高中二年级第一学期

学习指导

河南省基础教育教学研究室　编

数学

大象出版社

高中二年级第一学期

学习指导

数学

河南省基础教育教学研究室　编

大象出版社

责任编辑：宋海波
封面设计：高　岚
版式设计：欧阳林棣

学习指导

河南省基础教育教学研究室　编

ISBN 7-5347-2632-8

9 787534 726323 >

高中二年级第一学期
数学学习指导
河南省基础教育教学研究室　编
责任编辑　宋海波
责任校对　孙　波　裴红燕
大象出版社 出版
（郑州市经七路25号　邮政编码 450002）
网址：www.daxiang.cn
河南省军辉印务有限公司印刷
新华书店经销
开本　787×1092　1/16　8.25 印张　200 千字
2004 年 7 月第 4 版　2006 年 7 月第 3 次印刷
ISBN 7-5347-2632-8/G·2124
定　价 7.80 元
若发现印、装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换。
印厂地址　郑州市郑上路大庄村东口
邮政编码　450042　电话　(0371)67826082

教材变了，考王来了

“大象考王”，秀出名门——大象出版社是河南省惟一一家专业教育出版机构，也是河南省惟一一家全国优秀出版社。

以中考、高考和阶段测试为基本立足点，“大象考王”一共推出新书100多种，在河南教育图书市场上演一场红、蓝、绿“三色风暴”！“河南考生读‘大象考王’，‘大象考王’助河南考生”的观点已经深入人心。不少教研专家和优秀教师预言：**立足创新、立足河南、面向全国**的“大象考王”，将成为莘莘学子新时代的“三色宝书”。

“大象考王”品牌教辅包括三大系列

红色 “大象考王”中考系列 包括“河南重点名校中考复习内部讲义”丛书（大纲本/非课改试验区用）、“全国课改名校中考复习新讲义”丛书（新课标总复习系列/课改试验区用）及“全国中考试题荟萃解析”丛书（试题精选研究系列）。

●“河南重点名校中考复习内部讲义”丛书：《中考第一第二轮复习专用测试》（分科分册）、《中考第三轮复习冲刺专用模拟试卷》（分科分册）

●“全国课改名校中考复习新讲义”丛书：《新课标中考复习精讲与测试》（分科分册）、《新课标中考第三轮复习冲刺专用模拟试卷》（分科分册）

●“全国中考试题荟萃解析”丛书：《全国中考试题分类解析》、《全国中考试卷汇编与解答》、《中招考新题型》（包括数学、物理、化学）

蓝色 “大象考王”同步测试系列 包括“新课标节节高”丛书。这是专为课改实验区七至九年级各个学科并配合所有版本教材开发的《单元测评与阶段（月考）试卷》。

由北京、山东、江苏、福建、湖北、湖南、安徽、甘肃等第一批国家课改试验区教研专家以及河南省课改试验区重点中学的优秀教师严格按照新课标理念编写，河南省基础教研专家最终审定把关。

●名家执笔，内容新创。

●专家把关，专业品质。

●深入研发，精心打造。

●结合省情，方便实用。

绿色 “大象考王”高考系列 包括《河南高考新学典·高考第一轮复习提要与测评（2006版）》（系统讲练）、《河南高考新 学典·高考第二轮复习专项突破（2006版）》（专题讲练）、《河南高考新学典·最新高考模拟试卷（2006版）》（专用测试）。

由大象出版社和河南省基础教研室联合推出，供高中三年级学生在一、二、三轮复习时配套使用，本套书与省情紧密结合，集科学性、权威性于一体，在河南的图书市场上占据四个惟一：

●**惟一**一套根据最新的高考考试大纲及考试大纲说明而编写的高考复习资料。

●**惟一**一套由河南省基础教研室组织编写。

●**惟一**一套集合省内命题专家、教育界权威和教学精英并结合高校招生思路联合编写的高考复习资料。

●**惟一**一套结合河南省教学实际，依据国家考试大纲，在分省命题的探索中编写的高考复习用书。

河南考生读“大象考王”，“大象考王”助河南考生

丛书构成

●**系统讲练** 《河南高考新学典·高考第一轮复习提要与测评（2006版）》，该套书包含语文、数学、英语、物理、化学、政治、历史、地理、生物等九本，是河南高考新学典中的系统讲练丛书，是河南重点高中高考第一轮复习的经验总结和升华。

●**专题讲练** 《河南高考新学典·高考第二轮复习专项突破（2006版）》，该套书包含语文、数学、英语、物理、化学、政治、历史、地理、生物等九本，是河南高考新学典中的专题讲练丛书，它集中了数十名优秀辅导教师的复习教学秘诀的整理和提炼。

●**专用测试** 《河南高考新学典·最新高考模拟试卷（2006版）》，该套书包含语文、数学、英语（包括英语听力）、文科综合、理科综合等5本，是河南高考新学典中的专用测试丛书，有强化学习效果、提高应试能力的作用。

本套书供高三学生在三轮复习时配套使用。第一轮偏重基础知识的梳理和整合，结合教学实际，参照大纲的要求，全面涵盖基础知识，为学生打牢基础。第二轮分专题对高中阶段所学知识进行系统讲解，结合当前热点，配合能力培养，由一些对高考把握比较好的专家编写，专业分工细致，借鉴全部高考数据，专业分析，专业评价，为学生提高对高考试题的把握，增强应试能力做强化的训练，会有意想不到的效果。第三轮的模拟试卷供学生最后冲刺使用，由专家和教学前线的优秀教师共同编写，它不单是对高考命题的预测，更是针对学生的学习实际，为学生完成最后的冲刺，实现由量变的质变的蜕变而设计，有助学生更充分的把握高考。

丛书特色

本套书由大象出版社和河南省基础教育教学研究室联合推出。是科学、权威和省情相互融合的结晶。在河南的图书市场，本套书占有四个惟一：

●**科学** 这是河南图书市场惟一一套根据最新的高考考试大纲及考试大纲说明而编写的高考复习资料。进行广泛的调研，结合素质教育的要求，借鉴现有的案例，严把编写质量关。

●**权威** 这是河南图书市场上惟一一套由河南省教研室组织编写，惟一一套集合省内命题专家、教育界权威、教学精英结合高校招生思路联合编写的高考复习资料。

●**省情** 近年的高考改革实践表明，高考试卷的分省命题将成为高考命题的趋势。这是惟一一套结合我省教学实际，依据国家考试大纲，在分省命题的前进探索中编写的高考复习用书。

编写说明

为了全面贯彻落实《全日制普通高级中学教学大纲》的精神，使学生在掌握基础知识的同时，形成运用知识解决实际问题的能力，我室组织编写了“高中各科学习指导”丛书。广大师生在使用过程中对这套丛书给予了充分的肯定和好评，也对书中的不足之处提出了宝贵的修改意见。2004 年，教育部颁布了《全日制普通高级中学课程标准》，并在山东、广东、海南、宁夏四省区进行新教材实验。“课程标准”提出了许多新的教学理念和教学要求。为了适应高中课程改革发展的需要，我室组织一线教师和教学研究人员，依据现行“教学大纲”规定的知识和能力要求，参考新的“课程标准”的精神，采纳广大师生提出的合理建议，对这套丛书进行了重新编写。

本次编写以培养学生的创新精神和实践能力为宗旨，在强调指导功能的同时，突出了同步讲练。各册均紧扣教材内容编写，在栏目的设计上，除注重丛书的共性之外，还充分考虑了学科的特点，以使其更符合各学科的教学实际，更具针对性。

数学学科以章为大的编写单位，同步讲练具体到每一节。本书各章设置了以下栏目：

要点聚焦　是对本章知识的整合和浓缩，可以帮助同学们掌握预习的重点，把握学习的方向。

精讲精练　这一部分是主体，分节编写。每节下设“**本节精讲**”和“**本节精练**”两个子栏目，通过讲和练的有机结合，力求加强对教材知识的理解和巩固。其中许多不同层次的习题，更满足了不同程度学生的训练需求。

难点探究　既是对本章难点的深入分析，又是与高考接轨、向高考过渡的知识拓展，为同学们把握高考重点作了必要的点拨和铺垫。

综合测试　通过练习题的训练，加强对本章知识的综合性学习。

在各章讲练之后，设计了“**期中测试**”和“**期末测试**”两套试题，以方便同学们对所学知识进行自我检测。

考虑到使用的需要，我们对部分习题提供了参考答案（另外结集出版）。

这套丛书包括思想政治、语文、英语、数学、物理、化学、中国近代现代史、地理、生物九个学科，它最突出的特点就是有讲有练、讲练结合，将知识的概括与能力的训练有机地组织在一起；习题设计新颖、典型；板块设置也因学科特点而灵活调整，从而突出了实用性，达到了内容与形式的统一。

参加本册书编写的作者是骆传枢、张玉莲、张海营、苏学朝、芦国贤、赵振华同志，最后由骆传枢、张玉莲、张海营同志统稿。

对使用中发现的错谬缺漏之处，恳请广大师生批评、指正。

河南省基础教育教学研究室

目　录

第六章　不等式

要点聚焦

不等式是中学数学的重要内容，与函数、方程、数列、三角、平面解析几何、立体几何及实际应用问题相互交叉、渗透，是高等数学的基础和工具. 本章的重点是不等式的性质、解法，难点是证明不等式和解含参数、绝对值的不等式. 本章体现数形结合、等价转化、分类讨论等重要数学思想. 解决不等式的问题关键在于准确进行逻辑推理，正确进行数学运算以及恰当地分析问题，解决问题.

1. 考核内容

不等式、不等式的基本性质、不等式的证明、不等式的解法、含绝对值的不等式.

2. 考核要求

(1)理解不等式的性质及其证明.

(2)掌握两个(不扩展到三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单应用.

(3)掌握分析法、综合法、比较法、放缩法等证明不等式的基本方法.

(4)掌握简单不等式的解法.

(5)理解不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

3. 学法点拨

不等式内容理论性强，知识覆盖面广，因此学习中应注意：

(1)养成用逻辑推理进行数学证明的习惯，认真掌握每一性质的证明，把不等式的意义和实数运算的符号法则结合起来；

(2)解(证)某些不等式时，要把函数的定义域、值域和单调性结合起来；

(3)要紧紧抓住绝对值定义的实质；

(4)要针对具体问题，进行具体分析，灵活运用各种方法来证明不等式，某些不等式的证明可综合运用不同证法去证明；

(5)注意重要不等式在证明中的作用；

(6)利用平均值定理解决极值问题时，要注意满足定理成立的三个条件：一“正”，二“定”，三“相等”；

(7)注意函数与方程思想在不等式中的应用；

(8)要强化不等式的应用意识.

4. 命题趋势

本章内容在高考中，以考查不等式的性质、证明、解法和最值方面的应用为重点，多数情况是在函数、数列、几何、实际应用问题等综合型试题中考查其应用能力，单独考查不等式的问题较少，尤其是不等式的证明.

借助不等式的性质及证明，主要考查函数方程思想、等价转化思想、数形结合思想及分类

讨论思想等数学思想. 含参数不等式的解法与讨论、不等式与函数、数列、三角等内容的综合问题,仍将是今后高考命题的热点.

精讲精练

6.1 不等式的性质

本节精讲

例 1 比较 $a^2+b^2+c^2$ 与 $ab+bc+ca$ 的大小.

解: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2)$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]\geqslant 0.$$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$

点评: 比较两个代数式的大小,作差后在变形的过程中一般要分解因式,变形的结果有时写成几个非负数或非正数的和的形式,有时这两者结合起来用. 注意本题的结果常常作为结论来用.

例 2 若 $a>b>0$,且$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$,则 m 的取值范围是 【　】

A. $m\in\mathbf{R}$　　B. $m>0$　　C. $m<0$　　D. $-b<m<0$

解: 由$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$知,$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}>0$.

通分,得$\frac{(b-a)m}{b(b+m)}>0$.

$\because\quad a>b>0$,$\therefore\quad b-a<0$. 若$\frac{(b-a)m}{b(b+m)}>0$ 成立,则$\frac{m}{b+m}<0$,得 $-b<m<0$.

答案为 D.

点评: 比较法依照题目已知条件与待求结论可作差比较,此题灵活运用了 $a>b$,则 $a-b>0$.

例 3 对于实数 a,b,c,判断下列命题的真假.

(1) 若 $a>b$,则 $ac<bc$.

(2) 若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$.

(3) 若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$.

(4) 若 $a<b<0$,则 $|a|>|b|$.

(5) 若 $c>a>b>0$,则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

(6) 若 $a>b$,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $a>0,b<0$.

分析: 若要判断上述命题的真假,依据就是实数的基本性质及实数运算的符号法则,还有就是不等式的基本性质,经过合理的逻辑推理即可判断.

解: (1) $\because\quad c$ 的正、负或是否为零未知,因而判断 ac 与 bc 的大小缺乏依据,故该命题是假

命题.

(2)由 $ac^2>bc^2$ 知,$c\neq0,c^2>0$,$\therefore\ \dfrac{1}{c^2}>0$.故该命题为真命题.

(3)由 $\begin{cases}a<b\\a<0\end{cases}\Rightarrow a^2>ab$,又由 $\begin{cases}a<b\\b<0\end{cases}\Rightarrow ab>b^2$,$\therefore\ a^2>ab>b^2$.故该命题为真命题.

(4)两个负实数,数小的离原点远,故绝对值反而大.故该命题为真命题.

(5)$c>a>b>0\Rightarrow0<c-a<c-b\Rightarrow\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{c-b}>0$,$\therefore\ \dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$.故该命题为真命题.

(6)由已知条件知:

$$\left.\begin{aligned}&a>b\Rightarrow a-b>0\\&\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0\Rightarrow\frac{b-a}{ab}>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow ab<0,$$

又 $a>b$,$\therefore\ a>0,b<0$.故该命题为真命题.

点评:上述判断真假命题的练习可以使我们熟悉不等式的基本性质,更好地掌握性质定理及其推论的条件和结论.如问题(1)~(3)主要考查了对定理4的理解,这是应用定理4最易出错的地方,即在不等式的两边同乘(除)以一个数时,必须能确定该数是正数、负数或零,否则,结论不确定.问题(5)(6)涉及两个已知数的倒数间的关系,由定理4可推导出结论.

另外,若要判断命题是真命题,应说明理由或进行证明,推理过程应紧扣有关定理、性质等;若判断命题是假命题,只需举一反例.

例4　已知 $a>0$,且 $a\neq1$,$m>n>0$,比较 $A=a^m+\dfrac{1}{a^m}$ 和 $B=a^n+\dfrac{1}{a^n}$ 的大小.

分析:作差后与零比较大小时,应充分考虑其结构特点,同时还要考虑用指数函数的性质.

解:
$$\begin{aligned}A-B&=\left(a^m+\frac{1}{a^m}\right)-\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)=(a^m-a^n)+\left(\frac{1}{a^m}-\frac{1}{a^n}\right)\\&=(a^m-a^n)+\frac{a^n-a^m}{a^m\cdot a^n}=\frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^{m+n}}.\end{aligned}$$

$\because\ a>0$,$\therefore\ a^{m+n}>0$.

①当 $a>1$ 时,$\because\ m>n>0$,$\therefore\ a^m>a^n,a^{m+n}>a^0=1$,

$\therefore\ A-B>0$,即 $A>B$.

②当 $0<a<1$ 时,$\because\ a^m<a^n,a^{m+n}<a^0=1$,

$\therefore$ 仍有 $A-B>0$,即有 $A>B$.

综上所述,只要 $a>0$ 且 $a\neq1$,都有 $A>B$.

点评:(1)两个实数比较大小,通常用作差法,作差法的步骤:①作差;②变形;③判断差的符号;④结论.概括为"三步,一结论",其中"判断差的符号"是目的,"变形"是关键,常采用配方、因式分解、通分、有理化等恒等变形手段.

(2)由于指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的单调性与底数 a 有关,故必须分 $a>1$ 及 $0<a<1$ 两种情况来讨论,一般来说,结果会随 a 的取值不同而不同,但本题巧合的是"(a^m-a^n) 与 $(a^{m+n}-1)$"始终同号.

例5　已知 $-\dfrac{1}{2}<a<0$,$A=1+a^2$,$B=1-a^2$,$C=\dfrac{1}{1+a}$,$D=\dfrac{1}{1-a}$.试将 A,B,C,D 按从大到

小的顺序排列.

分析:要比较大小的几个数都用 a 表示,题目中已给出了 a 的取值范围,不妨从中取一个值,看一看相应的 A,B,C,D 值的大小,然后用比较法比较即可.

解:因为 $-\frac{1}{2}<a<0$,不妨取 $a=-\frac{1}{4}$,则 $A=\frac{17}{16},B=\frac{15}{16},C=\frac{4}{3},D=\frac{4}{5}$,

由此猜想:$D<B<A<C$. 只需证明 $C-A>0,A-B>0,B-D>0$ 即可.

$\because\quad B-D=(1-a^2)-\frac{1}{1-a}=\frac{a^3-a^2-a}{1-a}=\frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}$, $-\frac{1}{2}<a<0$, $\therefore\quad 1-a>0$,

又 $\quad -1<a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$, $\therefore\quad \frac{1}{4}<\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<1$,故 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<0$,

$\therefore\quad \frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}>0$, $\therefore\quad B>D$.

又 $\quad A-B=1+a^2-(1-a^2)=2a^2>0$, $\therefore\quad A>B$.

$C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a^2)=\frac{-a(a^2+a+1)}{1+a}=\frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}$,

$\because\quad 1+a>0,\ -a>0,\ \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

$\therefore\quad \frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}>0$, $\therefore\quad C>A$.

综上可得 A,B,C,D 四个数的大小顺序是:$C>A>B>D$.

点评:该题用比较法将 A,B,C,D 的顺序给出. 比较法判断两个实数大小的步骤是:作差—变形—判断符号—结论. 该题是一个开放题,为了探索一个解题的方向,我们用了赋值法,即给问题中字母以一个或一组特殊的数值(允许范围内的值),使抽象的数学式子具体化、要解决的问题明朗化,赋值法是解选择题、开放题、应用题等的常用方法.

本节精练

练　习　一

一、选择题

1. 已知 $x>2$,则　【　　】

A. $x^3+2>2x^2+x$　　B. $x^3+2<2x^2+x$

C. $x^3+2\leqslant 2x^2+x$　　D. 以上都不对

2. 已知 a,b 都为正数,则　【　　】

A. $a+b>2\sqrt{ab}$　　B. $a+b<2\sqrt{ab}$　　C. $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$　　D. $a+b\leqslant 2\sqrt{ab}$

3. 已知 $x\neq 1$,则　【　　】

A. $x^2+y^2\geqslant 2x-6y-10$　　B. $x^2+y^2>2x-6y-10$

C. $x^2+y^2\leqslant 2x-6y-10$　　D. $x^2+y^2<2x-6y-10$

4. 不等式①$a^2+2>2a$，②$a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$，③$a^2+b^2>ab$ 中恒成立的个数是　【　　】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 若 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$，$M=x^2+y^2-4x+2y$，$N=-5$，则 M 与 N 的大小关系是　【　　】

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 不能确定

6. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a\neq b$，令 $M=a^4+b^4$，$N=a^3b+b^3a$，则 M 与 N 的大小关系是　【　　】

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 不能确定

二、填空题

1. 若 $f(x)=3x^2-x+1$，$g(x)=2x^2+2x-2$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 $f(x)$____$g(x)$.

2. 对于下列结论，其中正确命题的序号是__________.

①若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　　②若 $a>b$，则 $\frac{b}{a}<1$

③若 $a^2>b^2$ 且 $a<0,b<0$，则 $a<b$　　④$a^2+b^2+ab\geqslant 0$

3. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $x^2+y^2-2x-4y+5$ ________ 0.（填等号或不等号）

4. a,b 是两个实数，则 a^2+b^2 与 $2ab$ 的大小关系是 a^2+b^2 ____ $2ab$.

练习二

一、选择题

1. 若 λ,μ 是实数，则 $\lambda>\mu>0$ 是 $\lambda^2>\mu^2$ 的　【　　】

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 $a+b>0,b<0$，则 $a,b,-a,-b$ 的大小关系为　【　　】

A. $a>b>-b>-a$　　B. $a>-b>-a>b$

C. $a>-b>b>-a$　　D. $a>b>-a>-b$

3. $f(a,b)=4a^2+b^2+4a-2b$ 的值与 -2 的大小关系是　【　　】

A. $f(a,b)>-2$　　B. $f(a,b)<-2$　　C. $f(a,b)=-2$　　D. $f(a,b)\geqslant -2$

4. 角 α,β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是　【　　】

A. $-\pi<\alpha-\beta<0$　　B. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$

C. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$　　D. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$

5. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，那么下列命题正确的是　【　　】

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　B. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $\left.\begin{matrix}a^3>b^3\\ab<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D. $\left.\begin{matrix}a^2>b^2\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

6. 下列命题

①若 $x>6$，则 $x^2>36$；②若 $x<6$，则 $x^2<36$；③若 $x^2>36$，则 $x>\pm 6$；④若 $x^2<36$，则 $x<6$；⑤若 $x>0$，则 $x\geqslant 0$；⑥若 $x\geqslant 0$，则 $x>0$.

其中正确的是　【　　】

A. ①②⑤　　B. ①③⑤　　C. ①④⑤　　D. ①④⑥

二、填空题

1. 已知不等式：①$x+6.5>x+4$；　②$-t<1-t^2$；　③$a^2>2ab-b^2$；　④$2x^2-x+1<0$；⑤$\log_5(x^2+1)\geqslant 0$；⑥ $0.5^{-x}<0$. 其中不等式________是绝对不等式，________是条件不等式，________是矛盾不等式.

2. 若$f(x)=x+b$，则$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$____$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.（填等号或不等号）

3. 已知$0<a<\dfrac{1}{2}$，$A=1-a^2$，$B=1+a^2$，$C=\dfrac{1}{1-a}$，$D=\dfrac{1}{1+a}$，则A,B,C,D的大小顺序是________.

4. ①若$a>b$，则$b<a$恒成立；②若$a>b$，则$a^2>b^2$恒成立；③若$0<a<1$，则$\log_{\frac{1}{3}}a>\log_3 a$成立；④若$1\leqslant x\leqslant 2$，则函数$f(x)=x^2+2x+3$的最小值是2.
以上命题，你认为正确的是________.

三、解答题

1. 已知$a\leqslant 0$，且$a\neq -1$，比较式子$\dfrac{1}{1+a}$与$1-a$的值的大小.

2. 若$f(x,y)=x^4+y^4$，$g(x,y)=x^3y+xy^3$，求证$f(x,y)$的值不小于$g(x,y)$的值.

3. 设满足函数$f(x)=\log_a\dfrac{1-x}{1+x}$的$x$的值的集合为$S$，在$S$中定义一种运算$\triangle$，使得$x\triangle y=\dfrac{x+y}{1+xy}$；若$x\in S$，$y\in S$，那么$x\triangle y\in S$.

练习三

一、选择题

1. 下列命题：①若 $x>y$，且 x 与 y 同号，则 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$；②若 $\frac{1}{x}>1$，则 $x<1$；③$x\geqslant y$，$xz\geqslant yz$，则 $z\geqslant 0$；④若 $x>y$，$n\in\mathbf{N}$，则 $x^{2n+1}>y^{2n+1}$，其中真命题的个数为　【　　】

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 给出下列命题，其中正确的是　【　　】

①$ax>b$，则 $x>\frac{b}{a}$；　②$a^2x>a^2y$，则 $x>y$；　③$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则 $ab<b^2$；　④$a<b<0$，则 $a^2>b^2$，$a^3<b^3$.

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ②③④

3. 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$M=\log_a(a^3+1)$，$N=\log_a(a^2+1)$，则 M 与 N 的大小关系是　【　　】

A. $M<N$　　B. $M>N$　　C. $M=N$　　D. 不能确定

4. 若开口向上的抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $f(0)<0$，$f(1)=0$，则下列不等式中恒成立的是　【　　】

A. $ab>bc$　　B. $ac>bc$　　C. $2a>c-b$　　D. $a|b|>c|b|$

5. 若 a,b,c 是实数；且 $c<b$，a,b,c 成等差数列，则 $\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}$ 为　【　　】

A. 非 0　　B. 正数　　C. 负数　　D. 非负数

6. 若 $d>0$，$d\neq 1$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，则 $1+d^{m+n}$ 与 d^m+d^n 的大小关系是　【　　】

A. $1+d^{m+n}>d^m+d^n$　　B. $1+d^{m+n}<d^m+d^n$　　C. $1+d^{m+n}\geqslant d^m+d^n$　　D. 不能确定

二、填空题

1. 若 $x^2<y^2$，则 $|x|$________$|y|$.（填等号或不等号）

2. 下列命题是真命题的有________.

①若 $a>b$，则 $a\lg\frac{1}{2}>b\lg\frac{1}{2}$；　②若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $a^2-\sqrt{d}>b^2-\sqrt{c}$；　③若 $a>b$，且 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$；　④若 $\alpha\in\left[-\pi,\frac{2\pi}{3}\right]$，则 $1-\sin\alpha>0$；　⑤$a-b<c$，$b>c$，则 $a-2b>0$；　⑥若 a,b 为正数，则 $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

3. 若 a,b,c,d 满足：条件①$a>b>0$；条件②$d<c<0$. 则 $\frac{\sqrt{a}}{c}$ 与 $\frac{\sqrt{b}}{d}$ 的大小关系是________.

三、解答题

1. 已知 a,b,c 为三角形三边，且 $a^2+b^2=c^2$，$n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n>2$，求证 $c^n>a^n+b^n$.

2. 设 p,q,s 三个实数满足以下四个条件：① $q<0$；② $|s|>|q|>|p|$；③ $p\neq 0$；④ $s\sqrt{\dfrac{pq^2}{s}}=q\sqrt{ps}$，试判断 p,q,s 三个数的大小关系.

3. 已知 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1$，$a>b>0$，$d>c>0$. 比较 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}}$ 与 $\left(\dfrac{b}{d}\right)^{\frac{m}{n}}$ 的大小，先猜测，再证明.

6.2　算术平均数与几何平均数

本节精讲

例1　已知：x,y 为正数，且 $x+4y=1$，求证：

(1) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=8+\dfrac{16y}{x}+\dfrac{x}{y}$；(2) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant 16$.

分析：寻找已知条件与特征结论之间的联系，以重要的不等式或其变形作桥梁.

证明：(1) $\because$　$x+4y=1$，$\therefore$　$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(x+4y)=8+\dfrac{16y}{x}+\dfrac{x}{y}$，

即 $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=8+\dfrac{16y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

(2) **解法一**：$\because$　x,y 为正数，由 (1) 可知

$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=8+\dfrac{16y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqslant 8+2\sqrt{\dfrac{16y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=16$，

即有 $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant 16$.

解法二：$\because$　x,y 为正数，$x+4y=1$，

$\therefore$　$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{x}\cdot\frac{1}{y}}=4\sqrt{\frac{1}{xy}}$.

又　$x+4y\geqslant 2\sqrt{x\cdot 4y}=4\sqrt{xy}$，

$\therefore$　$\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+4y)\geqslant 16\frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot\sqrt{xy}=16.$

$\therefore$　$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 16.$

点评：①在不等式证明中，要注意到"1"的妙用，本题中的$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=8+\frac{16y}{x}+\frac{x}{y}$的证明关键应用了 $x+4y=1$.

②当$\frac{16y}{x}=\frac{x}{y}$且 $x+4y=1,x>0,y>0$，即当 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{8}$时(2)中的不等式取等号.

例 2　已知 $a>0,b>0$ 且 $a+b=1$，求$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值.

分析：直接利用重要不等式很容易出现错误，必须展开后才能得到正确的结论.

解：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$.

由于$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，当且仅当 $a=b$ 时等式成立. 又　$a+b=1$，$\therefore$　$ab\leqslant\frac{1}{4}$.

由于函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$上为单调递减函数，

$\therefore$　当 $ab=\frac{1}{4}$时，$ab+\frac{1}{ab}$最小值为$\frac{17}{4}$. 故 $ab+\frac{1}{ab}\geqslant\frac{17}{4}$.

$\therefore$　$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$. 即其最小值为$\frac{25}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时取最小值.

点评：本题是一道很容易出现错误的习题，主要是在应用重要不等式时必须具备一正、二定、三等. 其中 $ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2$ 时，ab 必须为 1，而 ab 取不到 1，所以$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值不是 4.

例 3　若 a,b,c 均为正数，求证：$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

分析：由于 $a^4=(a^2)^2$，因此可以利用公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 来证明.

证明：$\because$　$a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2,b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2,c^4+a^4\geqslant 2c^2a^2$，

三式相加，可得 $2(a^4+b^4+c^4)\geqslant 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$.

$\because$　$a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2(ab)(bc)=2b^2ac,b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2(bc)(ca)=2c^2ab$，

$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2(ca)(ab)=2a^2bc$，$\therefore$　$2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)\geqslant 2b^2ac+2c^2ab+2a^2bc$.

$\therefore$　$2(a^4+b^4+c^4)\geqslant 2abc(a+b+c)$.

即得 $a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

点评：在不等式的证明中，把三个数的和看成两两相加的一半，然后利用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ $(a,b\in\mathbf{R})$来证明不等式是不等式证明的常用方法.

例 4　求证：$\log_{0.5}\left(\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^b}\right)\leqslant a+b-1$.