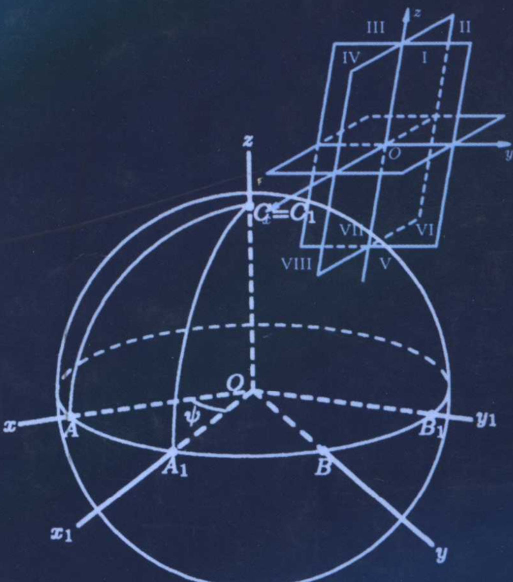
# 高等代数与解析几何（下）习题解析

王德生 著




辽宁师范大学出版社

# 《高等代数与解析几何(下)》习题解析

王德生 著

辽宁师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

《高等代数与解析几何(下)》习题解析/王德生著. —大连:
辽宁师范大学出版社,2002.6
ISBN 7-81042-577-3

I.高...　Ⅱ.王...　Ⅲ.数学-高等学校-教材
Ⅳ.H1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 055828 号

**辽宁师范大学出版社出版**

(大连市黄河路 850 号　邮政编码　116029　电话:0411—4206854)

大连海事大学印刷厂印刷　　辽宁师范大学出版社发行

---

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32　字数:382 千字　印张:15.25

印数:1～5000 册

2002 年 6 月第 1 版　　2002 年 6 月第 1 次印刷

---

责任编辑:李　立　　责任校对:赵玉琦

封面设计:李小曼　　版式设计:白　水

---

**定价**:22.00 **元**

# 前　言

高等代数、解析几何是大学数学系教学计划中两门重要的基础课。随着我国数学高等教育的发展和教学改革的不断深入，把这两门课合并成一门课的主张近年来得到了越来越多的从教者的认同和广泛响应。陈志杰教授主编的《高等代数与解析几何》就是新近出版的这方面的教材之一。

高等代数与解析几何合并成一门课后，在教学上必然要突破高等代数和解析几何课程原来各自教学的思想、模式和惯性，体现代数与几何的融会贯通与结合，无论对于教者还是对于学者，都会有一个适应的过程。为了教学上的方便和帮助学生学习这门刚刚开始合并的课程，在征得陈志杰教授的同意后，编者编写了这本教学参考用书。本书的章节与陈志杰教授主编的教材《高等代数与解析几何(下)》完全一致，所使用的符号也基本一致。本书每节包括四个部分：一、基本概念，二、主要结论，三、学习指导，四、习题分析与解法点评。对于那些内容较为深刻或者难度相对较大的习题，本书在加强习题分析和解法点评的基础上尽可能地给出两种或两种以上的解法，以期活跃数学思想和开阔解题思路。读者应配合上述教材使用本书，并应仔细阅读每节中的学习指导和习题分析与解法点评部分的内容，但不可以本书代替教材。对于学生读者，编者特别提醒，千万切忌抄录本书中习题的解法过程以代替自己的独立思考和作业。通过你自己积极思维，很可能就会想出比书中更好的方法和思路，这样做你会受益匪浅的。

王晶昕副教授参加了本书部分章节的编写工作。

本书的部分习题参考了华东师范大学数学系的相关资料。数学博

士后韩友发教授详细审阅了书稿，提出了许多很好的建议和修改意见。在此编者一并表示感谢。编者还特别感谢陈志杰教授所给予的支持和指导，并向他本人表示敬意。

由于时间仓促，加之水平所限，书中不当之处、拙方劣法在所难免，恳请读者斧正。

编　者

2002 年 6 月

# 目　录

# 第六章　几何空间的常见曲面

## §1　立体图与投影

### 一、基本概念

1. 中心投影　用过空间中一点的直(光)线束把组成一个物体的所有点映射到一个平面(叫做象平面)上,叫做这个物体向象平面的中心投影。

2. 平行投影　用空间中的平行直(光)线束把组成一个物体的所有点映射到一个平面(叫做象平面)上,叫做这个物体向象平面的平行投影,平行直(光)线束的方向叫做平行投影的方向.

3. 正投影、斜投影　平行投影当其投影方向与象平面垂直时叫做正投影,否则叫做斜投影.

4. 正投影的视角　在空间取定直角坐标系$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$.对于给定的正投影,过原点 $O$ 有唯一直线 $OM$ 与正投影的方向一致.直线 $OM$ 与 $x$ 轴的夹角记为 $\phi$,直线 $OM$ 在坐标平面 $xOy$ 上的投影 $OM'$ 与 $x$ 轴的夹角记为 $\theta$,则称这个正投影的视角为$(\theta,\phi)$.

5. 正等测投影　视角为$(45°,54.7°)$的正投影叫做正等测投影.

6. 正二等测投影　视角为$(20.7°,70.5°)$的正投影叫做正二等测投影.

7. 前视图、上视图、左视图　物体分别以$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,$(0,0)$,$(0,\frac{\pi}{2})$为视角的正投影的象依次叫做物体的前视图,上视图,左视图.

### 二、主要结论

1. 视角为$(\theta,\phi)$的正投影把空间坐标为$(x,y,z)$的点映为象平面

上坐标为$(x\sin\theta + y\cos\theta, -x\cos\phi\cos\theta - y\cos\phi\sin\theta + z\sin\phi)$的点.

**三、学习指导**

1. 正投影当其投影方向确定之后,象平面的方向就已经被确定了.因此正投影由投影视角所完全决定,而与象平面的具体空间位置无关.

**四、习题分析与解法点评**

1. 试分别用正等测投影,正二等测投影及 Maple 的默认视角投影画出边长等于 2,3,4 的长方体以及正四面体.

**解:**Maple 默认视角为$(45°,45°)$.

在正等测投影,正二等测投影和 Maple 的默认视角投影下边长等于 2,3,4 的长方体的投影图依次为

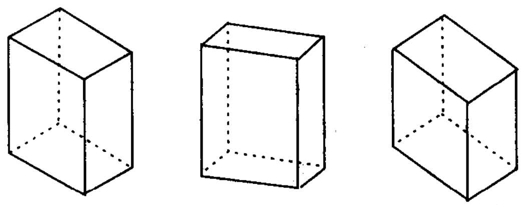


图 6-1-1(1)

正四面体的投影图依次为

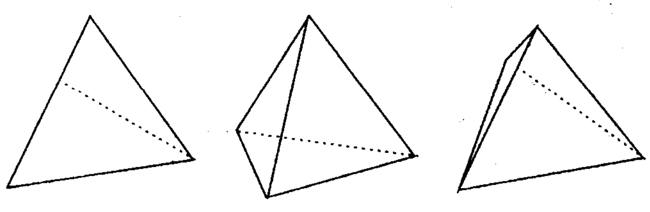


图 6-1-1(2)

# §2　空间曲面与曲线的方程

## 一、基本概念

1. 空间曲面及其一般方程　设 $F(x,y,z)$ 是一个三元实函数，在空间取定直角坐标系 $[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$，空间坐标满足方程

$$F(x,y,z)=0$$

的点的集合 $S$ 叫做空间曲面，这个方程叫做曲面 $S$ 的一般方程.

2. 代数曲面　如果 $F(x,y,z)$ 是关于 $x,y,z$ 的多项式函数(见第十一章 §1)，那么方程 $F(x,y,z)=0$ 所定义的曲面叫做代数曲面，多项式 $F(x,y,z)$ 的次数叫做这个代数曲面的次数.

3. 空间曲线　两个空间曲面的公共点的集合，即两个空间曲面的交线叫做空间曲线.

## 二、主要结论

1. 设 $S$ 是一个空间曲面，方程 $F(x,y,z)=0$ 是 $S$ 的方程当且仅当 $S$ 上的点的坐标都满足这个方程，坐标满足这个方程的点都在 $S$ 上.

2. 空间曲面也可以由参数方程

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}$$

定义，其中参数 $u,v$ 的定义域是平面的某个区域.

3. 空间曲面 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 的交线的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

4. 空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad a\leqslant t\leqslant b. \\ z=z(t), \end{cases}$$

5. 以原点为球心，半径为 $R$ 的球面的一般方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta, \\ y = R\sin\phi\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi. \\ z = R\cos\phi, \end{cases}$$

6. 以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心，$R$ 为半径的球面的一般方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0.$$

7. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$

(1) 当 $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > c$ 时定义一个球心在点$(-b_1, -b_2, -b_3)$，半径为$\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - c}$ 的球面；

(2) 当 $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c$ 时定义一个点$(-b_1, -b_2, -b_3)$；

(3) 当$_1^2 + b_2^2 + b_3^2 < c$ 时，方程的零点集是空集，我们说方程定义了一个虚球面.

8. 点的球面坐标　设 $P$ 为空间中一点(不在 $z$ 轴上). 过 $P$ 作坐标平面 $xOy$ 的垂线，得垂足 $M$. 把从 $x$ 轴正向到$OM$ 的角记为$\theta$，从 $z$ 轴正向到 $OP$ 的角记为$\phi(0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi)$，则 $\theta, \phi$ 唯一确定. 记 $|\overrightarrow{OP}| = R$，称$(R, \theta, \phi)$为点 $P$ 的球面坐标(因为点 $P$ 在原点为球心，$R$ 为半径的球面上). $z$ 轴上的点$(0,0,R)$的球面坐标规定为$(R,0,0)$.

## 三、学习指导

1. 解析几何只讨论和研究一次和二次代数曲面，即空间的平面和二次曲面.

2. 球面是最简单的二次曲面之一，球面是空间到定点距离等于定长的点的轨迹. 因此可以说决定球面的几何要素有两个，一个是球心，一个是半径，决定球面方程的代数量有四个，即三个一次项系数和常数项. 关于球面的基本性质必须清楚，例如与平面相交交线(截口)是圆，

过截圆圆心与截平面垂直的直线过球心等等.

3. 对空间曲面和曲线的参数方程要给予足够的重视.

**四、习题分析与解法点评**

1. 分别就下列条件求球面方程:

(1) 一直径的两端点为 $A(2,-3,5)$ 和 $B(4,1,-3)$;

(2) 球心在直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+8}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$ 上,且过点 $(2,-3,6)$ 和 $(6,3,-2)$;

(3) 过点 $(-1,2,5)$,且与三个坐标平面相切;

(4) 过点 $(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$,且包含圆 $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

**分析:**决定球面方程的要素是球心及球半径.题设条件都有球面上的点为已知,因此问题的关键在于求出球心.

**解:**(1) 显然球心在直径 $AB$ 的中点 $C$.由题设 $A(2,-3,5)$, $B(4,1,-3)$ 知球心 $C(3,-1,1)$.又 $A$ 在球面上,所以球面半径为 $|CA|=\sqrt{(2-3)^2+(-3+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{21}$.因此球面方程为

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21;$$

(2) 因为球心在直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+8}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$ 上,所以球心 $C$ 的坐标 $(x_0,y_0,z_0)$ 满足

$$x_0=4+2t, y_0=-8-4t, z_0=2+t.$$

又球面过 $(2,-3,6)$ 和 $(6,3,-2)$ 两点,所以球半径为

$$\sqrt{(4+2t-2)^2+(-8-4t+3)^2+(2+t-6)^2}$$
$$=\sqrt{(4+2t-6)^2+(-8-4t-3)^2+(2+t+2)^2}.$$

于是 $t=-2$,而球半径为 7,球心 $C(0,0,0)$.因此球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=49;$$

(3) 由于球面与三个坐标平面都相切,所以球面上的除三个切点外的所有点都与球心在同一卦限内,又点 $(-1,2,5)$ 在球面上,而此点显然不在坐标平面上,故不是切点.因此球心与点 $(-1,2,5)$ 在同一个卦限(第二卦限)内.设球半径为 $r$,则球心 $C$ 坐标为 $(-r,r,r)$.于是

$$\sqrt{(-r+1)^2+(r-2)^2+(r-5)^2}=r.$$

因此 $r=5, r=3$. 所以球面方程为

$$(x+5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25,$$

或者

$$(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9;$$

(4) 显然圆 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$ 在坐标平面 $xOy$ 上,圆心为原点$(0,0,0)$,半径为 2. 由于这个圆在球面上,所以球心在垂直于这个圆所在平面且过这个圆的圆心的直线上,即 $z$ 轴上. 因此可设球心坐标为$(0,0,c)$. 根据球心,上述圆的圆心及这个圆上任一点连线为一直角三角形,圆心为直角顶点,有球半径为$\sqrt{[(0-0)^2+(0-0)^2+(c-0)^2]+2^2}$. 另一方面,点$(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$ 在球面上,所以球半径为$\sqrt{(\sqrt{2}-0)^2+(\sqrt{2}-0)^2+(2-c)^2}$. 因此

$$\sqrt{c^2+2^2}=\sqrt{2+2+(2-c)^2}.$$

所以 $c=1$,而球半径为$\sqrt{5}$. 于是球面方程为

$$x^2+y^2+(z-1)^2=5.$$

**点评**:球心与球半径是控制球面方程的两个独立要素,球心与球面上任一点连线就是球半径. 因此,如果已知球面的一个点,那么确定球心则成为写出球面方程的关键所在.

注意,球心与球面上的任意一个圆的圆心所确定的直线垂直于这个圆所在的平面. 由此可知:(1) 球心在过球面上的任意一个圆的圆心,且垂直于这个圆所在平面的直线上;(2) 球心与球面上任意一个圆的圆心的连线与这个圆的任意一条半径成一个直角三角形的两条直角边,而斜边为球半径.

2. 求下列圆的圆心及半径:

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x+y+z-3=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5,\\ x^2+y^2+z^2+x+2y+3z-7=0.\end{cases}$

**分析**:在(1) 中球心已知,球半径已知,圆所在平面已知,于是球心到圆所在平面距离可以求出,即球心,圆心连线段的长度可求出,利用勾股定理可求出圆半径.圆心为过球心垂直于圆所在平面的直线与圆所在平面的交点.

(2) 是两个球面的交线,将其转化为球面与平面的交线.

**解**:(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的球心为 $C(0,0,0)$,半径为 2,球心 $C$ 到平面 $x+y+z-3=0$ 的距离

$$d=\frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}.$$

所以所求圆半径为 $\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=1$;

平面 $x+y+z-3=0$ 的法向量为$(1,1,1)$,是球心$(0,0,0)$,圆心所在直线的方向向量.所以球心,圆心直线方程为 $x=y=z$,它与平面 $x+y+z-3=0$ 的交点为$(1,1,1)$,即为所求圆心;

(2) 用第二个球面方程减第一个球面方程得 $x+2y+3z-2=0$,这是一个平面.因此所给圆即

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5,\\ x+2y+3z-2=0.\end{cases}$$

于是球面 $x^2+y^2+z^2=5$ 的球心$(0,0,0)$,半径为$\sqrt{5}$,球心到平面 $x+2y+3z-2=0$ 的距离

$$d=\frac{|0+2\times 0+3\times 0-2|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

所以圆半径为$\sqrt{\sqrt{5}^2-(\frac{2}{\sqrt{14}})^2}=\frac{\sqrt{231}}{7}$;平面 $x+2y+3z-2=0$ 的法向量为$(1,2,3)$,即球心,圆心所在直线的方向向量,故该直线方程为$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.它与平面 $x+2y+3z-2=0$ 的交点$\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$就是所求圆心.

3. 求证:

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t, \\ z = a\sqrt{2}\sin t\cos t, \end{cases} \qquad a > 0, \quad 0 \leqslant t < \pi$$

表示一个圆,求出圆的圆心和半径.

**分析**:要证明两个问题:(1) 当 $a > 0, 0 \leqslant t < \pi$ 时,点$(a\cos^2 t, a\sin^2 t, a\sqrt{2}\sin t\cos t)$在一个圆 $C$ 上;(2) 圆 $C$ 上任一点的坐标都具有$(a\cos^2 t, a\sin^2 t, a\sqrt{2}\sin t\cos t), a > 0, 0 \leqslant t < \pi$,的形式

**证明**:曲线 $C$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

当 $a > 0$ 时为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,平面 $x + y - a = 0$ 的交线,所以是一个圆.经代入可直接验证点$(a\cos^2 t, a\sin^2 t, a\sqrt{2}\sin t\cos t)$在这个圆 $C$ 上;反之,设$(x_0, y_0, z_0)$为圆 $C$ 上任意一点,则有

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2, \\ x_0 + y_0 - a = 0. \end{cases}$$

于是 $y_0 = a - x_0$,从而 $x_0^2 + (a - x_0)^2 + z_0^2 = a^2$,即

$$\left[\frac{2}{a}\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{a}z_0\right)^2 = 1.$$

从而存在 $\theta, 0 \leqslant \theta < 2\pi$,使得

$$\frac{2}{a}\left(x_0 - \frac{a}{2}\right) = \cos\theta, \quad \frac{\sqrt{2}}{a}z_0 = \sin\theta,$$

即

$$x_0 = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta) = a\cos^2\frac{\theta}{2}, z_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta = a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

于是 $y_0 = a - x_0 = a\sin^2\frac{\theta}{2}$.记 $t = \frac{\theta}{2}$,则 $0 \leqslant t < \pi$,且$(x_0, y_0, z_0) = (a\cos^2 t, a\sin^2 t, a\sqrt{2}\sin t\cos t)$.

综上,曲线

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t, \\ z = a\sqrt{2}\sin t\cos t, \end{cases} \quad a > 0,\quad 0 \leqslant t < \pi$$

就是曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y - a = 0, \end{cases} \quad a > 0$$

为一个圆.

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的球心为点(0,0,0),半径为 $a$.所以球心到平面 $x + y - a = 0$ 的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.于是这个圆的半径为$\sqrt{a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.平面 $x + y - a = 0$ 的法向量(1,1,0)为球心与这个圆的圆心所在直线的方向向量,故该直线方程为$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$.它与平面 $x + y - a = 0$ 的交点$(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$就是所求圆心.

**点评:**圆方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

实际上是按如下方法找到的:

把曲线方程

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t, \\ z = a\sqrt{2}\sin t\cos t, \end{cases} \quad a > 0, 0 \leqslant t < \pi$$

中的各个方程平方后相加得球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,把前两个方程相加得平面方程 $x + y - a = 0$.

4. 求证:两个球面

$$S_i: x^2 + y^2 + z^2 + A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = 1,2,$$

交线圆所在平面为

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2)z + (D_1 - D_2) = 0.$$