天所获利润表示为每件提高钱数的函数、促成求函数最值的问题.

设每件提高 x 元($0 \leq x \leq 10$),则每件获得利润为 $(2+x)$ 元,则每天可销售 $(100-10x)$ 件,再设每天获总利润为 y 元,从而有 $y=(2+x)(100-10x)$ (此即为函数模型),依此可得在 $x \in [0, 10]$ 上,当 $x=4$ 时, y 取得最大值360元.所以当销售价定为14元时,每天所赚利润最大,且最大利润为360元.

[评注]这是一个实际问题,在此我们暂时撇开了一些非本质的东西,而把它抽象为一个函数模型,进而让这一模型作用于具体问题,从而使得问题得以解决.显然这一函数模型在问题解决中的作用是极其重要的,因此可以看到构造这一函数模型又是十分必要的.可以说,问题求解的过程就是函数思想的映现,也是函数知识和方法的凝聚.在此,函数在问题解决中的作用是不应低估的.

1.2 方程的思想方法

1. 借助方程研究曲线

这在平面解析几何中是一个重点而又十分普遍的问题.解析几何中,研究图形的重要方法,就是设法建立曲线的方程,通过方程探索曲线所具有的性质和运动变化的规律.在此,方程的作用可以说是十分突出的.依条件建立曲线的方程是突破对曲线研究的关键,而方程的形式和未知量的次数,又直接决定着曲线的类型.譬如在研究直线时,我们建立起来的是关于 xy 的一次方程;研究圆时,得到的是 x^2 项与 y^2 项的系数相同且缺少 xy 项的关于 xy 的二次方程.既是在其形式相同的方程中,因其系数的不同,也会出现曲线位置的变化.如直线系方程、圆系方程都揭示的是系数对曲线位置的影响,特别是在三种圆锥曲线的研究中,更是较多地体现了方程的特色.

如:顶点在原点、焦点在 x 轴的正半轴上的抛物线方程是 $y^2=2px$ ($p>0$),此方程表示的是开口向右的抛物线.若将其方程变为 $y^2=-2px$ ($p>0$),则表示顶点在原点,焦点在 x 轴的负半轴上,且开口向左的抛物线,由此可以看到方程形式直接影响着曲线的类型和位置.

2. 以方程理论为指导,选择问题解决的策略

解析几何中对两直线位置关系的讨论,就是拟取了方程组有解、无解,有多少解的策略,进而对一个方程进行讨论实现的.

在此先让两直线方程构成一方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ 进而降元得一关于 x 或关于 y 的一元一次方程, 通过对这一具体方程的讨论, 获得了当 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ 时, 方程

组有无穷多组解, 易得此时两直线重合; 当 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ 时, 方程组无解, 即可得

两直线平行; 当 $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ 时方程组有唯一的实数解, 毫无疑问这时的两条直线是

相交的.

例1 设直线 l 的斜率为 k , 并过点 $(0, 1)$ 讨论直线 l 与抛物线 $y^2 = x$ 的位置关系.

解析: 这属直线与曲线的位置关系问题, 在此直线的斜率 k 是参变量, 这就使得 l 和抛物线 $y^2 = x$ 的位置也随 k 的变化而改变, 这里考虑建立方程组, 通过对方程组的讨论, 寻求问题的结论, 可以说是必然的选择.

依题设所给条件可设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$, 进而建立方程组 $\begin{cases} y = kx + 1 \cdots \textcircled{1} \\ y^2 = x \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

将 $\textcircled{1}$ 代入 $\textcircled{2}$ 有 $ky^2 - y + 1 = 0$ ※此为关于 y 的一元二次方程, 故可考虑引进判别式, 即有 $\Delta = 1 - 4k$, 当 $\Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4k > 0 \Rightarrow k < \frac{1}{4} \Rightarrow$ 方程※有两个不同的实根 $\Rightarrow$ 方程组

$\begin{cases} y = kx + 1 \\ y^2 = x \end{cases}$ 有两组不同的实数解. $\Rightarrow$ 直线 l 与抛物线 $y^2 = x$ 有两个交点. 当 $\Delta = 0 \Rightarrow 1 - 4k = 0$

$\Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow$ 方程※有两个相同的实数解 $\Rightarrow$ 方程组仅有一组实数解 $\Rightarrow$ 直线 l 与抛

物线只有一个交点. 当 $\Delta < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4} \Rightarrow$ 方程※无实根 $\Rightarrow$ 方程组无实数解 $\Rightarrow$ 直线 l 与抛物线无交点.

[评注] 透过问题解答的过程, 使我们看到问题的解决自始至终屈从于方程思想的指导. 这里把 k 的变化, 融进了一元二次方程根的判别式, 使得方程的思想理论能直接的作用于问题, 这一策略性的转化实在可以说具有非凡的意义. 正是这一方程判别式的重要作用, 才能使问题, 随着 k 的不同取值, 再现了迥然不同的结论.

在解析几何中, 圆、椭圆、双曲线和抛物线, 是我们重点讨论的曲线类型. 在此, 我们可以看到它们的方程都是关于 xy 的二元二次方程. 但因此也会使人们产生这样的疑问, 形如: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的二元二次方程 (A, B, C 不同时

为零),在何种情况下表示椭圆,而又在怎样条件下表示的是双曲线和抛物线,显然一般的方法是难以解决的.在此,我们引进方程的策略,拟用判别式,由结论当即可以明朗化,具体过程可参看下表:

条件	类型	一般情况	特殊情况
$B^2-4AC<0$	椭圆型	椭圆	一点或没有轨迹
$B^2-4AC>0$	双曲线型	双曲线	两相交直线
$B^2-4AC=0$	抛物线型	抛物线	两平行直线,两重合直线或无轨迹

从表面上看这是一个较为繁难,而不易解决的问题.在此我们摄取了二元二次方程的判别式($\Delta=B^2-4AC$)没有费多少气力,就使问题有了结果.在此,方程理论在问题解决中的作用可谓表现得酣畅淋漓,使人赞叹不已.

3. 抽象方程模型,解决实际问题

对于应用问题的处理策略,在我国长时期地流行着一句口头禅:列方程解应用题.这种说法在今天看来实在有些偏激,但从侧面也反映出,列方程在求解应用问题中的重要性和普遍性.问题解决的实践也证明了,在应用题的解答中先撇开一些非本质的因素,将问题抽象为方程模型,再让方程模型作用于我们具体要解答的问题,确实是一种行之有效的办法,也是思维和求解应用问题的基本方法.

例2 有三块合金,第一块是60%的铝和40%的铬;第二块是10%的铬和90%的钛;第三块是20%的铝,50%的铬和30%的钛.现需要由它们组成一块含钛45%的新合金,试问在新的合金中,含铬的百分比的范围?

解析:这是一个合金含量的应用问题,情景新颖而贴近实际,问题是要求新合金中含铬百分比的范围,洞察问题的结构特点和提供的信息,我们应该考虑构造方程和不等式模型,促成问题的解决.

设在一个单位重量的新合金中,含第一,第二,第三块合金的重量分别为 x 、 y 、 z ,此时问题就转化为求铬含量 $a=0.4x+0.1y+0.5z$ 的值的范围,又 x 、 y 、 z 满足 $x+y+z=1$ ……①,而钛函数为 $0.9y+0.3z=0.45$ ……②, x 、 y 、 $z \geq 0$ ……③由①②分别消去 y 、 z 得 $y=0.5x+0.25$ ……④, $z=-1.5x+0.75$ ……⑤由③⑤得 $0 \leq x \leq 0.5$ ……⑥将④⑤代入 a 中可得 $a=-0.3x+0.4$,由此可得 a 的范围为: $0.25 \leq a \leq 0.4$,即新合金中铬的含量为25%至40%.

[评注]此为一综合性较强的数学应用问题,在求解的过程中,我们撇开了一些非数学的因素,将实际问题抽象而得到了方程模型,进而让方程作用于具体问题,促成了问题的解决.当然,在问题解决的过程中也融进了不等式模型,佐以方程靠近结论.但在此,方程所起的作用仍是居主导地位的.

对于具有条件 $x_1+x_2=p$, $x_1 \cdot x_2=q$ 的数学问题欲求 x_1, x_2 的值时,人们常逆用韦达定理,构造一元二次方程的模型,让其作用于问题,从而求得 x_1, x_2 的值.这类问题的常见模式是:由 $x_1+x_2=p$, $x_1 \cdot x_2=q$,可构造一元二次方程 $x^2-px+q=0$,求解此方程,方程的两个根即为 x_1, x_2 之值.

例3:在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_2+a_3+a_4+a_5=34$, $a_2+a_5=52$,求 a_n .

解析:这是一个求等差数列的通项公式的问题,而等差数列的通项公式其形式是较为刻板而固定的.一般地说,只要具备首项 a_1 和公差 d ,即可随手而得.

$a_2+a_3+a_4+a_5=34 \Rightarrow a_2+a_5=17$, 又 $a_2+a_5=52$, 于是可构造一元二次方程 $x^2-17x+52=0$. 解此方程可得 $\begin{cases} a_2=14 \\ a_5=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2=3 \\ a_5=14 \end{cases}$, 将此分别代入 $a_n=a_1+(n-1)d$ 即可得 a_1 和 d , 从而可得 $a_n=3n-2$ 或 $a_n=19-3n$.

[评注]此题在求解的中段过程,拟构了一元二次方程模型,从而轻而易举的求得了 a_2 和 a_5 ,为问题的进一步解决创造了条件.当然,亦可拟用别法,但相较之下,应该说还是构造方程的方法最为简单.

1.3 等价转化的思想方法

1. 全体与部分转化的策略

依据问题所示的条件和欲要获取的结论的特点,一些问题从整体入手着实困难,此时我们可把所要研究的对象进行分解,化整为零,各个击破,促成问题的解决.这种转化的理论依据是:欲证 A 为真,但 A 包括多种可能的情况;如果能一一证明, A 在每一种情况下都为真,则可得命题 A 仅是真命题.在国际数学领域颇有声望的抽屉原理,在处理方法上,渗透的方法就是这种化整为零,分类出击的转化思想.再如人们推导余弦定理时,把坐标原点分别选择在三角形的三个顶点,而使问题获解,即三种情况 $\Leftrightarrow$ 定理成立.反过来有些类型的问题,局部不易思维,而着眼于整体,则往往茅塞顿开,易于把握.

例1 设 a, b, c 都是奇数,证明方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有有理根.

解析:这里依据问题提供的条件和结构特征,从整体上直入显然是非常困难的,这样化整为零促成问题的转化,是我们应有的思考.

假设有方程有有理根 $\frac{p}{q}$ (p, q 既约). 在此,可按 p, q 可能取的奇、偶分类,将 $\frac{p}{q}$ 代入方程有 $a(\frac{p}{q})^2 + b(\frac{p}{q}) + c = 0 \Rightarrow ap^2 + bpq + cq^2 = 0$

(i) 设 p, q 都为奇数,又 a, b, c 都是奇数,结合 $*$ 可得奇数+奇数+奇数=0 这里显然是不可能的.

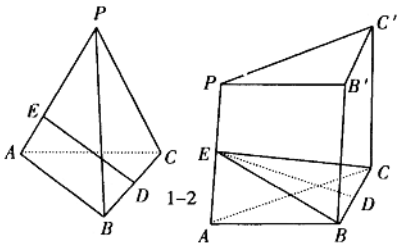
(ii) 设 p 为偶数, q 为奇数,结合 $*$ 有偶+偶+奇=0 这也是矛盾的.

(iii) 设 p 为奇数, q 为偶数,结合 $*$ 有左奇、右偶仍出现矛盾. 以此我们可以看到此题在上述每一类可能出现的情形中,都是矛盾的,则问题的整体上必然是矛盾的,即是说方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 在 a, b, c 都是奇数的条件下,不可能有有理根.

例2 如图1-2三棱锥 $P-ABC$ 中,已知 $PA \perp BC, PA=BC=l, PA, BC$ 的公垂线 $ED=h$,求证三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{6}l^2h$. (此题系87年全国高考理科试题)

解析:此题若从三棱锥 $P-ABC$ 直接入手是比较困难的,设若将所研究的对象三棱锥 $P-ABC$,补形为棱柱,使此三棱锥成为棱柱的一部分,而在此棱柱的体积是可求的,则三棱锥 $P-ABC$ 的体积也就不难得到.

如图1-2,以 $\triangle ABC$ 为底面,以 PA 为一条侧棱,将三棱锥 $P-ABC$ 补成三棱柱 $PB'C'-ABC$ 而



$\triangle_{\text{棱柱}} = lS_{\triangle EBC} = \frac{1}{2}l^2h$, 又 $V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3}V_{\text{三棱柱}}$, 所以有 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}l^2h$, 即此可得 $V_{\text{三棱锥 } P-ABC} = \frac{1}{6}l^2h$ 成立.

[评注]这里的两个问题,例1是整体向局部的转化,例2是局部向整体的转化,在例1中若直接从问题入手,想从整体上寻求问题的结论,可以说效果几乎为零.但是为我们作了整体向局部的转化后,尝试当即成功,立刻使思维启动,踏上了问题解答的征程.在例2中,若就事论事,轻率的考虑三棱锥,则会使解答的过程繁琐而苦不堪言.在此,我们将三棱锥补形为三棱柱,得以从整体上把握问题

解决的契机,可以说是非常漂亮的一招.从上述两个问题的解答过程,我们容易看到,整体与局部的转化在有些数学问题的解答中,是十分必要而有意义的.

2. 特殊与一般的转化

相对于一般而言,特殊的事物往往更为人们所熟悉.简单和直观,也更容易被人们所接受.因而可以通过特殊去认识一般.当一般的问题难以解决或较为复杂时,可以先退到特殊情况,然后由特殊问题的结论,排除不可能出现的结论,得出正确的结论,或者说由特殊问题的结论过渡到一般的结论.

例3 函数 $y=0.2^{-x}+1$ 的反函数是(C)

(A) $y=\log_5 x+1$ (B) $y=\log_5(x+1)$ (C) $y=\log_5(x-1)$ (D) $y=\log_5 x-1$

解析:注意到原函数与其反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称,若点 (a,b) 的原函数上的点时,则 (b,a) 必是反函数上的点,设点 $(0,2)$ 为原函数上的点,则 $(2,0)$ 是反函数上的点,将此代入题目提供的选项则(A),(B),(D)均被否定,故选(C)是当之无愧的.

例4 求证 $13^{25}>25!$

解析:用通常的求差(商)法难以奏效,洞察问题的结构特征,左边的指数为25,而右边是25的阶乘,左边的底数13又可表示为 $13=\frac{25+1}{2}$,这样原不等式可化为 $(\frac{25+1}{2})^{25}>25!$ 这一25的出现,使人们的思维可达及 $(\frac{n+1}{2})^n>n!$ ($n\in\mathbb{N}$,且 $n\geq 2$)这一般性的问题解决了,则 $(\frac{25+1}{2})^{25}>25!$ 也就在其中了.

$\because n\sqrt{n!}=n\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}<\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$ 将其两边 n 次方可得
 $n!<(\frac{n+1}{2})^n$. 结论是成立的,故此 $(\frac{25+1}{2})^{25}>25!$ 当然成立,亦即 $13^{25}>25!$ 得证.

[评注]这是两个特殊与一般相互转化的实例.在例3中,将一个一般性的问题退回到特殊情况思考,其结论当即明朗.可谓简单易行,别出心裁.这种投石问路的策略,实新颖而别致.在例4中,则又是将一个特殊问题一般化,这在表面上看来像是将问题有些复杂化,但其实这种复杂中孕育的是简单.正是这种一般问题的解决,带来了特殊问题的突破,因而这种转化仍是耐人寻味的,颇有意义的.

3. 隐性向显性的转化

对于一个数学命题,一般地都给出了一些明显的条件.但不可否认在有些命

题中并不是将条件全盘托出的,而是将其一部分隐匿在幕后,这无疑在人们解决问题的道路上竖起了一道屏障.而这样的问题,使其条件由隐蔽变得明显,由朦胧趋于具体,往往是问题得到突破的关键所在,也是必然的决策.

例5 已知不等式组 $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$ 的解集是不等式 $2x^2 - 9x + a < 0$ 解集的子集,则

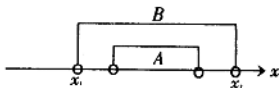
实数 a 的范围是 (C).

(A) $a > 9$ (B) $a = 9$ (C) $a \leq 9$ (D) $0 < a \leq 9$

解析: 设若不等式组的解集是 A , 不等式的解集是 B , 不难看到这两个条件都是隐蔽的, 一个隐蔽在不等式组中, 一个隐蔽在二次不等式中, 因而使这两个集合具体化, 明显化(主要指形式), 便成了问题的切入点.

解所给不等式组可得 $A = (2, 3)$, 再求解不等式 $2x^2 - 9x + a < 0$, 可得 $B = \{x | \frac{9 - \sqrt{81 - 8a}}{4} < x < \frac{9 + \sqrt{81 - 8a}}{4} \text{ 且 } a < \frac{81}{4}\}$, 由 $A \subseteq B$ 结合图 1-3, 可得

$$\begin{cases} \frac{9 - \sqrt{81 - 8a}}{4} \leq 2 \\ \frac{9 + \sqrt{81 - 8a}}{4} \geq 3 \end{cases} \quad \text{由此可得 } a \leq 9, \text{ 故选 (C).}$$



1-3

[评注] 在此题中, 条件可以说是很隐蔽的, 这无疑不利于问题的解答. 在此, 将条件明显化、具体化, 可以说是必然的策略. 于是我们求解了不等式组和二次不等式, 使所需条件得以显示. 进而充分调动题设中的显性条件, 使多种条件得以沟通, 促成了问题的解决. 在问题推进中我们引入了一个数轴, 直观的揭示 A 、 B 两个集合之间的关系, 对问题的解决还是帮忙不少.

4. 命题表述形式的转化

在有些类型的问题中, 命题的表述形式, 显得比较晦涩; 或者说过于强烈的反映了数学特征, 和人们习惯对问题的陈述模式, 拉开了较大的距离. 这样就使得条件和结论难以理清, 不易看清问题的本源. 当然思维就难以启动, 即使勉为其难地进行操作, 也是漫无目的, 不会有什么收获. 在此种情况下, 正如现代教育家 G·波利亚所说的“把问题重新表述一下(即变成一个等价的问题), 使它变得更熟悉, 更有吸引力, 更易于接近或更有希望解决”.

例6 用1,2,3,4,5这五个数字可以组成比20000大,并且百位上不是数字3的,无重复数字的五位数共有(B)

(A) 96

(B) 78

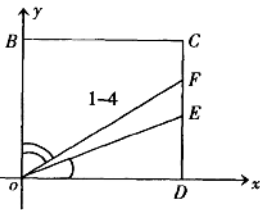
(C) 72

(D) 64

解析:此题的表述颇令人费解,一时难以理清两个制约条件对结构的影响。诚然,对意义含糊不清,问题的正确解答就是无稽之谈了。在此,若将原问题中的陈述修正为“用1,2,3,4,5这五个数组成五位数,要求最高位上不是1,百位上不是3的无重复数字的五位数只有()”这一改变就使问题就容易解决得多了,就使问题转化为人所熟知的“二不”问题。思维的闸门当即会启开,相应的解答方法也就形成,于是就有: $P_4^4 + P_3^1 P_3^1 P_3^1 = 78$,故选(B)。

[评注]此题在表述上似显得有些深奥,或者说距离人们的习惯说法有一定的距离,这就使得人们对条件的调用和结论的获取,缺少应有的自然和谐。也就使得条件和结论难以联系,难以统一。但当经过适当的修正后,问题仍是等价的,但其条件和结论之间的关系也就明显得多了,以此起步,问题就可有望解决,或者说,是容易解决的。

基于解答的需要,可变更条件或结论,使之和欲引进的数学知识和方法相呼应。例如有这样一个问题:如1-4图,已知正方形OBCD,E是CD之中点,F是CE的中点,用复数法证明, $\angle DOE = \frac{1}{2} \angle BOF$ 。



这里问题体现和反应的主要是复数辐角主值的概念。为使问题和棣莫佛定理呼应,可将

原结论中的 $\angle DOE = \frac{1}{2} \angle BOF$,改为 $2 \angle DOE =$

$\angle BOF$,这一使结论似乎不起眼的简单的局部性的改变,却诱发了人们把一个二倍角和复数的平方沟通的联想。这种局部性的问题结论的

转换(指形式),引导人们得以找到问题解决的契机。此题的具体解法可参看6.4节例1。

5. 模型转化

当面临的问题和我们所熟悉的原理有一定的距离,难以入手时,可对问题模型施以适当的转换,找到人们更为熟悉的模型和方法,促成问题的解决。

例7 若 $(z-x)^2 - 4(x-y)(y-z) = 0$,求证 $2y = z+x$ 。

解析:这里的条件所具有的形式,酷似一元二次方程的判别式,在此,我们不妨将这一等式模型,设法转化为方程模型,或许问题有望解决。