工学、经济学
硕士生入学考试

数学复习指南

曾贻德 主编

机械工业出版社

工学、经济学硕士生入学考试

数学复习指南

曾贻德 主编

张俊智 涂蕙萱 编

机械工业出版社

本书是根据国家教育委员会研究生司于1986年10月颁发的1987年全国工学、经济学硕士生入学考试的《数学复习大纲》的要求编写的。

本书内容共分三部分：Ⅰ、高等数学，Ⅱ、工程数学，Ⅲ、1987年、1988年硕士生入学考试全国统一数学试题、解答及评分标准。高等数学共分七章，工程数学共分三章，每章开头列出了《复习大纲》要求的内容，每节分为内容摘要和历届试题选解两部分。摘要中扼要地介绍了基本概念和基本理论。历届试题选解共选取了全国高校历届试题1000多个，内容全面，基本上覆盖了高等数学及工程数学全部考试内容，并给出了详细解答，解法简捷、明了易懂，便于掌握。是报考硕士生的一本数学复习指南，也是高等工科院校数学教学的一本有价值的参考资料。

工学、经济学硕士生入学考试

数学复习指南

曾贻德　主编

责任编辑：蓝火金　版式设计：胡金瑛

封面设计：田淑文

*

械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张$36^{3}/_{4}$　·字数911千字

1988年10月北京第一版·1988年10月北京第一次印刷

印数　0,001—1,900·定价：17.50元

*

ISBN 7-111-00653-4/N·7

前　言

本书是根据国家教委研究生司制定的1987年全国工学、经济学硕士生入学考试《数学复习大纲》并结合几年来我校举办"报考研究生辅导班"的实际需要编写的，它可以作为考生的数学复习指南，也可作为工学、经济学本科生、电大、夜大、函授生以及自学青年复习、巩固高等数学和工程数学的复习参考材料，还可作为高等数学教师和科技工作者的参考资料。

依据《复习大纲》的要求，全书共分三个部分：Ⅰ、高等数学，Ⅱ、工程数学、Ⅲ、1987年、1988年硕士生入学考试全国统一数学试题、解答及评分评准。前两部分，即高等数学和工程数学，是书的主体，其中工程数学只编入了《复习大纲》要求的"线性代数"、"概率论"、"复变函数"。现行高等工科院校普遍开设的"数学物理方程与特殊函数"、"积分变换"、"向量分析与场论"等三个部分，由于篇幅所限，未能编进去。

本书的结构以方便考生复习为原则，每章开头列出《复习大纲》要求的内容，每节又分内容摘要和历届试题选解两部分。在摘要中简明地叙述了基本概念，基本理论、基本方法和技巧，使考生复习时抓住要点，试题选解是我们从收集到的1978年至1986年九届全国各类高校或科研单位招收研究生入学试题中精选出1000多题，全部给出解答。其中对已有的解答多数都进行了验算。

曾贻德为本书主编，除编写高等数学第一至第四章外，还对全书进行了校审；涂蕙萱编写高等数学五、六、七章；张俊智编写工程数学全部三章。

由于时间仓促，水平有限，不妥之处恳切希望读者批评指正。

编者1987年7月于北方交通大学

目　录

Ⅰ、高等数学

第一章　函数、极限、连续 ……………… 1

§1.1　一元函数 ……………… 1

§1.2　一元函数的极限 ……………… 5

§1.3　一元函数的连续性 ……………… 34

第二章　一元函数的微分学 ……………… 58

§2.1　导数与微分 ……………… 58

§2.2　中值定理 ……………… 84

§2.3　导数的应用 ……………… 102

第三章　一元函数的积分学 ……………… 131

§3.1　不定积分 ……………… 131

§3.2　定积分 ……………… 153

第四章　多元函数的微分学 ……………… 196

§4.1　多元函数的极限与连续 ……………… 196

§4.2　偏导数与全微分 ……………… 201

§4.3　偏导数的应用 ……………… 241

第五章　多元函数的积分学 ……………… 268

§5.1　二重积分 ……………… 268

§5.2　三重积分 ……………… 289

§5.3　曲线积分 ……………… 304

§5.4　曲面积分 ……………… 318

第六章　无穷级数 ……………… 330

§6.1　常数项级数 ……………… 330

§6.2　函数项级数 ……………… 339

§6.3　幂级数 ……………… 343

§6.4　傅立叶(Fourior)级数 ……………… 362

第七章　常微分方程 ……………… 370

§7.1　微分方程的一般概念 ……………… 370

§7.2　一阶微分方程 ……………… 372

§7.3　可降阶的高阶微分方程 ……………… 385

§7.4　线性微分方程 ……………… 389

§7.5　常系数线性微分方程组 ……………… 403

Ⅱ、工程数学

第一章　线性代数 ……………… 409

§1.1　n阶行列式 ……………… 409

§1.2　矩阵 ……………… 411

§1.3　线性方程组 ……………… 421

§1.4　线性空间与线性变换 ……………… 431

§1.5　二次型 ……………… 449

第二章　概率论 ……………… 461

§2.1　事件与概率 ……………… 462

§2.2　随机变量及其分布 ……………… 472

§2.3　二元随机变量及其分布 ……………… 480

§2.4　随机变量的数字特征 ……………… 487

第三章　复变函数 ……………… 499

§3.1　复变函数概念 ……………… 499

§3.2　复变函数的导数 ……………… 502

§3.3　初等函数 ……………… 506

§3.4　复变函数的积分 ……………… 509

§3.5　级数 ……………… 516

§3.6　留数 ……………… 523

§3.7　保角映射 ……………… 529

Ⅲ、1987年、1988年硕士生入学考试全国统一数学试题、解答及评分标准

一、1987年全国统一数学试题、解答及评分标准 ……………… 535

试卷一 ……………… 535

试卷二 ……………… 542

试卷三 ……………… 545

试卷四 ……………… 549

试卷五 ……………… 556

二、1988年全国统一数学试题、解答及评分标准 ……………… 561

试卷一 ……………… 561

试卷二 ……………… 568

试卷三 ……………… 569

试卷四 ……………… 573

试卷五 ……………… 581

Ⅰ、高 等 数 学

第一章　函数、极限、连续

复习大纲● 要求的内容

函数：函数的定义．显函数和隐函数．函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性．反函数及其图形．基本初等函数．复合函数．初等函数．双曲函数与反双曲函数．

极限：数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义．数列收敛的条件．函数极限的 $\varepsilon-X$ 定义．函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义．函数的左右极限．不等式取极限．无穷小与无穷大的定义．无穷小与函数极限的关系．极限的四则运算．两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$．无穷小的比较．等价无穷小．

函数的连续性：函数连续的定义．间断点．连续函数的和、差、积、商的连续性．连续函数的反函数的连续性．连续函数的复合函数的连续性．基本初等函数和初等函数的连续性．闭区间上连续函数的最大值、最小值定理和介值定理．

§1.1　一 元 函 数

一、内容摘要

函数的定义：若对于变量 x 在其变化范围内每取定一个数值时，量 y 按照一定的法则总有一个或多个确定的数值与之对应，则称 y 为 x 的函数．记作 $y=f(x)$．x 称为自变量，函数 y 有时又称为因变量．

函数的定义包含三个因素：（1）定义域—自变量 x 的取值范围；（2）对应关系—因变量 y 与自变量 x 的依存关系：$y=f(x)$；（3）值域—因变量 y 所能取得值的范围．

两个函数当且仅当其定义域和对应关系完全相同时才恒等，若在（1）、（2）两个因素中有一个不相同就是两个不同的函数．因此，（1）、（2）两个因素是构成函数的两个要素．

显函数和隐函数：因变量 y 可以由自变量 x 用数学式子 $y=f(x)$ 直接表示出来的函数称为显函数．若函数关系包含在一个方程 $F(x,y)=0$ 中，自变量 x 与因变量 y 无明显区分，则称为隐函数．

函数的有界性：若存在正常数 M，对于函数 $f(x)$ 的定义域 D 上的所有 x 值，都使得不等式：$|f(x)|<M$ 成立．则称 $f(x)$ 为定义域 D 上的有界函数．若这样的正常数

● 复习大纲是指国家教育委员会研究生司于1986 10 颁布的1987年全国工学、经济学硕士生入学考试的《数学复习大纲》．

M不存在，则称$f(x)$为定义域上的无界函数。

函数的单调性：若对于区间$[a, b]$内的任意两点$x_1<x_2$，都有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$〔或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$〕，则称$f(x)$在区间$[a, b]$内为单调增加〔或单调减少〕。单调增加的函数与单调减少的函数统称为单调函数。

函数的奇偶性：若对于$f(x)$的定义域D内的任意x恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若对于$f(x)$的定义域内的任意x恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。

函数的周期性：若存在一个不为零的常数T，使得在$f(x)$的定义域D内的任何x值，恒有$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为以T为周期的周期函数。且对于任何整数n，恒有$f(x+nT)=f(x)$。一般所谓周期函数的周期是指最小正周期。

反函数：若在已给函数$y=f(x)$中，把y看作自变量，x看作因变量，则由关系$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$称为函数$f(x)$的反函数。而$f(x)$称为直接函数。反函数$x=\varphi(y)$与直接函数$y=f(x)$互为反函数。习惯上把自变量记作x，因变量记作y，则反函数$x=\varphi(y)$就写成$y=\varphi(x)$。反函数$y=\varphi(x)$的图形与直接函数$y=f(x)$的图形对称于直线$y=x$。

复合函数：若y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\varphi(x)$，当x在某一区间上（定义域内的一个部分区间或定义域）取值时，相应的u值可使y有定义，则称y是x的复合函数。记作$y=f[\varphi(x)]$，而变量u称为中间变量。

基本初等函数：幂函数—$y=x^\mu$（μ为常数）；指数函数—$y=a^x$（a为常数，且$a>0$，$a\neq1$）；对数函数—$y=\log_a x$（a为常数，且$a>0$，$a\neq1$）；三角函数——$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\operatorname{tg} x$、$y=\operatorname{ctg} x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$；反三角函数——$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\operatorname{arctg} x$、$y=\operatorname{arcctg} x$、$y=\operatorname{arcsec} x$、$y=\operatorname{arccsc} x$；其主值分支分别为$y=\arcsin x$、$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$；$y=\arccos x$、$0\leqslant y\leqslant\pi$；$y=\operatorname{arctg} x$、$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$；$y=\operatorname{arcctg} x$、$0<y<\pi$；$y=\operatorname{arcsec} x$、$0\leqslant y\leqslant\pi$；$y=\operatorname{arccsc} x$、$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$。

初等函数：凡是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的复合步骤而构成的一个数学式子表示的函数称为初等函数。

双曲函数：双曲正弦——$y=\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$、双曲余弦——$y=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$、双曲正切——$y=\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$、双曲余切——$y=\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$、双曲正割——$y=\operatorname{sech} x=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$、双曲余割——$y=\operatorname{csch} x=\frac{1}{\operatorname{sh} x}$。

双曲函数的基本公式：

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,\quad \operatorname{sech}^2 x+\operatorname{th}^2 x=1,\quad \operatorname{cth}^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1$$

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$$

$$\text{th}(x \pm y) = \frac{\text{th}\, x \pm \text{th}\, y}{1 \pm \text{th}\, x\, \text{th}\, y}$$

$$\text{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \text{cth}\, x\, \text{cth}\, y}{\text{cth}\, x \pm \text{cth}\, y}$$

反双曲函数：反双曲正弦——$y = \text{Arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$、反双曲余弦——$y = \text{Arch}\, x = \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1})(|x| \geqslant 1)$、反双曲正切——$y = \text{Arth}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$、反双曲余切——$y = \text{Arcth}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}(|x| > 1)$、反双曲正割——$y = \text{Arseh}\ x = \pm\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}(0 < |x| \leqslant 1)$、反双曲余割——$y = \text{Arcsch}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}(x \neq 0)$。

反双曲函数的基本公式：

$$\text{Arsh}\, x \pm \text{Arsh}\, y = \text{Arsh}\,(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2})$$
$$\text{Arch}\, x \pm \text{Arch}\, y = \text{Arch}[xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}]$$
$$\text{Arth}\, x \pm \text{Arth}\, y = \text{Arth}\frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

二、历届试题选解

1．已知 $f(x) = \frac{1}{1+x}$，则 $f(f(x))$的定义域是__________。

（武汉钢铁学院，82）

解：∵ $f(f(x)) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}}$

∴ $1 + x \neq 0$ 及 $1 + \frac{1}{1+x} \neq 0$。即是，$x \neq -1$ 及 $x \neq -2$，故 $f(f(x))$ 的定义域是$\{x \mid x \in (-\infty, +\infty);\ x \neq -1;\ x \neq -2\}$。

2．设函数 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，函数$[x]$表示不超过x的最大整数，试求 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$的定义域。

（西北轻工业学院，85）

解：∵ $f(x)$的定义域为$(0,1)$

∴ $0 < \frac{[x]}{x} < 1$ 故 $x > 1$，且 $x \neq k$ $(k = 2, 3, \cdots)$。所以，$f\left(\frac{[x]}{x}\right)$的定义域是$\{x \mid x > 1$，且 $x \neq 2, 3, \cdots\}$。

3．设 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2}}$。求：(1) $f(x)$的定义域；(2) $\frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2 = ?$

（西北工业大学，85）

解：(1) ∵ $f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \sqrt{2x}, & x > 0 \end{cases}$

∴ 其定义域是$(-\infty, +\infty)$。

(2) ∵ $f[f(x)]=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x^2}\right)^2}}$

$$=\sqrt{2\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}=\sqrt{2f(x)}$$

∴ $\frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2=\frac{1}{2}[\sqrt{2f(x)}]^2=\frac{1}{2}[2f(x)]=f(x)$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1;\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$。

(南京邮电学院，85)

解：当$|x|<1$时，$f[g(x)]=f(2-x^2)=0$，当$|x|=1$时，$f[g(x)]=f(1)=1$，当$|x|>1$时，$f[g(x)]=f(2)=0$

∴ $f[g(x)]=\begin{cases}0, & |x|\neq 1\\ 1, & |x|=1\end{cases}$

5. 设函数

$f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1;\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(x^2+5)\cdot f(\sin x)-5f(4x-x^2-6)$。

(海军工程学院，86)

解：$x^2+5>1$，∴ $f(x^2+5)=1$；$|\sin x|\leqslant 1$，

∴ $f(\sin x)=\sin x$；$4x-x^2-6=-[x^2-4x+6]=-[(x-2)^2+2]\leqslant -2$，

∴ $f(4x-x^2-6)=-1$。于是

$f(x^2+5)\cdot f(\sin x)-5f(4x-x^2-6)=1\cdot\sin x-5\cdot(-1)=\sin x+5$。

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其它}。\end{cases}$ $\varphi(x)=3x-1$。求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$。

(大连海运学院，86)

解：$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a=3x-1\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 即是

$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & \frac{a+1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{b+1}{3}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$\varphi[f(x)]=\begin{cases}3\left(\frac{1}{b-a}\right)-1, & a\leqslant x\leqslant b\\ 3\cdot 0-1, & \text{其它}\end{cases}$ 即是

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases}\dfrac{3}{b-a}-1, & a\leqslant x\leqslant b\\ -1, & \text{其它}\end{cases}$$

7. 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$，则 $f(x)=$ ______。

（西北轻工业学院，86）

解：∵ $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3=x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+1=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1$

∴ $f(x)=x^2+1$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{当}x<0;\\ 1, & \text{当}x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$。

（同济大学，84）

解：$f[f(x)]=\begin{cases}1+(1+x), & \text{当}1+x<0;\\ 1, & \text{当}1+x\geqslant 0.\end{cases}$ 即是

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & \text{当}x<-1\\ 1, & \text{当}x\geqslant -1\end{cases}$$

9. 求函数 $y=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ e^x, & x>0.\end{cases}$ 的反函数。

（东北重型机械学院，84）

解：∵ 当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=2x$，且 $-2\leqslant y\leqslant 0$，其反函数为 $y=\dfrac{x}{2}$，$-2\leqslant x\leqslant 0$；当 $x>0$ 时，$y=e^x$，且 $y>0$，其反函数为 $y=\ln x$。故所求的反函数为

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{当}-2\leqslant x\leqslant 0\\ \ln x, & \text{当}x>0\end{cases}$$

§1.2 一元函数的极限

一、内容摘要

数列 $\{x_n\}$ 极限的定义：若对于预先任意给定的正数 ε，都存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式：$|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立。则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to+\infty$ 时的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a。记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$。

若数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to+\infty$ 时没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的。

数列 $\{x_n\}$ 收敛的必要条件是：$|x_n|\leqslant M$。其充分条件是：$\{x_n\}$ 是单调有界数列。这也是判别数列极限存在的一个准则。另外还常用到下列两个判别准则：

若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足：（1）$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，$n=1,2,3,\cdots$；（2）$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$。则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$。

柯西(Cauchy)审敛原理：数列$\{x_n\}$的极限存在的充要条件是：对于预先任意给定的正数ε，都存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式：$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$对一切正整数$p$都成立。

当$x\to x_0$时，函数$f(x)$以A为极限的定义：

若对于预先任意给定的正数ε，都存在正数δ，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限．记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

而记号$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，表示当$x$小于$x_0$而趋向于$x_0$时，函数$f(x)$的极限为$A$。且称$A$为函数$f(x)$当$x\to x_0^-$时的左极限。记号$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，表示当$x$大于$x_0$而趋向于$x_0$时，函数$f(x)$的极限$A$。且称$A$为函数$f(x)$当$x\to x_0^+$时的右极限。

当$x\to x_0$时，函数$f(x)$极限存在的充要条件是：函数$f(x)$在x_0处的左、右极限都存在且相等。

当$x\to\infty$时，函数$f(x)$以A为极限的定义：

若对于预先任意给定的正数ε，都存在正数N，当$|x|>N$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限．记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

而记号$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，表示当$x>N$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$。即是，当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$的极限为$A$。记号$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，表示当$x<-N$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$。即是，当$x\to-\infty$时，函数$f(x)$的极限为$A$。

无穷小的定义：若$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0$（或$\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x)=0$），则称$\alpha(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时为无穷小。

无穷大的定义：若对于预先任意给定的正数M，都存在正数δ（或正数N），当$0<|x-x_0|$（或$|x|>N$）时，恒有$|G(x)|>M$，则称$G(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时为无穷大。记作$\lim\limits_{x\to x_0} G(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to\infty} G(x)=\infty$）。

而记号$\lim\limits_{x\to x_0} G(x)=+\infty$（或$-\infty$），表示当$x\to x_0$时，$G(x)$为正（或负）无穷大；记号$\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=+\infty$（或$-\infty$），表示当$x\to+\infty$时，$G(x)$为正（或负）无穷大；记号$\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)=+\infty$（或$-\infty$），表示当$x\to-\infty$时，$G(x)$为正(或负)无穷大。

无穷小与无穷大的关系：若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} G(x)=\infty$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{1}{G(x)}=0$；若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}$

$\alpha(x)=0$，且$\alpha(x)\neq 0$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$。

无穷小与函数极限的关系：若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，则$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$；若$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$A$为常数，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$。

有限个无穷小的和仍是无穷小。

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小。

极限的四则运算：若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$；$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$；当$B\neq 0$时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}$

无穷小的比较：设$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta(x)=0$

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小。记作$\beta(x)=0(\alpha(x))$；

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶无穷小；

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小；特别是，当$c=1$时，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小。记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$。

若$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，$\beta(x)\sim\beta'(x)$，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=A$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$$

两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

不等式取极限的两个性质：

性质 1　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$，则存在某个 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$。

性质 2　若在某个邻域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内 $f(x)\geqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则 $A\geqslant B$。

二、历届试题选解

关于极限定义的试题

1. 用"ε-N"方法证明：设 $\{x_n\}$，$n=1, 2, \cdots$ 为数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|=|a|$。

（湖南大学，80；长春光学精密机械学院，86）

证：$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\therefore$ $\forall$● $\varepsilon>0$，$\exists N$● >0。当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$。又 $\because$ $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$

$\therefore$ $||x_n|-|a||<\varepsilon$。

故 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|=|a|$。

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x+6)$，并根据定义证明之。

（武汉地质学院，82）

解：$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x+6)=\lim\limits_{x\to 2} x^2+\lim\limits_{x\to 2} 4x+\lim\limits_{x\to 2} 6=4+8+6=18$。

$$\because\ |x^2+4x+6-18|=|x^2+4x-12|=|x^2-4+4(x-2)|=|(x-2)(x+2)+4(x-2)|\leqslant|x-2||x+2|+4|x-2|$$
$$=(|x+2|+4)|x-2|$$

只要 $|x-2|<2$ 或 $0<x<4$ 时。$|(x^2+4x+6)-18|<10|x-2|$。

所以，$\forall\varepsilon>0$。$\exists\delta=\min\left(\dfrac{\varepsilon}{10},\ 2\right)$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有 $|(x^2+4x+6)-18|<\varepsilon$。故

$$\lim_{x\to 2}(x^2+4x+6)=18.$$

3. 根据定义证明极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{2x-1}=3$。

（甘肃工业大学，84）

证：$\forall\varepsilon>0$，欲使

$$|f(x)-A|=\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|<\varepsilon$$

成立。而

● $\forall\varepsilon$——对于一切 ε。
● $\exists N$——存在 N。

$$\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|=\left|\frac{3x-6x+3}{2x-1}\right|=\left|\frac{-3x+3}{2x-1}\right|=\frac{3|x-1|}{|2x-1|}$$

即是，要使得不等式

$$\frac{3|x-1|}{|2x-1|}<\varepsilon$$

成立。

又由于 $x\to1$，不妨假设 $|x-1|<\frac{1}{4}$，即

$$\frac{3}{4}<x<\frac{5}{4}$$

于是，$\frac{1}{2}<2x-1<\frac{3}{2}$，即 $|2x-1|>\frac{1}{2}$。因此，

$$\frac{3|x-1|}{|2x-1|}<\frac{3|x-1|}{\frac{1}{2}}=6|x-1|$$

所以，只要 $6|x-1|<\varepsilon$，即当 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{6}$ 时，不等式：$\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|<\varepsilon$ 成立。

故 $\forall\ \varepsilon>0$，总 $\exists\ \delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{6},\ \frac{1}{4}\right)$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{3x}{2x-1}-3\right|<\varepsilon$$

即是

$$\lim_{x\to1}\frac{3x}{2x-1}=3$$

关于不等式取极限及极限存在的试题

4．**证明：** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0$，$(p>0)$。

（西北电讯工程学院，82；华中工学院，84）

证： $\because$ 当 $n\leqslant x\leqslant n+p$ 时，$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{n}$，$\therefore$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{n}$。因此，$0\leqslant\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\leqslant\int_n^{n+p}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leqslant\int_n^{n+p}\frac{dx}{n}=\frac{x}{n}\Big|_n^{n+p}=\frac{p}{n}$。又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0$$

5．求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$。

（昆明工学院，82）

解： ∵ 当 $x>0$ 时，有 $0\leqslant\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\frac{3^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

∴ $0\leqslant\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant3\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0$

故 $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0$$

6．求 $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}}$。

（湘潭大学，82）

解： ∵ $0\leqslant\left|x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}}\right|\leqslant|x|$，$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$

∴ $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}}=0$

7．设 $a_k(k=1,2,\cdots,r)$ 为正常数，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_r^n}$。

（西安公路学院，83）

解： 设 $a=Max(a_1,a_2,\cdots,a_r)$，于是，$\frac{a_k}{a}\leqslant1$

∴ $a^n\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots+a_r^n\leqslant ra^n$

即 $$1\leqslant\left(\frac{a_1}{a}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_r}{a}\right)^n\leqslant r$$

$$1\leqslant\sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{a}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_r}{a}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{r}$$

又因 $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{r}=\lim_{n\to+\infty}r^{\frac{1}{n}}=r^0=1$$

所以 $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{a}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_r}{a}\right)^n}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{r}a_k^n}=\lim_{n\to+\infty}a\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{a_k}{a}\right)^n}=a\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{a_k}{a}\right)^n}$$
$$=a。$$

8．设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实常数，证明：$|a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n|\leqslant1$。

（山东海洋学院，84）

证： ∵ $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，∴ 当 $x\neq0$ 时，$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|$

于是，$\left|a_1\dfrac{\sin x}{x}+2a_2\dfrac{\sin 2x}{2x}+3a_3\dfrac{\sin 3x}{3x}+\cdots+na_n\dfrac{\sin nx}{nx}\right|\leqslant\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

又因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=1$，$(k=1,2,\cdots,n)$。所以，

$$\lim_{x\to 0}\left|a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin 2x}{2x}+3a_3\frac{\sin 3x}{3x}+\cdots+na_n\frac{\sin nx}{nx}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

$$\left|\lim_{x\to 0}\left[a_1\frac{\sin x}{x}+2a_2\frac{\sin 2x}{2x}+3a_3\frac{\sin 3x}{3x}+\cdots+na_n\frac{\sin nx}{nx}\right]\right|\leqslant 1$$

$$|a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n|\leqslant 1$$

9．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$。

（太原工业大学，85）

解：$$\frac{1}{4n}=\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0$

10．求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$。函数$[x]$表示不超过$x$的最大整数。

（西北轻工学院，85）

解：$\because\ \dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$，

$\therefore$ 当$x>0$时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$；当$x<0$时 $1-x>x\left[\dfrac{1}{x}\right]\geqslant 1$，而

$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$．于是 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$．

11．x_n由下列各式给定：$x_1=\sqrt{6}$，$x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$，$(n=2,3,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求其值。

（北京邮电学院，85）

证：由归纳法可证数列$\{x_n\}$有界：$0<x_n<6$，当$n>1$时，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}$$

由归纳法可证数列$\{x_n\}$是单调递增。

$\therefore$ 数列$\{x_n\}$的极限存在。设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$

于是，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}=A$。

又
$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{6+x_n}=\sqrt{6+\lim_{n\to+\infty} x_n}$$

所以
$$A=\sqrt{6+A},\quad A^2=6+A$$
$$A_1=-2,\quad A_2=3。A_1=-2\text{不合理。}$$

故
$$\lim_{n\to+\infty} x_n=3。$$

12．已知序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 满足（1）$a_1>\sqrt{a}$，a 为大于零的常数；（2）$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$，（$n=1,2,\cdots$）。试证：（1）$\{a_n\}$ 单调减少；（2）当 $n\to\infty$ 时，a_n 的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$。

（郑州工学院，83）

证：（1）$\because\ a_1>\sqrt{a}$，而 $a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{a}{a_1}\right)=\frac{a_1^2+a}{2a_1}>\frac{2a_1\sqrt{a}}{2a_1}=\sqrt{a}$，用数学归纳法，设 $a_k>\sqrt{a}$，则

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{a}{a_k}\right)=\frac{a_k^2+a}{2a_k}>\frac{2a_k\sqrt{a}}{2a_k}=\sqrt{a}$$

$\therefore$ 序列 $\{a_n\}$ 有界。又因 $a_n>\sqrt{a}$

$$\therefore\quad a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{a}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2-a}{a_n}\right)>0$$

因此，$a_n>a_{n+1}$，（$n=1,2,\cdots$），即 $a_1>a_2>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots>\sqrt{a}$

（2）由于序列 $\{a_n\}$ 是单调减少且有界，据序列存在准则，当 $n\to+\infty$ 时，序列 $\{a_n\}$ 的极限：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。

设 $\lim a_n=A\geqslant\sqrt{a}$，由于

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$$

$$\therefore\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n+a\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$$

$\therefore\quad A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，即 $A^2=a$，$A=\pm\sqrt{a}$，（$-\sqrt{a}$ 舍去）

$$\therefore\lim_{n\to+\infty} a_n=\sqrt{a}$$

运用罗必塔（L'Hospitale）法则求极限的试题