中学生学科竞赛系列教材

金牌教程

范晖 主编

高一·数学

南京大学出版社

中学生学科竞赛系列教材

金牌教程

高一·数学

范　晖　主编

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌教程.高一·数学/范晖主编.—南京:南京大学出版社,2006.7
(中学生学科竞赛系列教材)
ISBN 7-305-04480-6

Ⅰ.金… Ⅱ.范… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第050167号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮　编 210093
网　　址 http://press.nju.edu.cn
出 版 人 左　健

丛 书 名 中学生学科竞赛系列教材
书　　名 金牌教程——高一·数学
主　　编 范　晖
责任编辑 潘琰峰　　编辑热线 025 83597087

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 880×1230 1/32　印张 9.5　字数 273千
版　　次 2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
ISBN 7-305-04480-6/O·350
定　　价 14.00元

发行热线 025 83592169　025 83592317
电子邮件 sales@press.nju.edu.cn(销售部)
nupress1@public1.ptt.js.cn

序　言

国际学科奥林匹克竞赛是世界上最有影响的中学生学科竞赛活动，目前有近百个国家和地区组队参加该项国际赛事。竞赛学科包括数学、物理、化学、信息学(计算机)和生物学。

已经举行过的历届国际学科奥林匹克竞赛表明：这项活动不仅推动了各国科学教育的交流，促进了科学教育水平的提高，增进了各国青少年学生的相互了解，而且激发了广大中学生对学习基础学科科学知识的兴趣，有助于发现和培养青年人才。这项活动为世界各国表现本民族的聪明才智提供了竞争和交流的舞台，因而受到越来越多的国家的重视，并因此得到联合国教科文组织等许多国际科技教育组织的关注和支持。

我国组队参加国际学科奥林匹克竞赛，是在广泛开展全国性学科竞赛系列活动的基础上开始的。多年的实践证明，学科竞赛对帮助青少年树立学科学、爱科学、用科学的良好风尚发挥了积极的作用，并已成为我国青少年广泛参与的普及性学科竞赛活动。

学科竞赛旨在培养学生的学科兴趣，拓宽学生的知识面，是学有余力的学生的重要的课余活动。

学科竞赛方面的读物很多，多数是解题，使同学们掉进题海中不能自拔、不能举一反三。

本丛书作为竞赛教材编写，既注意到知识覆盖面，又强调了重点、难点；既注意到基本概念的阐述，又强调了应用，提高解题能力；既注意到知识性，又强调了趣味性。这样使读者怀着好奇心去阅读本丛书，从阅读中去理解基本概念、再从理解中去应用基本概念，达到增强解题能力、举一反三的效果。

本丛书作者多系全国一流的资深奥赛教练，他们培养了许多优秀的学生，在国际奥赛中屡屡获得金牌、银牌。此次他们联袂编写本丛书，不仅仅为各学校学科竞赛培训和学科提高训练提供了教材，他们在本丛书中体现出来的教学理念和训练方法也将引导同学们在学科竞赛乃至奥赛中提高竞争力。

王永新

2005 年 5 月 20 日

目　录

第一讲　集合的运算

【赛点简索】

集合是数学中最基本的原始概念,即不能定义,只能描述.所谓集合,就是具有共同性质的一些事物的总体.组成集合的事物称为该集合的元素.

(一) 集合的基本概念

1. 集合的表示法

(1) 列举法.

(2) 描述法.

① 语言描述法;

② 数学描述法:$\{x \mid p(x)\}$,其中 $p(x)$表示 x 具有的性质.

(3) 韦恩图法(或文氏图法).

2. 集合的分类

(1) 有限集:$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,特别地,单元集$\{a\}$.

(2) 无限集.

(3) 空集 $\varnothing$.

3. 子集

若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则 $A\subseteq B$.

性质:(1) $A\subseteq A$;

(2) $\varnothing\subseteq A$;

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

真子集:若 $A\subseteq B$,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

4. 集合的相等

若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.反之亦对.

5. 全集

当我们所讨论的集合都是某一集合的子集时，这一集合就称为全集，记作 I(或 E)或 U.

6. 幂集

若给定集合，则由集合的所有子集为元素组成的集合称为集合 A 的幂集，记作 $\phi(A)$.

(二) 集合的运算

1. 集合的交

$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

性质：(1) $A\cap A=A$;

(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$;

(3) $A\cap U=A$;

(4) $A\cap B=B\cap A$;

(5) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(6) $A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$.

若 A、B 没有共同元素，则可写成 $A\cap B=\varnothing$，此时称 A 与 B 不相交.

2. 集合的并

$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

性质：(1) $A\cup A=A$;

(2) $A\cup U=U$;

(3) $A\cup\varnothing=A$;

(4) $A\cup B=B\cup A$;

(5) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(6) $A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B$;

(7) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(8) 设 A、B 为任意两个集合，则

$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$.

3. 集合的差集

设 A、B 为任意两个集合，所有属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

4. 集合的余集(补集)

设 U 为全集，对任一集合 A 关于 U 的差集 $U-A$，称为集合 A 的余集，记作 $\complement_U A$(或者 $\overline{A}$)，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质：(1) $\complement_U U=\varnothing$;

(2) $\complement_U \varnothing=U$;

(3) $A\cup \complement_U A=U$;

(4) $A\cap \complement_U A=\varnothing$;

(5) $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$;

(6) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

性质(5)的证明：$\complement_U(A\cup B)=\{x\mid x\in \complement_U(A\cup B)\}=\{x\mid x\notin A\cup B\}$

$=\{x\mid x\notin A$ 且 $x\notin B\}$

$=\{x\mid x\in \complement_U A$ 且 $x\in \complement_U B\}=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

5. 集合的对称差

$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

性质：(1) $A\oplus B=B\oplus A$;

(2) $A\oplus\varnothing=A$;

(3) $A\oplus A=\varnothing$;

(4) $A\oplus B=(A\cap \complement_U B)\cup(\complement_U A\cap B)$;

(5) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$.

【热点难点】

1. 高中数学的第一个内容就是集合，而集合又是数学的基础.因此，深刻理解集合的概念，熟练地进行集合运算，是非常重要的.由于本讲涉及基础内容较多，所以抓好概念的理解和应用尤其重要.

2. 集合，几乎是每年高考与竞赛的必考内容.一般而言，一是考查集合本身的知识；二是考查集合语言与集合思想的运用.

3. 对于给定集合，要正确理解其含义，弄清元素是什么？具有怎

样的性质？读懂一个集合是解决问题的前提.

4. 集合语言涉及数学的各个领域，所以在竞赛题中，集合题是普遍而基本的题型之一.

5. 要正确理解并熟练掌握子集、交集、并集、补集等的含义及常用的运算性质.

6. 运用集合间的关系及运算性质，将集合语言转换成图形语言是常用的解题方法.

【赛题赏析】

例 1: 已知集合 $M=\{直线\}$，$N=\{抛物线\}$，则 $M\cap N$ 中元素的个数为　　（　　）

A. 0　　B. 0，1，2 其中之一

C. 无穷　　D. 无法确定

分析: 要求 $M\cap N$ 中元素的个数，必须弄清楚集合 M 和 N 分别表示什么，由两个集合交集的定义，求出它们的公共元素个数.

解答: M 中的元素为直线，是无限集；N 中的元素为抛物线，它也是无限集. 由于两集合中的元素完全不同，即既是直线又是抛物线（曲线）的图形根本不存在，故 $M\cap N=\varnothing$，选 A.

评注: 若想当然地误认为 M 中的元素是直线上的点，N 中的元素是抛物线上的点，误认为是判断直线与抛物线的位置关系即相交、相切、相离时，会选 B.

例 2:（1998 年全国高中数学联赛题）若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是　　（　　）

A. $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$　C. $\{a\mid a\leqslant 9\}$　D. $\varnothing$

分析: 本题关键是在于将条件 $A\subseteq A\cap B$ 等价转化为 $A\subseteq B$. 另外，因为集合 A 是非空集合，所以，不要忘记 $2a+1\leqslant 3a-5$.

解答: $\because A\subseteq A\cap B\Leftrightarrow A\subseteq B$，$\therefore \begin{cases}3a-5\geqslant 2a+1,\\ 3\leqslant 2a+1,\\ 3a-5\leqslant 22.\end{cases}$

解得 $6\leqslant a\leqslant 9$．故选 B.

评注：本题主要考查非空集合的概念、子集和交集的性质以及一元一次不等式的解法.在处理含有字母的子集问题时，我们常常借助于数轴，数形结合，理清条件，使关系明朗，易于求解.

例 3：(1989 年全国高中数学联赛题)集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l$，其中 $m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与 $N=\{u\mid u=20p+16q+12r$，其中 $p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为 ( )

A．$M=N$　　　　B．$M\not\subset N,N\not\subset M$

C．$M\subset N$　　　　D．$M\supset N$

分析：本题要判断两个集合之间的关系是相等，还是包含关系.

解答：由于 $12m+8n+4l=4(3m+2n+l)$，而当 $m,n,l\in\mathbf{Z}$ 时，$3m+2n+l$ 可以为任何整数(对于任何整数 k，可取 $m=n=0,l=k$，则得 $3m+2n+l=k$)．于是 M 表示“4 的倍数的集合”，即 $M=\{u\mid u=4k,k\in\mathbf{Z}\}$.

又 $20p+16q+12r=4(5p+4q+3r)$，而当 $p,q,r\in\mathbf{Z}$ 时，$5p+4q+3r$ 可以表示任何整数(对于任何整数 k，取 $p=k,q=-k,r=0$，即得 $5p+4q+3r=k$)．于是 N 表示“4 的倍数的集合”，即 $N=\{u\mid u=4k,k\in\mathbf{Z}\}$.

由于 M、N 的元素完全相同，所以 $M=N$．故本题应选 A.

评注：本题也可用定义直接证明．对于任何 $x\in M$，则必有一组整数 m,n,l 使 $x=12m+8n+4l$．此时，取 $p=3m+2n+l,q=-(3m+2n+l),r=0$．显然 $3m+2n+l\in\mathbf{Z}$.

于是 $20p+16q+12r=(60m+40n+20l)-(48m+32n+16l)+0=12m+8n+4l=x$．即 $x\in\mathbf{N}$．于是 $M\subset N$.

同理可证：$N\subset M$．故 $M=N$.

例 4：(1996 年全国高中数学联赛题)集合 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}\right\}$ 的真子集的个数是__________.

分析：首先由不等式 $-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2}$ 的解集及条件 $x\in\mathbf{N}$ 确定出此集合的元素个数，再根据集合的元素个数写出其真子集的个数.

解答:利用换底公式及对数的运算性质,将不等式 $-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2}$ 变形,得 $-1\leqslant-\frac{1}{\lg x}<-\frac{1}{2}$,即 $1\leqslant\lg x<2$. 解得 $10\leqslant x<100$.

由 $x\in\mathbf{N}$ 知,$x=10,11,12,\cdots,99$,共 90 个值.

即所给集合共有 90 个元素,它的真子集的个数是 $2^{90}-1$.

评注:本题的集合中的元素满足一个对数不等式,因此应掌握对数不等式的解法.在解的过程中,用到了对数的换底公式和对数的运算性质:

若 $a>0,a\neq1,b>0,b\neq1$,则 $\log_aN=\frac{\log_bN}{\log_ba}$,$\log_aN^n=n\log_aN$.

同时,也用到了关于集合子集个数的定理:

一般地,当一个集合 S 有 n 个元素时,它的子集个数为 2^n,真子集的个数为 2^n-1.这个结论在解题时可直接运用.

例 5:(由 1987 年全国高中数学联赛题改编)已知集合 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$S=\{0,|x|,y\}$,且 $M=S$,则 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2004}+\frac{1}{y^{2004}})$的值等于________.

分析:解题的关键在于求出 x 和 y 的值,而 x 和 y 分别是集合 M 与 S 中的元素. 对于本题,还要用到对数、绝对值的基本性质.

解答:由 $M=S$ 知,两集合元素完全相同,这样,M 中必有一个元素为 0.又由对数的性质知,0 和负数没有对数,所以 $xy\neq0$,故 x、y 均不为零.所以只能有 $\lg(xy)=0$,从而 $xy=1$.

$\therefore M=\{x,1,0\}$,$S=\left\{0,|x|,\frac{1}{x}\right\}$.

再由两集合相等知 $\begin{cases}x=|x|,\\1=\frac{1}{x};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{x},\\1=|x|.\end{cases}$

当 $x=1$ 时,$M=\{1,1,0\}$,$S=\{0,1,1\}$,这与同一个集合中元素的互异性矛盾,故 $x=1$ 不满足题目要求;

当 $x=-1$ 时,$M=\{-1,1,0\}$,$S=\{0,1,-1\}$,$M=S$,从而 $x=-1$ 满足题目要求,此时 $y=-1$.

于是 $x^{2k+1}+\frac{1}{y^{2k+1}}=-2(k\in\mathbf{N})$，$x^{2k}+\frac{1}{y^{2k}}=2(k\in\mathbf{N}^*)$.

故原式的值为 0.

评注：本题主要考查集合中元素的确定性和互异性，选好突破口 $0\in M$，并逐步深入是解题的关键. 这一类根据集合的关系，反过来确定集合元素的问题，要求我们要对集合元素的基本性质，即确定性、互异性、无序性及集合之间的基本关系有本质的理解. 对于两个相等的有限集合（数集），还会用到它们的简单性质：① 相等两集合的元素个数相等；② 相等两集合的元素之和相等；③ 相等两集合的元素之积相等.

例 6：已知集合 $A=\{y\mid y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，$B=\left\{y\mid y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right\}$，$A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

分析：先易后难，先明后暗，这是解题的策略. 故先写出集合 B，然后写出集合 A，再由 $A\cap B=\varnothing$ 找到等价条件，最后解不等式组得所求实数 a 的取值范围.

解答：易得 $B=[2,4]$.

$\because$ 方程 $y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)=0$ 的两根为 a,a^2+1，而 $a^2+1\geqslant 2|a|\geqslant|a|\geqslant a$，且等号不能都成立.

$\therefore A=(-\infty,a)\cup(a^2+1,+\infty)$.

$$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}2\geqslant a,\\4\leqslant a^2+1\end{cases}\Leftrightarrow a\leqslant-\sqrt{3}\text{或}\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2.$$

$\therefore$ 所求实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2]$.

评注：本题中，最易出错的地方是把 $\begin{cases}2\geqslant a,\\4\leqslant a^2+1\end{cases}$ 写为 $\begin{cases}2>a,\\4<a^2+1\end{cases}$，做题时必须把边界处仔细推敲.

例 7：已知集合 $A=\left\{x\mid\text{使 }y=a\sqrt{ax-x^2}\text{有意义}\right\}$，集合 $B=\left\{y\mid\text{使 }y=a\sqrt{ax-x^2}\text{有意义}\right\}$，$A=B$ 是否可能成立？如可能成立，求出使 $A=B$ 的 a 的取值范围；如不可能成立，说明理由.

分析：本题两集合是用描述法表示的，在"元素的形式"这一部分分

别用了 x，y，不能据此认为“元素的形式不同，故不可能相等”．因它们只不过用以表达的字（代号）不同，实质是一样的，即元素的形式是“数”．它们能否相等，只需看它们所表示的数集是否相同．

解答：当 $a>0$ 时，$A=[0,a]$，$B=\left[0,\frac{a^2}{2}\right]$．要使 $A=B$，须 $a=\frac{a^2}{2}$，$a=2$；

当 $a<0$ 时，$A=[a,0]$，$B=\left[-\frac{a^2}{2},0\right]$．要使 $A=B$，须 $a=-\frac{a^2}{2}$，$a=-2$；

当 $a=0$ 时，$A=\{0\}$，$B=\{0\}$，满足 $A=B$．

根据上面的讨论知，A 与 B 两集合有可能相等，只需 $a\in\{-2,0,2\}$ 即可．

评注：本题中集合 A 和 B 分别是函数 $y=a\sqrt{ax-x^2}$ 的定义域和值域，同时要对实数 a 进行分类讨论．以探索性问题的形式出现，对进一步提高探究能力很有帮助．

例 8：设 $A=\{x\mid x=a^2+b^2,a,b\in\mathbf{Z}\}$，$x_1$、$x_2\in A$，求证：$x_1\cdot x_2\in A$．

分析：A 中的元素是什么？是自然数，即由两个整数 a，b 的平方和构成的自然数，亦即从 $0,1,4,9,16,25,\cdots,n^2,\cdots$ 中任取两个（相同或不相同）数加起来得到的一个和数．本题要证明的是：两个这样的数的乘积一定还可以拆成两个自然数的平方和的形式，即 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(x)^2+(y)^2$，$x$、$y\in\mathbf{Z}$．

证明：设 $x_1=a^2+b^2$，$x_2=c^2+d^2$，$a,b,c,d\in\mathbf{Z}$．

$$
\begin{aligned}
\text{则}\ x_1\cdot x_2&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\
&=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2\\
&=a^2c^2+2ac\cdot bd+b^2d^2+b^2c^2-2bc\cdot ad+a^2d^2\\
&=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2
\end{aligned}
$$

又 $a,b,c,d\in\mathbf{Z}$，故 $ac+bd$，$bc-ad\in\mathbf{Z}$，从而 $x_1\cdot x_2\in A$．

评注：本题的证明中根据 A 中元素的结构特点使用了配方法和

“零”变换($0=2abcd-2abcd$).命题的结论说明集合 A 对于其中元素的“×”运算是封闭的.

类似的有:

自然数集合 $\mathbf{N}$ 对于“+”、“×”运算是封闭的;

整数集合 $\mathbf{Z}$ 对于“+”、“-”、“×”运算是封闭的;

有理数集合 $\mathbf{Q}$ 对于“+”、“-”、“×”、“÷”四则运算是封闭的(除数不能是零);

实数集合对于“+”、“-”、“×”、“÷”四则运算是封闭的.

例 9: 设 $A=\left\{a \mid a=2\cos^2\dfrac{5m\pi}{24}-1, m\in\mathbf{Z}\right\}$,

$B=\left\{b \mid b=1-2\sin^2\dfrac{n\pi}{24}, n\in\mathbf{Z}\right\}$,求证:$A=B$.

分析: 要证 $A=B$,须证 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,即证明:$\forall x\in A\Leftrightarrow x\in B$.“$\forall$”表示“任意”.

证明: $\forall a\in A$,则 $a=2\cos^2\dfrac{5m}{24}\pi-1=\cos\dfrac{5m}{12}\pi, m\in\mathbf{Z}$.存在 $n=5m$ 使得 $a=\cos\dfrac{5m}{12}\pi=\cos\dfrac{n}{12}\pi=1-2\sin^2\dfrac{n\pi}{24}\in B$.

从而 $A\subseteq B$.

又对 $\forall b\in B$,则 $b=1-2\sin^2\dfrac{n}{24}\pi=\cos\dfrac{n}{12}\pi, n\in\mathbf{Z}$.存在 $m=5n$.使得 $b=\cos\dfrac{n}{12}\pi=\cos\left(2n\pi+\dfrac{n}{12}\pi\right)=\cos\dfrac{25n}{12}\pi=\cos\dfrac{5m}{12}\pi\in A$.

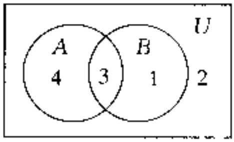
从而 $B\subseteq A$.

由集合相等的定义知:$A=B$.

评注: 本题要用到三角中的二倍角公式和诱导公式,要证明两个集合相等,通常有以下三种方法:① 通过列举,证两个集合的元素完全相同;② 证两个集合元素满足的条件等价;③ 就是本题这种方法.

例 10: 设集合 A、B 都是全集 $U=\{1,2,3,4\}$ 的子集,已知 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$,$A\cap B=\{3\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$,求 $\complement_U(A\cup B)$.

分析: 本题涉及集合 A、B 及其补集、交集和并集,关系比较复杂,可借助图形来表示和考虑.



解答:如图,用方框表示全集 U,用两条封闭曲线分别表示集合 A 与 B.

由 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$,就在 A 之外、B 之内填上 1;由 $A\cap B=\{3\}$,就在 A、B 的公共部分填上 3. 又由 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$,就在 A、B 之外、方框之内填上 2.

已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$,因此应在 A 之内、B 之外填写 4.

由此,从图上可知 $A\cup B=\{1,3,4\}$,从而 $\complement_U(A\cup B)=\{2\}$.

评注:画出韦恩图(或文氏图)是解本题的关键和决窍."一图抵百语",韦恩图常常可以帮助我们直观地理解某些关系,也有利于记忆和思考问题,值得重视. 另外,从本题我们发现:$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,类似地还有:$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$. 我们把这两个等式作为集合的重要性质,数学上称为摩根定理.

例 11:设 $A=\{x\mid x^2+ax+b=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid x^2+cx+15=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cup B=\{3,5\}$,$A\cap B=\{3\}$,全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,求 $(\complement_U A)\cap B$.

分析:要求 $(\complement_U A)\cap B$,需通过 $A\cup B=\{3,5\}$ 和 $A\cap B=\{3\}$ 提供方程解的信息,确定出两个方程,然后确定出 A、B 即可.

解答:B 中的方程有常数 15,以此为突破口. 由 $A\cap B=\{3\}$ 知,$3\in B$,设方程 $x^2+cx+15=0$ 的另一个实根为 x_2,则由韦达定理得:
$$\begin{cases}3+x_2=-c,\\3x_2=15.\end{cases}$$
解得:$x_2=5$,$c=-8$.

这时,$B=\{3,5\}=A\cup B$,但 $A\cap B=\{3\}$,故 $A=\{3\}$,进而得 $(\complement_U A)\cap B=\{5\}$.

评注:通过对交集概念的实质的理解,一般在求 $M\cap N$ 时,在已知集合 M 的全部元素的情况下,只需在 M 中确定出哪些同时属于 N 的元素,便可构成 $M\cap N$,而不必确定出 N 的全部元素. 这种思想很重要,也很常用. 例如在本题中,抓住补集概念的实质,只确定 B 中哪些元素不在 A 中(不等于 3),而不必求出 $\complement_U A$.

例 12:(1995 年全国高中数学联赛题)设 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$,A

$\subseteq M$,且当 $x\in A$ 时,$15x\notin A$.求 card(A)的最大值.

分析:$\because \left[\frac{1995}{15}\right]=133$,$\therefore$ 当 $k=9,10,11,\cdots,133$ 时,k 与 $15k$ 不能同时在 A 中.

card(A)$\leqslant 1995-125=1870$.再构造一个 A,使 card(A)$=1870$ 即可.

解答:由题设 $k=9,10,11,\cdots,133$ 时,k 与 $15k$ 不能同时在A 中.

故至少有 $133-8=125$ 个数不在 A 中,即 card(A)$\leqslant 1995-125=1870$.

另一方面,M 的子集 A 可取$\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$满足题意,此时 card($A$)$=1870$.故 card($A$)的最大值为 1870.

评注:本题是求满足一定条件的某个集合的子集的元素个数的最大值.先证明这个子集的元素个数不大于某个常数,然后构造一个集合,它的元素个数正好等于这个常数,此时这个常数就是我们所要求的最大值.

例 13:(1997 年上海高中数学竞赛题)设 $S=\{1,2,3,4\}$,n 个数依次排成一列:$a_1,a_2,\cdots,a_n$,且具有下列性质:对于 S 中的任一非空子集B,在该数列中有相邻的 card(B)项恰好组成集合 B,求 n 的最小值.

分析:因为含 S 中的一个固定元素的二元子集有 3 个,所以 S 中的任一元素在数列中至少出现 2 次,由此估算 n 的最小值为 8.

解答:S 中的每个数在数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少出现 2 次.这是因为,若 S 中某个数在这个数列中出现 1 次,则由于含此数的 S 的二元子集共有 3 个,但在数列中含此数的相邻两项至多只有两种取法,因而 3 个含这个数的二元子集不可能都在数列相邻两项中出现.由此,$n\geqslant 8$.另一方面,8 项数列:3,1,2,3,4,1,2,4 满足条件.故 n 最小值为 8.

评注:只证明 $n\geqslant 8$,还不能说明 n 的最小值为 8.接下来的构造说明 n 能取 8.

例 14:设 a,b 是两个实数,给出三个平面 xOy 内的点集:

$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$,