全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

线性代数辅导讲义

XIANXING DAISHU FUDAO JIANGYI

主编　李永乐

★ 历年线代考研真题详解

★ 基本概念、重要定理、主要公式全面提炼

★ 典型例题分析选讲

2008

新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

线性代数辅导讲义

XIANXING DAISHU FUDAO JIANGYI

主编　李永乐

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义/李永乐主编. —北京:新华出版社,2007.2
全国硕士研究生入学考试用书
ISBN 978—7—5011—7885—8

Ⅰ.线... Ⅱ.李... Ⅲ.线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019713 号

敬告读者

本书封面有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

线性代数辅导讲义

策　　划:白云覃
责任编辑:韩　刚
出版发行:新华出版社
地　　址:北京石景山区京原路 8 号
邮　　编:100043
经　　销:新华书店
印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:11
字　　数:260 千字
版　　次:2007 年 3 月第 1 版
印　　次:2007 年 3 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978—7—5011—7885—8
定　　价:14.00 元

若有印装质量问题,请与印厂联系(010)82570560

前　　言

本次修订篇幅有所增加，除了补充、更换、编写了一些新题之外，对于同学不太好理解，或不大注意的地方，在评注中增加了较多的题外话，同时对全书的结构有所调整。

希望本书的修订再版，能对同学们的复习备考有更大帮助。

编　者

2007 年 3 月

前　　言

本书是为准备考研的同学复习线性代数而编写的一本辅导讲义，由编者近年来辅导班笔记改写而成。全书共分六章及一个附录，每章均由知识结构网络图，基本内容、重要结论归纳，典型例题分析选讲，练习精选题四部分组成。章节安排、内容取舍与教材的顺序略有不同，主要是为了便于总结、复习以及知识间的相互渗透与结合。力求在较少的时间内，用不多的篇幅，帮助同学搞清基本概念，掌握基本理论、公式，了解重点、难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。通过典型例题的分析以及较为系统的归类、比较、总结、讲评，帮助考生学会分析解答线性代数问题，梳理解题的思路，熟悉常用的方法和技巧；练习题能使我们更好的理解、掌握基本内容，基本解题方法，达到巩固、悟新与提高的目的。典型性、综合性、启发性是选取编制例题、习题的原则；题后的点评与评注，其目的在于指出重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题；一些概念性、理论性选择题的设置，常常是为了帮助理解和掌握基本概念、基本定理与公式，纠正容易发生的错误。当前线性代数每年有 5 个考题，分值在 30 至 38 分，若平均对待应当在 30 分钟至 45 分钟解答完毕，因而我们设计了一个附录 45 分钟的水平测试，希望你在复习完本书，用三套自测题检查一下你的提高与不足。

本书也可作为大一新生学习线性代数时的学习参考书。

由于编者水平有限，疏漏错误之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2004 年 3 月

目 录

第三章　n 维向量

第四章　线性方程组

第五章 特征值与特征向量

第六章 二次型

附录 45分钟水平测试

第一章　行列式

一、知识结构网络图

- 行列式
  - 概念：不同行不同列元素乘积的代数和(共 $n!$ 项)
  - 性质
    - 经转置行列式的值不变
    - 某行有公因数 k，可把 k 提到行列式外
    - 某行所有元素都是两个数的和，则可写成两个行列式之和
    - 两行互换行列式变号
    - 某行的 k 倍加至另一行，行列式的值不变
  - 展开式 —— 代数余子式
    - $|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$　(按 i 行展开)
    - $|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$　(按 j 列展开)
  - 计算
    - 数字型
      - 三角化法
      - 公式法
      - 递推法
    - 抽象型
      - 用行列式性质
      - 用矩阵性质
      - 用特征值　$|\boldsymbol{A}| = \prod \lambda_i$
  - 证 $|\boldsymbol{A}| = 0$
    - $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 反证法
    - $r(\boldsymbol{A}) < n$
    - 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
    - $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$
  - 应用
    - $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 伴随矩阵求逆法
    - 线性相关(无关)判定
    - 可逆的证明
    - 克莱姆法则
    - 特征值计算

学习札记：

【评注】 (1) 二、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

这样的计算方法对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用.

(2) 对行列式的性质 3 要理解正确. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij})$，有 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})$，由于行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 中每一行都是两个数的和，所以若用性质 3 把行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 拆开，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.

特别地，

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & 0 - a_{13} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & 0 - a_{23} \\ 0 - a_{31} & 0 - a_{32} & \lambda - a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(3) 要会用行列式性质及展开定理计算数字型行列式

(4) 要熟悉抽象型行列式的计算.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基本概念

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列. 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

定义 1.2 一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为**偶排列**,否则称为**奇排列**.

例如,在 5 级排列 25134 中,有逆序 21,51,53,54,因此排列 25134 的逆序数为 4,即 $\tau(25134)=4$. 所以排列 25134 是偶排列.

定义 1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项的前面带负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1)称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

例如,若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项,那么根据行列式的定义,它应是不同行不同列元素的乘积. 因此必有 $j=3$.

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 列的逆序数

$$\tau(4312)=3+2+0=5$$

是奇数,所以该项所带符号为负号.

定义 1.4 在 n 阶行列式

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的**余子式**，记为 $\boldsymbol{M}_{ij}$. 而称 $(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$，即

$$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij} \tag{1.2}$$

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=2$ 即已知

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2$$

从而 $a=3$.

重要定理

定理 1.1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.3}$$

公式(1.3)称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.2 n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

公式(1.4)称为行列式按第 k 列的展开公式.

定理 1.3 设 n 阶行列式

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，当 $i \neq k \quad (i,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \tag{1.5}$$

当 $j \neq k \quad (j,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0 \tag{1.6}$$

【评注】 根据代数余子式的性质(1.3)与(1.5)，对于

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 和行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，我们有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即　　$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，类似地由(1.4)与(1.6)有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

这是一个重要的公式，要会灵活运用，关于伴随矩阵 A^* 要防止两种错误：

(1) 行列式 $|A|$ 中第 i 行元素的代数余子式在伴随矩阵 A^* 中是第 i 列；

(2) 求代数余子式 A_{ij} 时，不要忘记所带正负号 $(-1)^{i+j}$.

主要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.7}$$

(2) 关于副对角线的行列式

学习札记:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \tag{1.8}$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \tag{1.11}$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}| \tag{1.12}$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

学习札记：

【评注】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，若

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$$

则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\lambda\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，故系数行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$

关于(1.12)的推导请参看 P1 之点评(2).

特别地，若秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，由(1.12)知特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-(\sum a_{ii})\lambda^2=(\lambda-\sum a_{ii})\lambda^2$$

那么，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii},\lambda_2=\lambda_3=0$.

【例 1.1】 (1992,3)* 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$ ________.

【分析】 由拉普拉斯展开式(1.10)，有

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab$$

所以应填 $(-1)^{mn}ab$

【例 1.2】 (1996,1) 四阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

[　　]

【分析】 本题解法较多，较简单的方法是用两列对换，两行对换，把零元素调至行列式的一角，就可用拉普拉斯展开式，例如

$$\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\0&0&b_2&a_2\\0&0&a_3&b_3\\b_4&a_4&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\b_4&a_4&0&0\\0&0&a_3&b_3\\0&0&b_2&a_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\b_4&a_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3&b_3\\b_2&a_2\end{vmatrix}$$

而知应选(D).

【例 1.3】 $\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=$ ________.

注：(1992.3) 意为本题选自 1992 年数学三真题，下同

学习札记：

【分析】 把第2行加至第1行，提取公因式，即为范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

【例1.4】 设$\boldsymbol{A}$是3阶矩阵且$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是矩阵$\boldsymbol{A}$的3个特征值，那么由(1.12)有

$$\begin{aligned} |\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| &= \lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+s_2\lambda-|\boldsymbol{A}| \\ &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \\ &= \lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

比较同次方的系数，有

$$|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{3}\lambda_i \text{ 与 } \sum_{i=1}^{3}a_{ii} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i$$

方阵的行列式

(1) 若A是n阶矩阵，$\boldsymbol{A}^T$是$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，则$|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|$； (1.12)

(2) 若$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，则$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$； (1.13)

(3) 若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶矩阵，则$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$； (1.14)

(4) 若$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，则$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$； (1.15)

(5) 若$\boldsymbol{A}$是n阶可逆矩阵，则$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$； (1.16)

(6) 若$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是$\boldsymbol{A}$的特征值，则$|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$； (1.17)

(7) 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. (1.18)

克莱姆法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$