应用图论
及网络优化方法

蒋绍忠

赠阅

浙江大学管理工程系

一九八四·六

实用图论及网络优化

前 言

自然界和人类社会中，事物以及它们之间的联系可以用图形来表示。例如若干个城市由公路连接成交通网络，原子由化学键结合成分子，电子元件由导线连接成电路，有亲戚关系的一群人组成一个家族等等。这些事物，如城市，原子，电子元件，人，都可以表示为一个点，我们称之为"顶点"，而它们之间的联系，如公路，导线，化学键，亲戚关系，则可以表示为连接相应顶点的"边"。这样，我们所涉及的一类事物以及它们的相互关系，就可以表示为由这些顶点和边组成的一个"图"。在这样抽象出来的图中，顶点和边失去了诸如大小，长短，位置，形状这些"几何"性质，而仅剩下唯一的"图论"性质，就是两顶点之间存在连接边还是不存在边，仅此而已。

图论就是研究这种抽象的图的基本概念和理论的科学。

图论是一门内容丰实而饶有趣味的学科。近二三十年来，图论在其理论得到迅速发展的同时，它的应用也日益广泛，已成为引人注目的综合性应用学科之一。图论以其特有的直观的表达方式和严密的分析方法，为自然科学，工程技术，经济管理以及社会问题的分析研究提供了有用的工具。

近年来图论的应用之所以能得到如此迅速的发展，是和计算机的广泛应用分不开的。借助于大容量和高速的计算机，用图论的方法解决那些大规模的图与网络分析问题不仅成为可能，而且显示了极大的生命力。

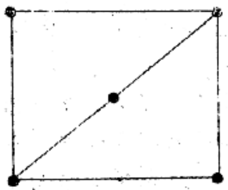
图论是一门古老的学科。在其发展的初期，经历过漫长而缓慢的发展过程，其间经历过以下几个重要的里程碑：

第一篇用图的方法解决问题的论文是著名瑞士数学家欧拉（Euler）于1736年发表的关于哥尼斯堡七座桥问题的论文

（详见第二章）。这是第一次将一个"实际问题"抽象成图的问题，然后用图的方法加以解决的最早范例。由于Euler的这一论文，他被公认为图论的创始人。

第二个里程碑是在以上欧拉的论文发表约一百年以后。1845年，G.R.Kirchhoff提出了电路分析中的两个重要定律，即Kirchhoff电压定律和电流定律。根据这两个定律，对于电路中的任一环路，均可列出一组电网络方程；但列出所有可能的环路的电网络方程是不必要的，因为这样列出的方程中，其中一些方程是不独立的。如何选取环路以获得独立的方程？Kirchhoff提出了树的概念，并在此基础上解决了以上问题。Kirchhoff的工作尽管是面向电网络的分析，但他的分析方法却对图论的发展有重大影响。

下一个刺激图论发展的是英国数学家Hamilton勋爵（Sir, W.R.Hamilton）1857年发明的一种游戏（详见第二章）。他制作了一个正十二面体，在它的二十个顶点上分别标上世界上二十个大城市的名称，每一条连接两个顶点的棱作为一条航线，他要求人们作为旅行者，从其中一个城市出发，设计一条旅游路线来周游世界。这个游戏要求这条路线要走遍每一个城市，而且经过每一个城市仅一次（出发点除外）并且最后又回到出发点。据说，哈密尔顿勋爵还把这个玩具以25基尼金币卖给了一个玩具商。当然，这个游戏本身并不难玩，但它诱发了人们去寻找各种各样的图中的类似闭合路径（我们称为Hamilton圈）的兴趣。人们发现，并不是任何图都可以找得出这样的闭合环路来的（很明显，例如下图就不可能存在这样的闭合环路）。那末，一个图应具备哪些条件，才能得到这样的闭合环路呢？人们为解决这一问题付出了巨大的努力，但至今为止，一个图存在Hamilton圈的充分必要条件仍未找到。尽管如此，人



们的这些努力却揭示了图的许多重要性质，推动了图论的发展。

与此同时，图不仅用来做游戏，也被用于严肃的科学研究。1857年英国数学家A.Cayley用树的概念来研究烃类化合物的同分异构体的种数问题。Cayley的工作，无论从其方法、结论还是从将图与其他科学领域的问题相结合这方面来讲，都是具有深刻影响的。

图论发展的第五个里程碑，是一个富于戏剧性的论题。这就是所谓"四色问题"。1850年英国人Guthrie在给De Morgan的信中，声称他只要用四种颜色，就能给任何一种地图着色，使其中相邻的国家都有不同的颜色。一百多年来，许多数学家对该命题深感兴趣，一代接一代地为证明或否定这一命题而努力。1879年，Kempe提出了第一错误的"证明"。1890年Heawood发现了Kempe的错误，并指出，Kempe的证明对五色问题是正确的。1976年Ore和Stemple证明，对少于40个国家的地图来说，四色问题是肯定的。这个问题的最终解决，是1976年美国K.Appl. W.Haken, J.Koch用电子计算机运行1200小时，作了近一百亿次判断后，证明四色问题是肯定的。当然，仍有许多学者对这个悬而未决近百年的问题以这样的方式宣告终结感到震惊。

首次将图论从理论上作完全、系统的论述，则应归功于匈牙利数学家O.König在1936年的专著《有限图与无限图的理论》。从1736年Euler发表关于哥尼斯堡七桥问题的论文到1936年König的著作发表这二百年，是图论从诞生到成熟的漫长发展历程。

在这二百年中，图论的发展的间歇的、零散的。各个发展

里程碑之间并不存在明显的联系。但到了二十世纪中期，图论的理论和应用研究进入了一个蓬勃、飞速发展的时期。近二十年中，图论的专著已出版近百册，每年发表的论文超过百篇，国际上定期举行图论及其应用的学术讨论会。预期这种发展的势头今后仍将盛行不衰。

目前，图论及其应用已普遍到以下一些方面：

- 电网络分析，电路的计算机辅助设计。
- 印刷电路和集成电路的布线设计。
- 通讯网络、交通网络的分析和设计。
- 生产系统模拟，工序流程的评价和设计。
- 研究量子统计力学（李振道、杨振宁）。
- 用有向图模拟计算机系统。
- 求解整数规划和其他一些运筹问题。
- 成为研究马尔可夫过程的一种手段。
- 模拟高分子链的物理化学特性。
- 构造心理学、神经生理学的模型。
- 模拟经济供求关系，模拟商品流通网络。
- 研究能流转换、运输、分配、消耗系统。

这本讲义，是为管理工程专业研究生编写的，侧重于图论的一般概念、主要理论，图及网络分析在运筹问题中的应用以及图及网络的优化算法这几部分。讲义是在为81、82两届研究生讲课的讲稿基础上整理而成，加添了一些内容，可供30～40学时教学之用。主要参考书：

(1) Narsingh Deo: Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science

(2) 王朝瑞：图论　(3) 陈树柏等：网络图论及其应用

(4) M. N. S. Swamy, K. Thulasiraman: Graph, Networks, and Algorithms

第一章 导论

§1—1 图(Graph)

图由顶点集合(Vertex set)、边集合(Edge Set)以及顶点和边的对应关系三部分组成。例如在图1—1的图G中，

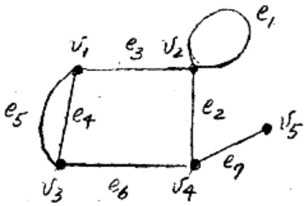


图 1—1

顶点集合

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

边集合

$$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

其中每一条边都有两个相应的顶点：

$$e_k=[v_i, v_j]^{*}$$

称边 e_k 与顶点 v_i, v_j 相关联(incident)，图1—1中，边与顶点的对应关系

$$\Psi=\left\{\begin{array}{l} e_1=[v_2, v_2] \\ e_2=[v_2, v_4] \\ e_3=[v_1, v_2] \\ e_4=[v_1, v_3] \\ e_5=[v_1, v_3] \\ e_6=[v_3, v_4] \\ e_7=[v_4, v_5] \end{array}\right\}$$

* 本讲义中，方括号[ ]表示无向边，圆括号( )表示有向边，图论中认为，任何一条边都具有两个顶点(可以是相全的两个顶点)，不存在没有顶点的边。

通常将图记为 $G=(V, E, \psi)$，有时简记为 $G=(V, E)$。

如果 $e_K=[V_i, V_j]$，$e_S=[V_i, V_j]$，$k\neq S$，则称 e_k、e_S 为平行边（parallel edges）。例如 e_4，e_5。

如果 $e_l=[V_i, V_i]$，则称 e_l 为顶点 V_i 上的环（loop），例如 e_1 。

既无平行边，又无环的图称为简单图。

与 V_i 关联的边的个数称为顶点 V_i 的度数（degree）。记为 $d(V_i)$。对于环，则边数要重复计算一次。例如，图 1—1 中 $d(V_2)=4$。

度数为 1 的顶点称为悬挂顶点（Pendant vertex），与悬挂顶点关联的边称为悬挂边（Pendant edge）。

度数为零的顶点称为孤立点（isolated vertex）。

所有顶点全为孤立点的图称为零图（null graph），零图常记为 N。

没有任何顶点（当然也没有任何边）的图称为空图（empty graph），空图常记为 Φ。

图中顶点的个数常记为 n，边的个数常记为 e 也可以分别记为 $|V|$ 以及 $|E|$ 。

定理 1—1 $\sum\limits_{V_i\in G} d(V_i)=2e$

证明：显然。 ▌

如果 $d(V_i)$ 为奇数，则 V_i 称为奇顶点（odd vertex），如果 $d(V_i)$ 为偶数，则 V_i 称为偶顶点（even vertex）。

定理 1—2 在任何图 G 中，奇顶点的个数必定是偶数。

证：$\sum\limits_{V_i\in G} d(V_i)=\sum\limits_{V_j\text{为o.v.}} d(V_j)+\sum\limits_{V_k\text{为e.v.}} d(V_k)$

其中左边的表达式必为偶数（$=2e$），而右边的第二项必为偶数，因此 $\sum\limits_{v_i 为奇} d(v_i)$ 必为偶数，但该和式中每一项均为奇数，因而其项数必为偶数。∎

§1—2 图的同构（isomophism）

定义 1—1 如果图 $G_1=(V_1, E_1, \psi_1)$，$G_2=(V_2, E_2, \psi_2)$ 中，V_1 和 V_2 之间存在元素之间的一一对应的映射，E_1 和 E_2 之间也存在元素之间的一一对应映射，且以上两个映射关系满足 $\psi_1=\psi_2$，则称 G_1 和 G_2 是同构的。

例如，图 1—2（a）和（b）两个图是同构的，因为两个

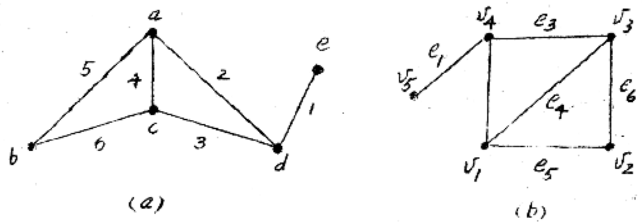


图 1—2

图中存在顶点及边的一一对应映射

$$V_1=\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow V_2=\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix}, \quad E_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow E_2=\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix}$$

并且在这两个映射下，

$$\psi_1=\begin{cases}1=(d,e)\\2=(a,d)\\3=(c,d)\\4=(a,c)\\5=(a,b)\end{cases}\equiv\psi_2=\begin{cases}e_1=(v_4,v_5)\\e_2=(v_1,v_4)\\e_3=(v_3,v_4)\\e_4=(v_1,v_3)\\e_5=(v_1,v_2)\end{cases}$$

同构的判断有时是很困难的。例如，图1——3中每一行中的几个图都是同构的。

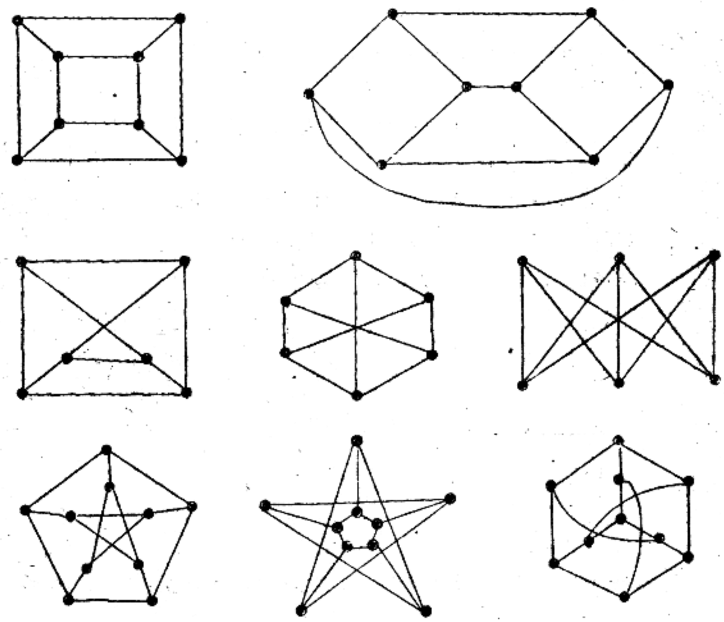


图 1—3

两个图同构的必要条件是

1．有相同个数顶点；

2．有相同个数边；

3．给定度数的顶点个数相同。

显而易见，这些条件是不充分的，如有以下简单的反例：

(a)　　　　(b)

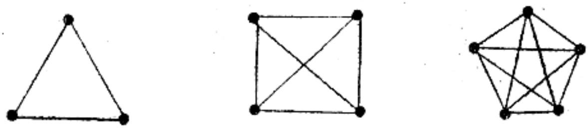
图1—4

其中(a)和(b)是不同构的。

§1—3　完全图　二部图

定义1—2　每一对顶点都有且仅有一条边相连，这样的图称为完全图（complete graph）。

三阶、四阶、五阶完全图如下图所示。



(a)　　　　(b)　　　　(c)

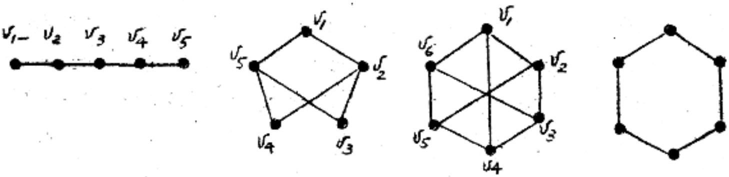
图1—5

n阶完全图通常记为 K_n，很明显，n阶完全图的边数为

$$e = C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)\ .$$

定义1—3　在图$G=(V,E)$中，如果顶点集合V可分成两个子集V_1，V_2，$V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\phi$，而对任意$e_k=[v_i,v_j]\in E$，有$v_i\in V_1$，$v_j\in V_2$。这样的图G称为二部图（bipartite graph）。如果对任一对顶点$v_i\in V_1$，$v_j\in V_2$，有$e_k=[v_i,v_j]\in E$，则称这样的图为完全二部图。记为$K_{m,n}$，其中m，n分别为V_1，V_2中顶点的个数。

例如，以下四个图都是二部图。

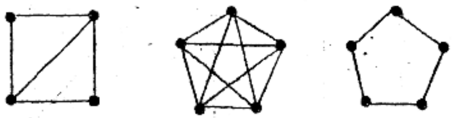


(a)　(b)　(c)　(d)

图1—6

其中(b)和(c)分别是$K_{2,3}$和$K_{3,3}$。

以下一些图就不是二部图



(a)　(b)　(c)

图1—7

判定一个图是否是二部图，有以下有用的定理：

定理1—3　图G为二部图的充分必要条件是G中不含奇阶的圈。

这个定理的证明，留作第二章后的习题。

定义1—4　设$G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，若$V_1\cap V_2=\phi$，则称G_1和G_2是互相分离的图（disjoint graphs)。

定义 1—5　若 $E_1 \cap E_2 = \phi$，则称 G_1 和 G_2 为边不相重图（edge disjoint graphs）。

§1—4　子图（subgraph）和图的运算

一、子图

定义 1—6　设 $G=(V,E)$，$g=(V_1,E_1)$，若 $V_1 \subseteq V$，$E_1 \subseteq E$，则称 g 是 G 的子图，记为 $g \subseteq G$，若 $V_1 \subset V$ 与 $E_1 \subset E$ 之中至少有一个成立，则称 g 为 G 的真子图（proper subgraph）。

空图是任何图的子图。

定义 1—7　设 $G=(V,E)$，$S=(V,E_1)$，$E_1 \subset E$，则称 S 为 G 的生成子图（spanning subgraph）。

例如，下面几个图中，S_1，S_2，S_3 都是 G 的生成子图。

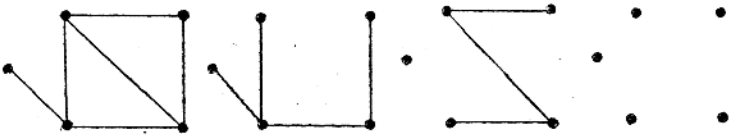


图 1—8

定理 1—4　设图 G 的边数为 e，则其非空的生成子图的个数为 2^e 个。

证：G 中任何一条边保留与否都形成不全的生成子图，故其生成子图的个数为 2^e 个。其中包括 G 本身以及由 G 的所有顶点构成的零图。▌

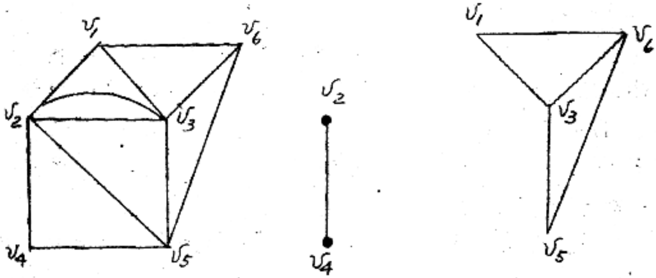
定义 1—8　若 $G=(V,E)$，对于 $V_1 \subset V$，取

$E_1=\{[v_i,v_j] \mid v_i\in V_1,\ v_j\in V_1,\ [v_i,v_j]\in E\}$，则

$G_1=(V_1,E_1)$ 称为G中顶点集 V_1 的导出子图（induced subgraph），记为 $G(V_1)$

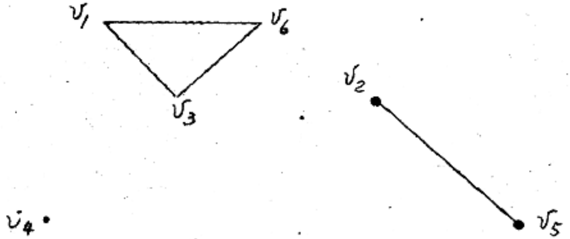
定义1—9　若 $G=(V,E)$，对于 $V_1\subset V$，则顶点集 $V-V_1$ 的导出子图称为G中顶点集 V_1 的导出余子图，记为 $G(V-V_1)$。

例如，下面几个图分别是G对几个不全顶点子集的导出子图和导出余子图。



G　　　　$G(V_1)$　　　　$G(V-V_1)$

图1—9　其中 $V_1=\{v_2, v_4\}$



$G(V_2)$　　　　$G(V-V_2)$

图1—10　其中 $V_2=\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$

二、图的运算

定义1—10　$G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，取 $V=V_1\cup V_2$，$E=E_1\cup E_2$，则图 $G=(V,E)$ 称为 G_1 和 G_2 的并（union）。记为 $G=G_1\cup G_2$。

定义1—11　取 $V=V_1\cap V_2$，$E=E_1\cap E_2$，则 $G=(V,E)$ 称为 G_1 和 G_2 的交（intersection），记为 $G=G_1\cap G_2$。

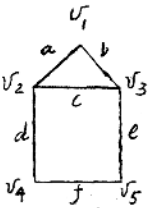
定义1—12　若 $g=(V_1,E_1)$ 是 $G=(V,E)$ 的子图，则 $G_1=(V,E-E_1)$ 称为 G 与 g 的差（difference），记为 $G_1=G-g$。

注意，从 G 中减去子图 g 时，并不从图 G 中除去 g 相应的顶点，而仅除去 g 相应的边。因而，很明显，对任何图 G，$G-G=N$（零图）。

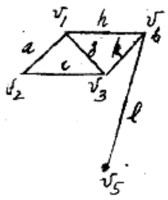
定义1—13　$(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)$ 称为 G_1 和 G_2 的环和（ring sum），记为 $G_1\oplus G_2$。

环和是图的一种重要运算，以后经常要进行这种运算。两个图的环和，从直观上说，就是保留两图中不相重的边，而去掉那些相重的边。

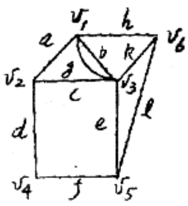
下面的几个图，是这几种运算的例子



G_1



G_2



$G_1\cup G_2$