面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数及其应用

第二版

河北农业大学理学院

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

线性代数及其应用

第二版

河北农业大学理学院

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材，在第一版的基础上修订而成。本书以矩阵作为全书内容展开的主线，主要内容有：矩阵及其运算，行列式及矩阵的秩，n维向量组，线性方程组、矩阵的特征值问题，二次型，线性空间，应用实例选讲。附录为MATLAB简介。

本书可作为高等农林院校的教材，也可以作为经济管理类专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/河北农业大学理学院. —2版.
—北京:高等教育出版社,2006.11
ISBN 7-04-020051-1

Ⅰ.线… Ⅱ.河… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第116070号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 宋瑞才 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 吴文信
版式设计 陆瑞红 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 宋克学

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总　　机 010-58581000

经　　销 蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷 北京人卫印刷厂

开　　本 787×960 1/16
印　　张 15.5
字　　数 280 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版　　次 2001年7月第1版
2006年11月第2版
印　　次 2006年11月第1次印刷
定　　价 16.60元

物料号 20051-00

《线性代数及其应用》(第二版)编写人员

主　编　汪　雷　宋向东　贾　鹂

副主编　董　磊　郑国萍　赵广生　德　娜

参　编　白银凤　罗蕴玲　刘　斌　赵立强

　　　　许　莉　刘淑俊　刘峰涛　郑亚勤

　　　　王　斌　白荣凤　吕金凤

第二版前言

本书第二版保留了第一版的系统和风格及结构严谨、通俗易懂、理论与实际结合紧密、利于提高学生学习兴趣、培养学生应用数学解决实际问题的意识和能力等特点。同时为了更适应农林院校数学教学的需要，我们认真考虑了使用者及有关专家的意见和建议，在吸收当前数学教学内容改革中的先进成果的基础上对第一版中的某些章节进行了改写，主要是在第三章中增加了实 n 维向量空间一节，将第一版中有关实 n 维向量空间的内容简介集中到了一起，并作了进一步加深，增加了一些例题与练习题，目的是使学生对向量空间的基本概念有更深刻的理解。另外，还增加了每一章的内容小结，并对全书的习题和答案进行了再次审核。

本书第一版自2001年出版至今，得到了使用本书的教师和学生的广泛认同和支持，并提出了一些改进意见，指出了印刷上的错误，在此我们表示诚挚的谢意。第二版中一定还有错误和不足之处，希望读者继续提出批评指正。

高等教育出版社数学分社的同志们对本次修订工作给予了大力支持，对此我们表示衷心的感谢。

编　者

2006年2月

第一版序

同微积分学一样，线性代数也是高等院校普遍开设的一门基础性数学课程。与微积分学相比，线性代数更多地是从离散的角度研究客观世界的空间形式和数量关系。学习线性代数课程，无论是对于比较全面地培养学生的数学思维、提高数学素质，还是为进一步学习其他课程打下基础，都有着不可替代的重要意义。特别是随着计算机科学的发展，数字化处理技术渗透到科学的各个分支，学习线性代数的意义就更为突出。

为了帮助学生更好地掌握线性代数的基本知识和基本思想，一部好的教材是至关重要的。尤其是对于非数学专业的大学生，如何适应不同专业的需要，在不多的学时之内，精心选取教学内容，使其既能体现线性代数的基本思想，保持一定的系统性和完整性，又能紧密结合应用背景，有利于学生“用数学”的意识和能力的培养，即我们通常所说的融科学性、实用性于一体，都需要担任线性代数课程的教师们在认真总结多年来的教学经验和教改成果的基础上，付出艰辛的劳动，作进一步的思考和探讨。河北农业大学等校编写的这本《线性代数及其应用》，就是在这一指导思想下，通过执行教育部组织的“面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”项目所取得的一项重要成果。

这部教材在内容编排上有许多特点，突出的一点是把矩阵作为全书展开的主线。开篇第一章就是矩阵，以后各章都是以矩阵为线索展开讨论。行列式看成 n 阶方阵按一定规则对应的数；而行列式又用于讨论有关矩阵的最主要的概念“秩”。n 维向量当然也是特殊的矩阵(行矩阵或列矩阵)。通过向量的线性相关性的讨论，又建立起向量组的秩与矩阵的秩的联系。线性方程组的讨论中广泛地应用了有关矩阵和向量的结论，线性方程组的结果又用于研究矩阵的特征值与特征向量。二次型的讨论则完全是又一种特殊矩阵(对称方阵)在正交变换下的性质的研究。这样，就以矩阵为线索把线性代数串成了一个整体，而不是联系不紧密的各个章节的拼合。这种编排适应了现代数学发展的潮流，同时也有利于引导学生抓住矩阵这根主线，深入地理解线性代数的精神实质，从而有利于学习和掌握这门课程。

这部教材十分注意以严谨的语言，清晰而准确地叙述线性代数的基本内容。在不大的篇幅下，所有定理均给出了证明(有的教材对某些证明采用“从略”的做法，容易给学生造成知识不够完整的印象)。同时，非常注意把典型问题的解法讲透，并辅之以详尽的例题，引导和启发学生切实掌握基本的解题步

骤和技巧。

该书的另一个显著特点是十分注意突出线性代数的应用背景，每个重要的基本概念都在一定的比较直观的几何或其他方面应用背景下引出；除各章穿插了一些实例外，还专门编写了“应用实例”一章，使学生充分看到了线性代数的广泛用途，有利于增强学生的学习兴趣。此外，本书略去了许多教材中都包含的某些计算内容，而以附录的形式介绍了 MATLAB 软件，说明线性代数的计算问题，可以借助计算机来解决，这种做法既避免了教材篇幅的过于冗长，又符合现代数学中重视数学建模与计算机应用的思想。

这部教材不仅适用于农林院校，也适用于其他各类院校的非数学专业。相信它的出版，会对推动高等院校线性代数课程的改革起到良好的作用。

安幼山

2001 年春于北京

第一版前言

本书是教育部高教司[1996]61号文件批准立项的“高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”的04－6课题的研究成果。

按照教育部制定并实施的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的目标和要求，河北农业大学作为04－6课题组成员，对“线性代数”这门课程的改革进行了研究与实践。在原有教材《线性代数》的基础上，根据兄弟院校四年来的使用情况以及新世纪高等农林教育发展的需要，在征求了多方意见之后，河北农业大学联合四川农业大学、新疆农业大学、北京农学院、河北职业技术师范学院等院校对初稿进行了较大的调整、补充和完善，并将书名定为《线性代数及其应用》，形成了现在这本“面向21世纪课程教材”。

在编写这本教材时，我们努力在概念与理论、方法与技巧、实践与应用这三方面作出较为合理的安排。在内容的深度和广度上力求适应农科、工科、经济等不同专业使用，并考虑了非数学类硕士生入学考试的需要；在语言表述上力求严谨简明，注意突出了矩阵的概念，并增加了几何直观的解释。另外，本书增加了“应用实例选讲”一章，目的是提高学生学习兴趣，增强学生应用数学知识解决实际问题的能力。结合非数学专业学生的实际情况，我们删除了数值计算的内容，增加了附录MATLAB简介，以便使学生掌握最先进、最方便的计算手段。

本书基本内容可以用30—40学时讲授，带“*”号的章节可以供不同专业选用。在习题的编排上分为A组和B组，其中A组中包含了对农林类本科学生的基本要求，B组中包括更广泛的题型供读者选用。

在本书出版的时候，我们衷心感谢教育部适时地、富有远见地推出了“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”，为农林类本科数学教学改革指明了方向，也为我们提供了参与的机会。

我们衷心感谢农业部教学指导委员会数学组成员安幼山教授，他在百忙中为本书审稿，提出了很多前瞻性的指导意见和许多具体的修改建议，为本书增色不少。我们还要感谢农业部教学指导委员会和04－6课题组给予的支持和鼓励，感谢河北农业大学教务处、理学院、数学教研室给予的支持和帮助。

高等教育出版社有关的同志们对本书的出版给予了极大的支持，对他们的工作，我们表示由衷的敬意。

由于编者水平所限，本书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2000年12月

郑重声明

反盗版举报电话:(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真:(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址:北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编:100011

购书请拨打电话:(010)58581118

目　录

第一章　矩阵及其运算

矩阵是线性代数这门课程贯穿始终的主要研究工具，其本身也是线性代数的主要研究对象之一．矩阵可以把一组相互独立的数用一张数表的形式联系起来，看成一个整体，并用它来参与运算，可以使原来杂乱无章的、甚至是非常庞大的数据变成简单的有序表示．矩阵在工业、农业、经济等许多领域有着广泛的应用，尤其是计算机普及后，矩阵更是被运用到物理学、力学、化学、生物学、遗传学、医学等众多学科中．

矩阵(matrix)这个词是1850年英国数学家 Sylvester 首先提出来的．

本章主要介绍矩阵的概念及其运算．

§1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵的概念

例 1.1　对于三元一次方程组

$$\begin{cases} 0.4x_1+0.25x_2+0.45x_3=31.5 \\ 0.1x_1 \qquad\qquad\quad + 0.2x_3=5 \\ 0.5x_1+0.75x_2+0.35x_3=63.5 \\ \quad x_1+\qquad x_2+\qquad x_3=100 \end{cases}$$

我们要解决的问题是：这个方程组有没有解？如果有解，是有唯一解，还是有无穷多解？今后我们将看到，这一问题的解决要依赖于下面的矩形数表：

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.25 & 0.45 & 31.5 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 5 \\ 0.5 & 0.75 & 0.35 & 63.5 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \end{pmatrix}.$$

易见，上面数表是由方程组中未知量的系数及方程右端常数项按一定顺序排成的，称为一个矩阵．

一般地，我们有

定义 1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵. 组成矩阵的每一个数称为矩阵的**元**，横的各排称为**行**，纵的各排称为**列**. a_{ij}称为第 i 行第 j 列的元. 元是实数的矩阵称为**实矩阵**，元是复数的矩阵称为**复矩阵**，在本书中除了特别说明外，矩阵都是实矩阵.

通常用黑斜体大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 等表示矩阵. (1.1)可以用 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$表示.

当 $m=n$ 时，矩阵称为 n 阶**方阵**或 n 阶矩阵，记为 $\boldsymbol{A}_n$.

当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为**行矩阵**；当 $n=1$ 时，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**. 行矩阵或列矩阵又称为**行向量**或**列向量**，统称为**向量**(vector). 向量中所含元的个数称为向量的**维数**(dimension). 例如上述 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 维行向量，$\boldsymbol{B}$ 是一个 m 维列向量. 向量也可以用黑斜体小写字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}$ 等. 关于向量的详细研究将在第三章中进行.

元全为零的矩阵称为**零矩阵**，用记号 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$ 表示.

在方阵中，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线位置上的元简称为**对角元**. 主对角线一侧所有元都为零的方阵称为**三角形矩阵**. 三角形矩阵有两种，称

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为**上三角形矩阵**；称

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为**下三角形矩阵**.

主对角线以外的元全为零的方阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称为**对角矩阵**(diagonal matrix)，简称**对角阵**，也可以记为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

主对角线上元都为 1 的对角阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

称为**单位矩阵**(identity matrix)，简称**单位阵**，并约定用记号 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$ 表示.

对角线上元为相等实数的对角阵

$$\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$$

称为**数量矩阵**(scalar matrix).

1.1.2 矩阵与线性映射

在线性代数中，常考虑 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 与 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之间的关系：

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \qquad\qquad\vdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$表示实数或复数，上式可以缩写为

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

如上形式的从变量组 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 到变量组 y_1，y_2，$\cdots$，y_m 的映射叫做**线性映射**，当 $m=n$ 时也称为**线性变换**. 其中