21世纪高校学习指导丛书

chang wei fen fang cheng xue xi zhi dao

常微分方程学习指导

杨作东 编著

南京师范大学出版社

21 世纪高校学习指导丛书

常微分方程学习指导

杨作东 编著

南京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程学习指导 / 杨作东编著．—南京：
南京师范大学出版社，2005.5
ISBN 7-81101-172-7/O·27

Ⅰ．常… Ⅱ．杨… Ⅲ．常微分方程—师范大学—教学参考资料 Ⅳ．O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 049281 号

书　　名	常微分方程学习指导
编　　著	杨作东
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press.njnu.edu.cn
E — mail	nspzbb@njnu.edu.cn
照　　排	江苏兰斯印务发展有限公司
印　　刷	南京玉河印刷厂
开　　本	787×1092　1/24
印　　张	8
字　　数	179 千
版　　次	2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-81101-172-7/O·27
定　　价	14.00 元

目　　录

第一章　初等积分法

1. 基本概念

含有一个自变量 x 和它的函数 y 以及这个函数的一阶导数 y' 之间的形式如下的关系式

$$F(x,y,y')=0 \quad (y'=\frac{dy}{dx}) \tag{1}$$

叫做一阶常微分方程. 在某种条件下，它确定变量 y' 为变量 x,y 的单值隐函数. 这时微分方程 (1) 等价于形如

$$y'=f(x,y) \tag{2}$$

的微分方程. 若可微函数 $y=\phi(x)$ 在 x 的某一变化区间上使得

$$F[x,\phi(x),\phi'(x)]=0 \text{ 或 } \phi'(x)=f[x,\phi(x)]$$

成为恒等式，则称 $y=\phi(x)$ 为微分方程 (1) 或 (2) 的解 (也称积分或积分曲线).

若隐函数方程

$$\Phi(x,y,C)=0 \tag{3}$$

当常数 C 在某一确定的区域取值时，由此函数方程解出 y 所得到的一些可微函数 $y=\phi(x)$ 是方程 (1) 或 (2) 的积分，则称函数方程 (3) 为微分方程 (1) 或 (2) 的通解或通积分.

一阶微分方程 (2) 的初始条件为 $y(x_0)=y_0$ 或 $y|_{x=x_0}=y_0$. 求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题或哥西问题.

2. 一阶微分方程的几种可积类型

(I) 变量可分离方程

形如

$$y'=f(x)g(y) \tag{4}$$

的一阶微分方程称为变量可分离方程. 这种方程的特点是: 右端为只含 x 的函数与只含 y 的函数的乘积.

如果函数 $f(x),g(y)$ 在区域 R 上连续且 $g(y)\neq 0$, 那么分离后两端积分, 即得方程 (4) 的通积分

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

或

$$G(y)=F(x)+C$$

其中 $G(y)$ 与 $F(x)$ 分别是 $\dfrac{1}{g(y)}$ 与 $f(x)$ 的某一原函数, C 为任意常数. 方程 (4) 的通解为

$$y=G^{-1}(F(x)+C) \tag{5}$$

其中 G^{-1} 表 G 的反函数. 而适合初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的解为

$$y=G^{-1}[F(x)+G(y_0)-F(x_0)]$$

如果 $g(\eta)=0$, 则方程 (4) 除解 (5) 外, 还有解 $y=\eta$.

(II) **可化为变量可分离方程**

1) $y'=f(ax+by+c)$. 如果 $b=0$, 方程 $y'=f(ax+c)=F(x)$ 就是变量可分离方程; 如果 $b\neq 0$, 利用变换 $z=ax+by+c$ 即得变量可分离方程

$$\frac{dz}{dx}=bf(z)+a$$

当 $bf(z)+a\neq 0$ 时, 其通积分为

$$\int\frac{dz}{bf(z)+a}=x+C$$

代回原变量 y, 即得原方程的通积分.

2) 齐次方程

$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{6}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 可将方程 (6) 化为变量可分离方程

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

若 $f(u) - u \neq 0$, 用分离变量法可求得它的通积分

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|\frac{x}{C}|$$

代回原变量即得 (6) 的通积分. 如果 $f(\frac{\eta}{\xi}) = \frac{\eta}{\xi}$, 则 $y = \frac{\eta}{\xi}x$ 是方程的解.

3) 可化为齐次方程的类型

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}) \tag{7}$$

其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 都是常数.

我们分三种情形来讨论:

(a)$c_1 = c_2 = 0$ 的情形.

这时方程 (7) 属于齐次方程，事实上，我们有

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}) = f(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}) = g(\frac{y}{x})$$

因此，只作变换 $u = \frac{y}{x}$, 则方程就化为变量可分离方程.

(b)$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ 的情形.

这时方程可化为

$$y' = f(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}) = g(a_2x + b_2y)$$

令 $a_2x+b_2y=u$, 则方程化为

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2g(u)$$

这是变量可分离方程.

(c) $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 及 c_1,c_2 不全为零的情形.

这时方程 (7) 右端 f 内的分子、分母都是 x,y 的一次式，因此

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \tag{8}$$

代表 xOy 平面上两条相交的直线，设交点为 (α,β).

显然，$\alpha\neq 0$ 或 $\beta\neq 0$. 否则 $\alpha=\beta=0$, 即交点为坐标原点，那么必有 $c_1=c_2=0$, 这正是情形 (a). 令 $X=x-\alpha, Y=y-\beta$, 则 (8) 化为 $a_1X+b_1Y=0, a_2X+b_2Y=0$. 从而 (7) 变为

$$\frac{dY}{dX}=f(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y})=g(\frac{Y}{X})$$

此变为齐次方程，利用变换 $u=\frac{Y}{X}$ 求解，最后代回原变量即可得原方程 (7) 的解.

(III) **一阶线性方程**

一阶线性方程的一般形式是

$$y'=p(x)y+q(x) \tag{9}$$

式中 $p(x),q(x)$ 是某区间 $[a,b]$ 上的已知连续函数．先用分离变量法求出齐次方程

$$y'=p(x)y$$

的通解，再用常数变易法求得非齐次方程 (9) 的通解是

$$y=\exp(\int p(x)dx)(\int q(x)\exp(-\int p(x)dx)dx+C)$$

而满足初始条件 $y(x_0) = y_0(a \le x_0 \le b)$ 的解为

$$y = \exp(\int_{x_0}^{x} p(s)ds)(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)\exp(-\int_{x_0}^{s} p(t)dt)ds)$$

(IV) **伯努利方程**

$$y' = p(x)y + q(x)y^n \quad (n \ne 0, 1) \tag{10}$$

利用未知函数代换 $z = y^{1-n}$, 可将方程 (10) 化为一阶线性方程

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)p(x)z + (1-n)q(x)$$

解出 z, 再换回原变量就得到方程 (10) 的通解

$$y^{1-n} = \exp((1-n)\int p(x)dx)[C + (1-n)\int q(x)\exp((n-1)\int p(x)dx)dx]$$

(V) **全微分方程与积分因子**

1) 全微分方程

形如

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{11}$$

的微分方程，如果左端恰为某二元函数 $U(x,y)$ 的全微分，即

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

则称 (11) 是全微分方程或恰当方程，而函数 $U(x,y)$ 称为微分方程的原函数. 在这种情况下，方程 (11) 可写为 $dU = 0$, 因而得通积分

$$U(x,y) = C$$

其中 C 为任意常数.

如果 M, N, M_y, N_x 在某一个单连通区域 G 内有定义并且连续，则微分方程 (11) 为全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{12}$$

当方程 (11) 满足条件 (12) 时，方程 (11) 的通积分可表为

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C$$

或

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C$$

2) 积分因子

若函数 $\mu(x,y) \neq 0$, 使得方程

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$$

成为全微分方程. 即存在函数 $U(x,y)$, 使得

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = dU$$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程 (11) 的积分因子. 函数 $\mu(x,y)$ 为积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

或

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = (\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})\mu \tag{13}$$

这是一个以 μ 为未知的一阶线性偏微分方程，它的解是存在的，也就是说，方程 (11) 的积分因子是存在的. 在一般情况下，通过解方程 (13) 来求积分因子将比求解方程

(11) 本身更难. 但是，在若干特殊情形中，求 (13) 的一个特解还是容易的，从而给出下面定理：

定理 1.1. 方程 (11) 有只与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$$

并且有一个积分因子为

$$\mu=\exp(\int\psi(x)dx)$$

定理 1.2. 方程 (11) 有只与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\phi(y)$$

并且有一个积分因子为

$$\mu=\exp(\int\phi(y)dy)$$

(VI) **变量替换法**

1) 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 的方程

对于这种类型的方程，引入新变量

$$z=ax+by+c$$

则原方程化为一个变量可分离的方程：

$$\frac{dz}{dx}=a+bf(z)$$

例. 求初始问题

$$\frac{dy}{dx}=1+(y-x)^2,\ \ y(0)=\frac{1}{2}$$

的解.

解: 引入变量 $z=y-x$, 将原初始问题转化为

$$\frac{dz}{dx}=z^2,\ \ z(0)=\frac{1}{2}$$

这是一个变量可分离方程的初始值问题，该问题的解为

$$y=x+\frac{1}{2-x}$$

2) 形如 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的方程

引入变量 $z=xy$, 则 $y=\dfrac{z}{x},dy=\dfrac{xdz-zdx}{x^2}$, 原方程可以化为

$$\frac{z}{x}(f(z)-g(z))dx+g(z)dz=0$$

这是一个变量可分离的方程.

例. 求方程

$$(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$$

的通解.

解: 令 $z=xy$, 则 $dz=xdy+ydx$, 代入原方程整理后得

$$z(1+z)dx+(1-z)(xdz-zdx)=0$$

对上式分离变量得

$$\frac{2dx}{x}+\frac{1-z}{z^2}dz=0$$

积分得

$$\ln x^2-\frac{1}{z}-\ln|z|=C$$

则原方程的通解为

$$\ln|\frac{x}{y}| - \frac{1}{xy} = C$$

3) 形如 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + f(xy)$ 的方程

例. 求方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + 4x^2y^2 + 1 = 0$$

的通解.

解: 引入变换 $z = xy$, 则方程化为关于 z 的变量可分离方程:

$$\frac{dz}{dx} = -x(1+4z^2)$$

解之，再代回，可得到原方程的通解

$$y = -\frac{1}{2x}\tan(x^2 + C)$$

4) 形如 $\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)e^{ay}$(常数 $a \neq 0$) 的方程

令 $z = e^{ay}$，便得到关于 z 的伯努利方程:

$$\frac{du}{dx} = ap(x)u + aq(x)u^2$$

例. 求方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(x^2e^y - 1)$$

的通解.

解: 引入变换 $z = e^y$, 则方程化为关于 z 的伯努利方程:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}(x^2u^2 - u)$$

解之，再代回，可得到原方程的通解

$$y = -\ln(Cx - x^2)$$

5) 形如 $\dfrac{dy}{dx} = xf(ax + b\dfrac{y}{x}) + \dfrac{y}{x}$ 的方程

令 $z = \dfrac{y}{x}$, 则方程化为 1) 的类型：

$$\frac{dz}{dx} = f(ax + bz)$$

例. 求方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)^2 + y}{x}$$

的通解.

解：此方程可改写为：

$$\frac{dy}{dx} = x(x + \frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}$$

经变换 $u = \dfrac{y}{x}$ 可化为

$$\frac{du}{dx} = (x + u)^2$$

这是一个可化为齐次方程的方程. 解之，再代回，可得到原方程的通解

$$y = x\tan(x + C) - x^2$$

6) 形如 $\dfrac{dy}{dx} = lx\sqrt{ax^4 + bx^2 + cy}$ (其中 $a > 0, b, c, l$都是常数) 的方程

令 $t = x^2$, 得

$$2\frac{dy}{dt} = l\sqrt{at^2 + bt + cy}$$

再令 $u = \sqrt{at^2 + bt + cy}$. 于是，

$$\frac{du}{dt} = \frac{2at + \frac{cl}{2}u + b}{2u}$$

这是一个可化为齐次方程的方程.

例. 求方程

$$\frac{dy}{dx}=6x\sqrt{x^4+y}$$

的通解.

解: 按照上面的作法，可将方程化为齐次方程:

$$\frac{du}{dt}=\frac{2t+3u}{2u}$$

解之，再代回，可得到原方程的隐式通解

$$(\sqrt{x^4+y}-2x^2)^4(2\sqrt{x^4+y}+x^2)=C$$

7) 形如 $\frac{dy}{dx}=ay^l+bx^{\frac{l}{1-l}}$ (其中 a,b,l都是常数, $abl\neq 0, l\neq 1$) 的方程

令 $y=u^m, m$ 待定，得

$$\frac{du}{dx}=\frac{au^{ml}+bx^{\frac{l}{1-l}}}{mu^{m-1}}$$

若取 m 使得 $ml=m-1$, 即 $m=\frac{1}{1-l}, m-1=\frac{l}{1-l}$, 则方程化为

$$\frac{du}{dx}=(1-l)a+\frac{(1-l)bx^{\frac{l}{1-l}}}{u^{\frac{l}{1-l}}}$$

这是一个齐次方程.

例. 求方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$$

的通解.

解: 这里 $l=2\frac{l}{1-l}=-2$, 因此我们取 $m=-1$, 通过变换 $y=\frac{1}{u}$, 方程变为齐次方程:

$$\frac{du}{dx}=2(\frac{u}{x})^2-1$$

解之，再代回，可得到原方程的通解

$$y = \frac{1-2Cx^3}{x+Cx^4}$$

另解：观察出原方程有一特解 $y = \frac{1}{x}$. 因此作变换

$$y = u + \frac{1}{x}$$

于是原方程化为贝努利方程

$$\frac{du}{dx} = u^2 + \frac{2}{x}u$$

解之，再代回，同样可得到原方程的通解.

3. **一阶隐式微分方程**

一阶隐式方程的一般形式是

$$F(x, y, y') = 0 \tag{14}$$

1) y' 的 n 次多项式类型

如果方程 (14) 的左边是

$$F(x, y, y') = A_n(x, y)(y')^n + A_{n-1}(x, y)(y')^{n-1} + \cdots + A_0(x, y) = 0 \tag{14'}$$

设 (14') 有 k 个根 $(k \le n)$

$$y' = f_1(x, y),\ \ y' = f_2(x, y), \cdots, y' = f_k(x, y) \tag{15}$$

则方程 (14') 的求解问题可归结为显式方程 (15) 的求解问题.

2) 几种简单类型

(a) 方程不显含 y 的情形

$$F(x, y') = 0 \tag{16}$$

若从方程 (16) 中可解出 y', 直接积分求解; 若从方程 (16) 中可解出 $x=\phi(y')$, 令 $y'=p$, 将 p 视为参数，于是 $y=\int p\phi'(p)dp+C$.

如果方程 (16) 的参数形式为 $x=\phi(t)$, $p=\psi(t)$, 则方程 (16) 的通解参数形式为

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\int \psi(t)\phi'(t)dt+C \end{cases}$$

这里 t 为参数.

(b) 方程不显含 x 的情形

$$F(y,y')=0 \tag{17}$$

如果将 x 当作 y 的函数， $\dfrac{dy}{dx}=(\dfrac{dx}{dy})^{-1}$, 则方程 (17) 就化为类型 (a).

若在 (17) 中令 $y'=p$, 解出 $y=\phi(p)$, 则方程 (17) 的通解参数形式为

$$\begin{cases} y=\phi(p) \\ x=\int \frac{\phi'(p)}{p}dp+C \end{cases}$$

这里 p 为参数.

若用参数方程 $y=\phi(t), y'=\psi(t)$ 代替 (17), 则得到

$$\begin{cases} y=\phi(t) \\ x=\int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt+C \end{cases}$$

这里 t 为参数.

3) 隐式方程的一般形式

将 (14) 看成 (x,y,y') 空间的曲面，则参数形式为

$$x=\phi(u,v),\ \ y=\psi(u,v),\ \ y'=\kappa(u,v)$$