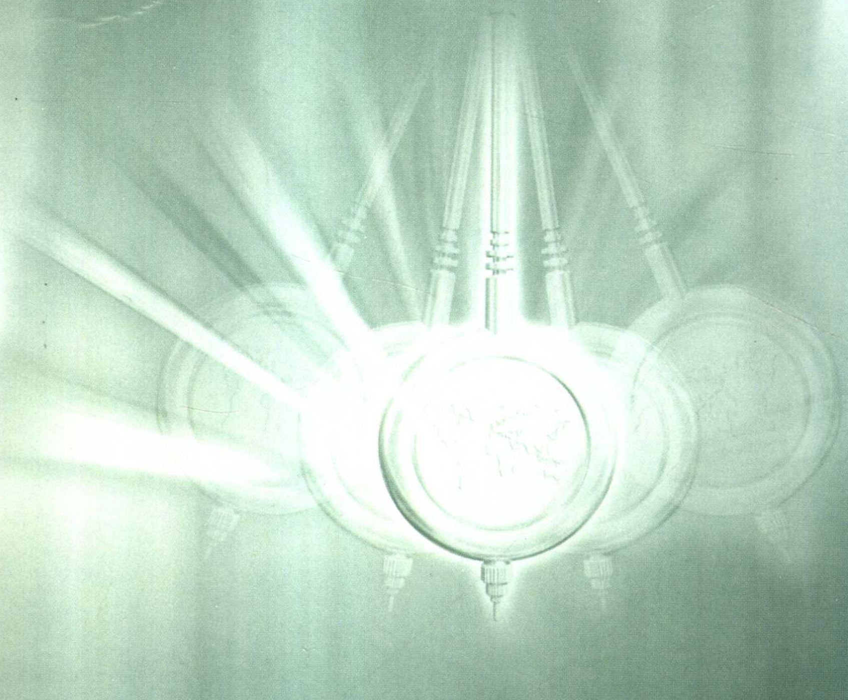
物理学

李颖颖　主　编
罗精明　陈世尧　李　群　副主编



中国地质大学出版社

物　理　学

——机电类高职高专院校教材

主　编　李颖颖

副主编　罗精明　程世孝

　　　　李　群

中国地质大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

物理学/李颖颖主编,罗精明、程世尧、李群副主编.—武汉:中国地质大学出版社,2003.10
ISBN 7-5625-1809-2

Ⅰ.物…
Ⅱ.①李…②罗…③程…④李…
Ⅲ.物理-教材
Ⅳ.O41

物理学　　李颖颖 主编
罗精明　程世尧　李 群 副主编

责任编辑:段连秀　　技术编辑:阮一飞　　责任校对:胡义珍

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路31号)　　邮编:430074
电话:(027)87482760　　传真:87481537　　E-mail:cbo@cug.edu.cn

开本:787 mm×1092 mm 1/16　　字数:300千字　　印张:11.5
版次:2003年10月第1版　　印次:2003年10月第1次印刷
印刷:武汉市教文印刷厂　　印数:1—2 500册

ISBN 7-5625-1809-2/O·59　　定价:22.00元

前　　言

本书是为高等职业技术学院和高等工程专科学校机电专业物理基础课程编写的教材。考虑到现阶段高职高专学生入学水平状况，本书在编写过程中力图实现以下几点：

1. 在注意保持物理学自身系统性的同时，侧重于基本概念、基本原理的掌握，并坚持“必须、够用”原则，合理安排授课的广度和深度。

2. 结合高职高专机电类专业的特点和实际需要，本书未将气体分子运动、热力学及刚体转动等部分常规内容编入。

3. 本书除注意控制篇幅，精选内容，着重讲授经典物理学外，为拓宽学生视野，对近代物理学及物理应用的新近概况也作了简略介绍。

4. 考虑到现阶段许多高职高专院校将物理课程提前安排到开学第一学期开课的情况，本书以附录的形式，特别增编了浅显的矢量运算、导数、积分的数学内容，以便配合物理讲授的需要。授课老师视情况对该部分内容可采取不讲、提前讲或部分选讲的方式进行处理。

另外，注意到各院校各专业物理课时量设置的差异，本书除基本内容外，还编进了一些用于拓广和提高的内容，并打上＊号以供参考和选用。

本书由武汉职业技术学院数理部物理教研室老师编写，其中李颖颖编写前言、绪论、第一、二、三章及数学预备知识，并统稿，李群编写第四、五章，罗精明编写第六、七、八、九章，程世尧编写第十、十一、十二、十三、十四章。

编　者

2003 年 7 月

目　　录

绪 论

物理学是研究宇宙万物大至巨型天体，小至原子、电子等微观粒子的特性、基本结构，以及物质最基本运动规律的科学。如物质都具有质量、能量，有形物质占有空间，无形物质（如电、磁场）不占有空间，磁场对电流有力的作用，微观粒子的运动具有量子化特点等等。这些都属于物质最基本的特性。而宏观物质是由分子、原子组成，分子和原子又由更小的基本粒子构成，每个原子都由原子核与绕核高速旋转的电子构成，以及晶体物质有晶格点阵结构，每个晶体分子都在其平衡位置附近振动等等。这些则属于物质基本结构的范畴。物质的基本运动规律包括机械运动，电磁运动，热运动，原子内部质子、中子等基本粒子的运动规律，等等。

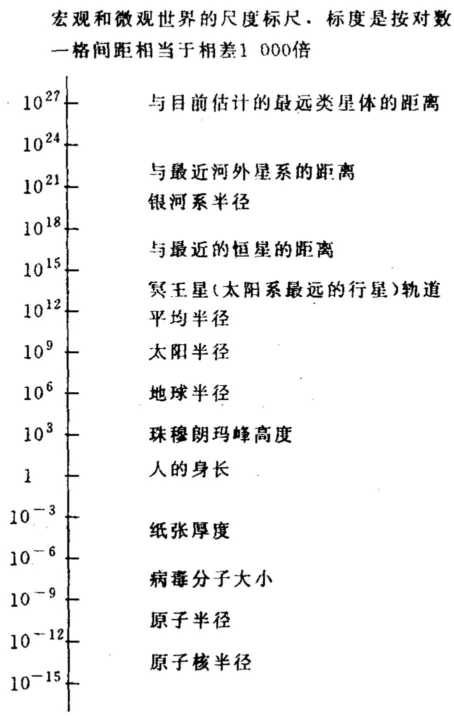


图0－1　宇宙的尺度

我们从图1所示的宇宙中各类物质的大小，可以初步感受物理学研究领域的浩淼广漠。除了有形物质外，物理学还研究不占据空间的无形物质——场。我们知道，磁铁对其周围空间的其他磁铁、带电体对其周围空间的其他电荷都会有力的作用。而这种力的作用正是通过电场、磁场这些无形物质来进行的。变化的电流（电场）会产生磁场，磁场对电流会有力的作用，甚至宏观物体间也会通过引力场这种无形物质产生相互作用。电、磁场和引力场的基本性质和基本运动规律也是物理学的研究对象之一。随着物理学研究越来越深入到微观粒子内部，人们也越来越深刻地了解到物质相互作用的实质。

物质间相互作用大致可分为四种形式，即引力相互作用、电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用。前两种相互作用的规律已基本了解，弱相互作用规律也有了初步了解，强相互作用

的规律正在进一步的探索中。强相互作用是原子核中的核子(质子、中子)之间的相互作用力,它的作用距离很短,约为10^{-15}m的数量级。当核子间距大于10^{-14}m时,这种作用将不显现。弱相互作用是基本粒子发生β衰变时出现的相互作用,其作用距离更短,小于10^{-17}m,产生弱相互作用的基本粒子有中微子、电子等。对这四种相互作用的强度来说,如果设强相互作用的强度为1,则电磁相互作用的强度为10^{-2},弱相互作用的强度为10^{-13},引力相互作用的强度为10^{-38}。中学教材中的弹性力、摩擦力从微观上看,属于分子间的相互作用,而本质上则属于电磁相互作用。

物理学作为自然科学中发展最早最完善的学科,至今已经成为一门有着众多分支、众多边缘学科和交叉学科的极具活力的科学体系。它不断取得的辉煌成就,极大地改变着社会生活的各个层面。人类社会借助于经典力学和热物理学的理论完成了以蒸汽机为标志的第一次工业革命。而麦克斯韦电磁理论体系的建立,则触发了第二次工业革命,它使人类进入到电气化时代。而上世纪初以量子物理和相对论为代表的近代物理则为第三次工业革命、人类进入原子纪元敞开了方便之门。在新的世纪中,随着物理学研究的进一步深入,以及它和光子、电子、信息、新能源、新材料、计算机技术、生命科学等高新技术的紧密结合,人类社会必将迎来又一个璀璨的春天。

作为工程专业后继课程基础课的物理学,它的主要功能并不是局限于作为某一门或几门专业课的基础课。它的开设应当是以开拓学生的眼界,培养学生缜密的思维推理能力,启迪学生的智能与技能,使学生具有较合理的知识结构和较高的科学素质为宗旨的。而作为一名未来工程技术人员的任务,是要在将来的生产实践中应用新理论不断地改革技术,解决各种技术难题,提高生产效率。这就要求今天的学生除了掌握好专业知识外,还必须具备宽阔的科技视野和扎实的基础科学的功底。

物理学是用它在实践和实验中总结出的原理、定律和定理,来反映和描述自然现象的。而这些原理、定律和定理则表征了物理现象中物理量之间的关系。随着物理量有矢量和标量的不同,以及关系式有初等代数式和微(积)分式的不同,其计算结果的表述将有很大的不同。因此,在学习时也应重视掌握数学的描述方法和运算规律。

在课堂里学习物理,应注意正确理解物理原理和概念,掌握现象和过程的物理图像,弄清定律和定理的适用条件、适用范围和应用方法。这就要求我们平时勤于联系实际,善于思索物理问题,重视上好实验课,掌握测量物理量、使用仪器设备的方法,培养动手实验的能力。并在课后还须独立做一定量的习题,对某些习题争取做到一题多解,以增强自己分析问题和解决问题的能力。

第一章　质点运动的描述

自然界中的物质时时刻刻都在运动着。各种各样的物质存在着各式各样的运动形式，如生物的生长、化学物的变化、分子的热运动、电磁运动、机械运动等等。而其中的机械运动是自然界中最简单、最常见的运动形式。它是指物体之间，或物体各部分之间的位置发生相对变化的运动。力学中首先探讨的就是机械运动的规律。

§1-1　位置矢量　位移

一、参照系　质点

自然界中所有的物体都在不停地运动，绝对静止不动的物体是不存在的。如放在桌上的书相对桌面是静止的，但对太阳而言，它却随着地球一起绕太阳运动。这就是运动的绝对性。又如，坐在飞驰的列车上的人相对车厢是静止的，而相对地面则是运动的。若以人为参照物体，则地面正在做远离人的运动。因此，在运动的描述中，需先分清哪个是研究对象、哪个是参照物体。描述一个物体的运动时，必须指明它是相对于哪个参照物体而言的，这个参照物体又称参照系。参照系不同，物体运动的描述也就不同，这叫作运动描述的相对性。为了定量地描述运动，还需要在参照系上选取一个固定坐标系，最常见的是直角坐标系。参照物上建立起坐标系后，原则上就可以定量研究任何物体的机械运动了。但由于实际物体的大小形状以及其上各部分的运动情况往往各不相同，因此，在具体研究物体的运动时，需要抓住主要因素，忽略次要因素。先将研究对象简化为一个理想的模型，再做进一步的研究，如当研究一辆汽车沿平直公路行驶的运动时，汽车车身在作平动，但车轮却在做两种运动，即车轮的轴心在作平动，而车的轮胎却在作转动。如果只探讨汽车在一段时间内通过的路程时，则可忽略车轮的转动，并且由于车身上各点所作的平动情况完全一样，所以也可以忽略车身的大小和形状，而把汽车看作是一个保留着原来质量的点，这个有质量的点就叫作质点。质点是一个理想化的模型。理想化的模型在物理学中还有刚体、理想流体、理想气体、点电荷、点光源等。这种将研究对象抽象为一个理想模型的方法，是物理研究中一个非常重要的简化问题的方法，否则就很难把握问题的实质，甚至无法解决问题。一个物体能否被当作质点要由具体的情况来确定。例如讨论地球绕太阳公转时，由于地球到太阳的平均距离（约为 1.5×10^{8}km）比地球的半径（约 6.37×10^{3}km）大得多，地球上各质点相对于太阳的运动，可以看作是相同的，所以研究地球绕太阳的公转时，可以把地球当作质点。但在研究地球本身的自转时，由于地球上各处的运动情况大不相同，这时就不能把地球当作质点处理了。

二、位置矢量　运动方程

为简便起见，本书主要研究质点的平面曲线运动。故后续各章的内容主要在平面直角坐标系下探讨问题。

质点作机械运动时常常需要知道它在空间的位置。位置矢量就是用来描述质点空间位置的物理量。如图 1-1 所示建立坐标系，设某质点在运动过程中 t 时刻位于 P 点，该质点的位置可用从原点 O 指向 P 点的有向线段 $\boldsymbol{r}$ 表示。$\boldsymbol{r}$ 称为质点的位置矢量，简称位矢。若 P 点的坐标

为(x,y)，则位矢可用其在两坐标轴上的分矢量表示

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i} \tag{1-1}$$

式中$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$分别是沿x轴和y轴的单位矢量，位矢的大小（或模）为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}。$$

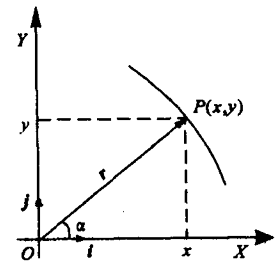


图1-1

位矢的方向可由$\boldsymbol{r}$与x轴的夹角α确定。

$$\alpha=\mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) \tag{1-2}$$

显然质点运动时，其位矢$\boldsymbol{r}$是随时间变化的，即$\boldsymbol{r}$是时间的函数。

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-3}$$

上式称为质点的运动方程，运动方程也可用分量式表示为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases} \tag{1-4}$$

质点的运动方程，描述了质点的运动规律。根据它可求得质点在任意时刻t的位置、速度和加速度。进一步由运动方程的分量式还可知，质点的平面运动是由它在x和y两个方向上独立进行的直线运动叠加而成的，这称为质点运动的叠加原理。

从质点运动方程的分量式中消去t，则可得到质点的运动轨迹方程

$$y=f(x) \tag{1-5}$$

它能描述质点运动时所经历的路径（轨迹）。

例1-1 设质点以初速v_0作平抛运动，试推导质点的轨迹方程。

解：由运动叠加原理可知，质点的平抛运动是由质点在水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动叠加而成的。建立直角坐标系后，有

$$\begin{cases}x=v_0t\\y=\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

由第一式得$t=\dfrac{x}{v_0}$代入第二式，即得轨迹方程

$$y=\frac{g}{2v_0^2}x^2。$$

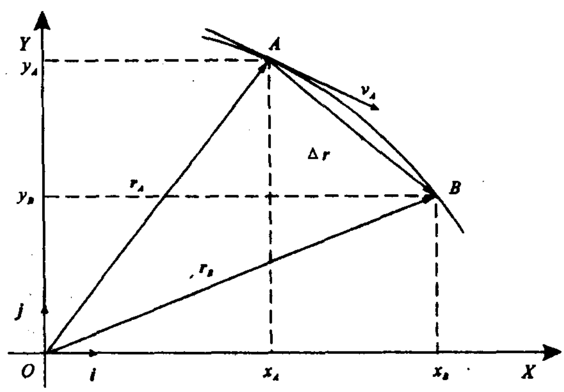


图1-2

三、位移

我们不但要知道质点在任一时刻t的位置，还要知道质点在一段时间内的位置变化。位移就是用来描述一段时间内质点位矢的改变（增量）的物理量。如图1-2所示，设经过一段时间后，质点由A点运动到B点，位矢由$\boldsymbol{r}_A$变为$\boldsymbol{r}_B$，则由始点A指向终点B的有向线段称为位移矢量，简称位移，记为$\Delta\boldsymbol{r}$。由矢量减法可得

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=(x_B\boldsymbol{i}+y_B\boldsymbol{j})-(x_A\boldsymbol{i}+y_A\boldsymbol{j})\\&=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{1-6}$$

式中Δx、Δy分别是质点在x轴和y轴上的位移分量。

上式表明。质点作平面运动时、其位移等于它在x轴和y轴上的分位移的矢量和。位移$\Delta\boldsymbol{r}$的大小（模）为

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \tag{1-7}$$

设位移$\Delta \boldsymbol{r}$与x轴的夹角为α，则

$$\alpha=\arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \tag{1-8}$$

位移是描述质点位置变化的物理量，是一个有大小、有方向的矢量。位移不同于路程，路程是质点所经历的实际路径的长度。如图1-2中的弧$\overset{\frown}{AB}$，即使在直线运动中，位移的大小和路程也是不同的两个概念。如，在某一段时间Δt内，质点沿着直线从A点到B点，又折回A点，路程$\Delta s=2\overline{AB}$，而位移的大小$|\Delta \boldsymbol{r}|=0$。一般情况下，$\Delta s\neq|\Delta \boldsymbol{r}|$。只有$\Delta t\to 0$时，才有$\Delta s=|\Delta \boldsymbol{r}|$。

例1-2 一辆汽车向东南行驶10.0 km，再向东北行驶20.0 km，最后向西行驶5.0 km，求：(1)总位移的大小和方向；(2)总路程。

解：(1)以汽车出发点为原点，向东为x轴正向，向北为y轴正向，建立直角坐标系，如图1-3。

图中$OA=10.0\text{km}$，$AB=20.0\text{km}$，$BC=5.0\text{km}$

$$\Delta x=OA\cdot\cos45°+AB\cdot\cos45°-BC$$
$$=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}+20\times\frac{\sqrt{2}}{2}-5=16.2(\text{km})$$
$$\Delta y=-OA\sin45°+AB\sin45°$$
$$=-10\times\frac{\sqrt{2}}{2}+20\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}(\text{km})$$
$$=7.1(\text{km})$$

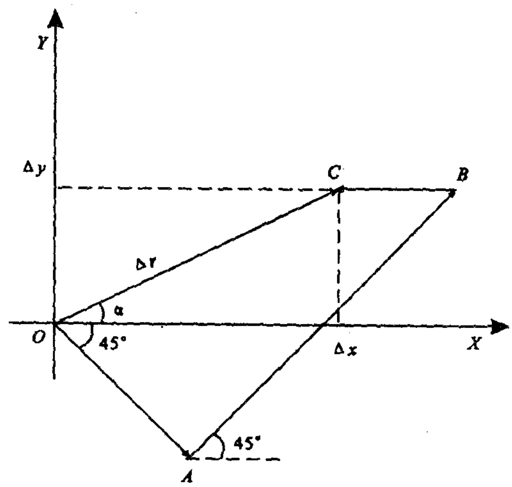


图 1－3

总位移

$$\Delta \boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}=16.2\boldsymbol{i}+7.1\boldsymbol{j}(\text{km})$$

其大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(16.2)^2+(7.1)^2}=17.7(\text{km})$$

$\Delta \boldsymbol{r}$与x轴夹角α为

$$\alpha=\arctan\frac{7.1}{16.2}=23.6°$$

(2) 总路程

$$s=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}=10+20+5=35(\text{km})$$

§1－2 速度与加速度

一、速度

位移描述了质点位置的变化，但质点经过同样的位移所需的时间往往是不一样的，为了反映质点完成位移的快慢程度，下面引入平均速度和瞬时速度的概念。

1. 平均速度

在图1-2中，设t时刻质点位于A点，$t+\Delta t$时刻位于B点，即在Δt时间内，质点的位移为$\Delta \boldsymbol{r}$。则定义质点的平均速度为其位移$\Delta \boldsymbol{r}$与所经历时间之比，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}=\bar{v}_x\boldsymbol{i}+\bar{v}_y\boldsymbol{j} \tag{1-9}$$

平均速度是一个矢量，其方向与位移$\Delta \boldsymbol{r}$的方向相同，其大小由下式给出

$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{(\bar{v}_x)^2 + (\bar{v}_y)^2} \tag{1-10}$$

为了描述质点沿轨迹运动的快慢程度，还常用平均速率来表述。平均速率为质点经过的路程 Δs 与所用时间 Δt 的比值，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

平均速率和平均速度是两个不同的概念，平均速率是标量，且因为一般 $\Delta s \neq |\Delta \boldsymbol{r}|$，所以一般平均速率和平均速度的绝对值也不相等。国际单位制中，两者的单位都为米/秒($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)。

平均速度只是粗略地反映质点在某段时间 Δt 内运动的快慢程度。为了精确反映质点在某一位置或某一时刻运动的快慢，下面引入瞬时速度。

2. 瞬时速度

平均速度与所取的时间间隔有关。时间间隔 Δt 越短，Δt 内平均速度就越能精确地反映出质点在该时间 Δt 内运动的快慢。因此，定义质点在 t 时刻的瞬时速度为：t 至 $t+\Delta t$ 时间内平均速度$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$当 $\Delta t \to 0$时的极限，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\boldsymbol{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-11}$$

对比导数的定义可知，质点的瞬时速度（简称速度）等于其位置矢量对时间的一阶导数，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\\ &=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{1-12}$$

式中 v_x、v_y 分别为速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴和 y 轴上的分量。速度是矢量，其大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{1-13}$$

设 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角为 α，则

$$\alpha=arctan\,\frac{\mathrm{v_y}}{\mathrm{v_x}} \tag{1-14}$$

由于速度的方向就是 $\Delta t \to 0$时的位移$\Delta \boldsymbol{r}$的方向，由图1-2可知，这时 B 点无限接近于 A 点，矢量 $\boldsymbol{AB}$(即$\Delta \boldsymbol{r}$)线段无限趋近于 A 点的切线。因此，A 点的速度方向是沿 A 点处质点运动轨迹的切线，并指向质点前进一侧的。运动学中也常用瞬时速率（简称速率）从量值上描述质点在某一时刻运动的快慢程度。定义瞬时速率为 t 至 $t+\Delta t$ 内的平均速率$\frac{\Delta s}{\Delta t}$当 $\Delta t \to 0$时的极限，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-15}$$

尽管一般 $\bar{v}\neq|\bar{\boldsymbol{v}}|$，但由于当 $\Delta t\to 0$时，$\Delta s \to |\Delta \boldsymbol{r}|$。所以

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=|\boldsymbol{v}| \tag{1-16}$$

这表明瞬时速率等于瞬时速度的大小。国际单位制中，速度与速率的单位均为米/秒($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)。

例1-3 质点沿 x 轴运动，运动方程为 $x=6t-3t^2$，求：(1)第二秒末的瞬时速度；(2)前二秒内的平均速度和平均速率（长度和时间单位分别为 m 和 s）。

解：(1)由 $v=v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(6t-3t^2)'=6-6t$， 得

$$v\big|_{t=2}=(6-6t)_{t=2}=-6(\mathrm{m \cdot s^{-1}})<0$$，(负值表示 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴反向)。

(2)平均速度大小　$|\bar{v}|=\left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right|=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_0}{t_2-t_0}=\frac{(6\times2-3\times2^2)-(6\times0-3\times0)}{2-0}=0$

平均速率　由 $v=6-6t$ 知，$t=1\text{s}$ 时，$v=0$ 质点开始折返，又由 $x=6t-3t^2$ 知，$t=2\text{s}$ 时，$x=0$ 质点回到原点。于是质点经过的路程为 $\Delta s=\Delta s_1+\Delta s_2=2\Delta s_1=2x_1=2(6\times1-3\times1^2)=6(\text{m})$，所以平均速率为 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{6}{2}=3(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$。

二、加速度

速度反映了质点完成位移时的快慢程度，但质点运动时，其速度的大小和方向也往往发生变化，为描述速度随时间的变化情况，下面引入平均加速度和瞬时加速度的概念。

1. 平均加速度

如图1-4，设 t 时刻质点位于 A 点，速度为 $v(t)$，在 $t+\Delta t$ 时刻到达 B 点，速度为 $v(t+\Delta t)$，则在 Δt 时间内，质点速度的增量为

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$$

我们将速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 与产生该增量的时间间隔 Δt 的比值 $\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 定义为 Δt 时间内质点的平均加速度，即

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-17}$$

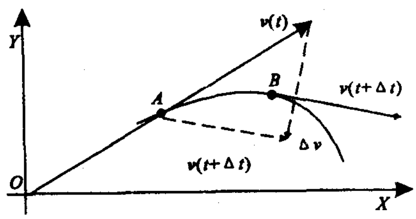


图 1-4

平均加速度是矢量，其方向与速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向相同，它反映了一段时间内，质点速度变化的快慢程度。在国际单位制中，平均加速度的单位为米/秒^2($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)。

平均加速度只是粗略地反映了一段时间内速度变化的快慢程度，为了精确地描述某一时刻 t 的速度变化的快慢，下面引入瞬时加速度。

2. 瞬时加速度

由于时间间隔 Δt 越小，则该 Δt 内的平均加速度就越能精确地反映出质点的速度在该段时间内变化的快慢程度，因此就将质点在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内的平均加速度 $\boldsymbol{a}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 当 $\Delta t\to0$ 的极限 $\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$，定义为 t 时刻质点的瞬时加速度，简称加速度。记为 $\boldsymbol{a}$，即有

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-18}$$

对比导数的定义，可知

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-19}$$

在国际单位制中，加速度的单位为米/秒^2($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

在直角坐标系中有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j})=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{i} \tag{1-20}$$

式中 $a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$、$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$ 分别是加速度沿 x 轴和 y 轴的分量。

加速度的方向是与速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向相同的。

由图1-4可知：在一般的曲线运动中，加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向总是指向质点运动轨迹凹侧一方的。它与速度 $\boldsymbol{v}$ 通常不在同一直线上。当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成锐角时，质点的速率增加；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成钝角时，质点的速率减小；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成直角时，质点速率保持不变。

例1-4　设某质点作平面运动时的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=3t^2\boldsymbol{i}+(2t-1)\boldsymbol{j}$$

式中长度单位取 m,时间单位取 s 。试求:(1)从第一秒末至第二秒末质点的位移和平均速度;(2)第二秒末质点的速度和加速度。

解:(1)由运动方程知,质点在第一秒末和第二秒末的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}(\mathrm{m}),\boldsymbol{r}_2=12\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$$

则第一秒末至第二秒末的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(12-3)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}=9\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$$

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{9^2+2^2}=9.2(\mathrm{m})$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 与 x 轴的夹角 α 为

$$\alpha=\arctan\frac{2}{9}=12.5^\circ$$

第一秒末至第二秒末的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{9\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{2-1}=9\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

平均速度的大小为

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{9^2+2^2}=9.2(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

$\bar{\boldsymbol{v}}$ 与 x 轴的夹角为12.5°。

(2)质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[3t^2\boldsymbol{i}+(2t-1)\boldsymbol{j}]=6t\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(6t\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})=6\boldsymbol{i}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

当 $t=2\mathrm{s}$ 末时的速度为

$$\boldsymbol{v}|_{t=2}=6\times2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}=12\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v=\sqrt{12^2+2^2}=12.2\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

$\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角 α 为

$$\alpha=\arctan\frac{2}{12}=9.5^\circ$$

加速度的大小为$6\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$,它的方向沿 x 轴的正向。

§1-3 切向加速度 法向加速度

一、切、法向加速度

一般曲线运动轨道的每一小段,都可以看作是某一个圆的一小段圆弧,只不过曲线上不同小段所对应的圆的半径和圆心的位置不同而已。见图1-5,曲线上每一点 P 都可以作出这样的圆,该圆叫作曲线在 P 点的曲率圆。由此可知,圆周运动是研究一般曲线运动的基础。下面讨论速度的大小和方向都发生变化的变速率圆周运动的加速度。

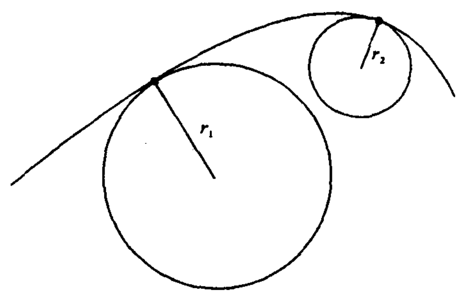


图1-5

虽然在固定的直角坐标系中的加速度能够反映质点在某时刻 t 的速度的变化情况，但在一般情况下，它不易将质点速率和方向的变化快慢分别直观地反映出来。为此我们建立一个新的坐标系——自然坐标系。质点做圆周运动时，规定某时刻 t 从圆周上的质点处指向圆心的有向直线为法向坐标轴，其单位矢量为 $\boldsymbol{n}$。质点处指向前进方向的切线为切向坐标系，其单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$。显然该坐标系是一个动态的直角坐标系。

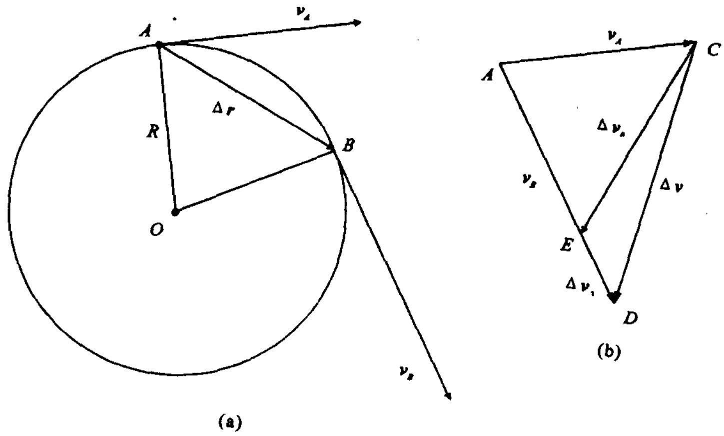


图1-6

如图1-6(a)所示，质点在半径为 R 的圆周上运动时，t 时刻位于 A 点，速度为 $\boldsymbol{v}_A$，$t+\Delta t$ 时刻到达 B 点，速度为 $\boldsymbol{v}_B$。Δt 时间内质点的速度增量为 $\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$，见图1-6(b)。

在 $\boldsymbol{v}_B$ 上取 $AE=|\boldsymbol{v}_A|$，将 $\boldsymbol{v}_A$ 的箭头端 C 点与 E 点连接，根据矢量加法，则有

$$\Delta \boldsymbol{v}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}=\Delta \boldsymbol{v}_n+\Delta \boldsymbol{v}_\tau$$

又因为 $\triangle OAB \backsim \triangle ACE$

所以 $$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}_n|}{AB}=\frac{v_A}{OA}$$

得 $$|\Delta \boldsymbol{v}_n|=\frac{v_A}{R}|\Delta \boldsymbol{r}|$$

即 $$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}_n|}{\Delta t}=\frac{v_A}{R}\cdot\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

又因为 $|\Delta \boldsymbol{v}_\tau|=v_B-v_A$ 表示 A、B 两点速度大小的增量，记为 Δv，即

$$|\Delta \boldsymbol{v}_\tau|=\Delta v$$

有

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}_\tau|}{\Delta t}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

这里须注意：Δv 表示 A、B 两点速率的增量，而 $\Delta \boldsymbol{v}$ 是表示 A、B 两点速度(矢量)的增量。

当 $\Delta t\to 0$时，$\boldsymbol{v}_B\to \boldsymbol{v}_A$，$\Delta \boldsymbol{v}_n \perp \boldsymbol{v}_A$，即 $\Delta \boldsymbol{v}_n$ 这时指向法线方向；而 $\Delta \boldsymbol{v}_\tau$ 这时则指向切线方向。于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_A}{R}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}\boldsymbol{n}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\boldsymbol{\tau}\\&=\frac{v_A^2}{R}\boldsymbol{n}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=a_n\boldsymbol{n}+a_\tau\boldsymbol{\tau}\end{aligned}\qquad(1-21)$$

式中 a_n 和 a_τ 分别叫作法向加速度和切向加速度。

即

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{v^2}{R} \\ a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1-22}$$

式中法向加速度 a_n 反映速度方向改变的快慢程度，而切向加速度 a_τ 则反映速度大小即速率改变的快慢程度。其中$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是代数量，它可正可负，若$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}>0$，则 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 同向，表示速率增大，若$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}<0$，则 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 反向，表示速率减小。总加速度可写成

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_\tau=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

其大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-23}$$

其方向（见图1－7）由下式确定

$$\tan\alpha=\frac{a_n}{a_\tau} \tag{1-24}$$

式中 α 是总加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的夹角。

由图1－7知 $\boldsymbol{a}$ 的方向总是指向圆周凹向一侧。

在一般曲线运动中，设某时刻 t，质点位于 A 点，其 A 点曲率圆半径设为 ρ，则类似地有

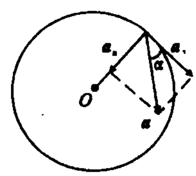


图1－7

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_\tau$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{v^2}{\rho} \\ a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\alpha=\arctan\frac{a_n}{a_\tau}。$$

我们可根据 α 角的大小范围得知质点的运动类别：

当 $\alpha=0$时，有 $a_n=0, a=a_\tau, \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{v}, \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}>0$，质点作加速率直线运动；

当$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$时，有 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}, a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}>0$，质点作加速率曲线运动；

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，有 $a_\tau=0, a=a_n=\dfrac{v^2}{\rho}, \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{v}$，质点作匀速率曲线运动（若 $\rho=$常量，则为匀速率圆周运动）；

当$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，有 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}, a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}<0$，质点作减速率曲线运动；

当 $\alpha=\pi$ 时，有 $a_n=0, a=a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}<0, \boldsymbol{a}\parallel-\boldsymbol{v}$，质点作减速率直线运动。

二、线量和角量的关系

1. 圆周运动的角量描述

质点在作圆周运动时，除了用位移、速度、加速度等量描述外，也常用角量（角位移、角速