科學譯叢
——數學：第7種——

變敘的項的極限分佈律

H. B. 斯米爾諾夫

中國科學院出版

科 學 譯 叢
——數學：第7種——

變敘的項的極限分佈律

H. B. 斯米爾諾夫作
王 壽 仁 譯

中國科學院出版
1954年2月

本書內容提要

數學統計中非參數方法近來引起了人們很大的注意。在處理按照同一分佈律 $F(x)=P(\zeta<x)$ 所得到的 n 次相互獨立試驗的結果

(1) $x_1,\quad x_2,\cdots\cdots\cdots,x_n$

時，非參數方法是與"變敍"的研究緊密地關聯着的。所謂變敍就是把 (1) 按少值由小到大重新排列後而得到的一個敍列

$$\zeta_1\leqslant\zeta_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant\zeta_k\quad\leqslant\cdots\cdots\leqslant\zeta_n$$

此處 ζ_i 等於 x_j 中的一個。

H. B. 斯米爾諾夫在數理統計內非參數方法及變敍的研究中皆佔重要的地位，他的關於變敍的研究工作已總結於本書中，由於本書他獲得了1950年斯大林獎金。

斯米爾諾夫在本書中研究了秩數爲 $k=\lambda n$（λ 爲常數，$0<\lambda<1$）的中間項，他找到了該項的分佈律的漸近正則性的寬廣的條件。對於秩數爲 $k=\lambda_n$ 的中間項及固定秩數項 ζ_k，ζ_{n-k}（k固定）的一切可能的極限分佈律（$n\longrightarrow\infty$ 都被他求出，而且給了向之吸引的必要與充分條件。

變敍的項的極限分佈律

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ДЛЯ ЧЛЕНОВ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА
ИЗДАТЕЛЬСТВО А. Н. СССР., 1949

Н. В. Смирнов 原著
王壽仁 翻譯
中國科學院 出版
北京新華印刷廠 印刷
新華書店 發行

(譯)54001　　1954年2月第一版
(京)0001—4,200　　1954年2月第一次印刷
字數：40,000　　定價4,000元

導　　言

設 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 是 n 個相互獨立的機變數，而且具有同一的分佈律 $F(x)=P(x_k<x)$，$(k=1,2,\cdots\cdots,n)$。我們將要考察這些機變數的函數 $\xi_k^{(n)}(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$，$(k=1,2,\cdots\cdots,n)$。這些函數是這樣的，對於機變數的每一組可能值 $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $\cdots\cdots, x_n=x_n^0$，它們分別地對應於按照這一組可能值的由小到大的次序排列中的第一個數值，亦即最小的數值，第二個數值，依此類推一直到最大的數值。如果以 l_k^0 代表 $x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_n^0$ 按照由小到大的次序排列中的第 k 個數值，則 $\xi_k^{(n)}(x_1^0,x_2^0,\cdots\cdots,x_k^0)=l_k^0$。這一組可能值裏面相等的數值的排列次序誰先誰後是沒有關係的。

量 $\xi_k^{(n)}(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ 的全體叫作 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 這組量的變敘。由定義可知變敘的各項形成一個不減的敘列 $\xi_1^{(n)}\leqslant\xi_2^{(n)}\leqslant\cdots\cdots\leqslant\xi_n^{(n)}$。比值 k/n 叫作項 $\xi_k^{(n)}$ 的秩。

我們假定 $\xi_k^{(n)}$ 的秩當 n 增大時趨於一個極限 $\lambda, 0\leqslant\lambda\leqslant1$。$\lambda$ 就叫作敘列 $\xi_k^{(n)}$ 當 n 趨於無窮時的極限秩。在這種假設下，我們要研究 $\xi_k^{(n)}$ 的分佈律。爲了簡便起見，凡具有不等於 0 與 1 的極限秩的變敘的項的敘列叫作“中間項”的敘列，以區別於具有等於 0 或 1 的極限秩的敘列，而後者叫作“邊項”的敘列。

對於變敘裏的項的敘列的極限分佈律的研究是和龔貝爾

(Gumbel), H. 斯米爾諾夫 (H. Смирнов), 密西斯 (Mises), 伏瑞謝 (Fréchét), R. A. 費謝 (R. A. Fisher) 哥涅堅科 (Гнеденко) 等人的工作分不開的。對於變叙的最小及最大項的極限分佈的最圓滿 (在公認的意義上) 的結果是在 1941 年由 Б. В. 哥涅堅科 [1] 所得到的。他找到了這兩個項的分佈律的一切可能的極限類型 (在列威 (Lévy) 與欣欽 (Хинчин) 的意義下) 及其相應的吸引場。Б. В. 哥涅堅科並且異常詳盡地研究了這兩項的穩定性問題。關於變叙的其它項的叙列的極限分佈律的研究還沒有達到這樣的廣泛性與完備性。直到現在爲止，在這一方面的研究祇有一些零碎的與片面的結果。

在本文的第一部分裏，我們要推出中間項的全體極限律型及其吸引場，但是要對於這種項的秩的叙列加上某種限制。在第二部分裏，我們廣泛地應用 Б. В. 哥涅堅科的方法，把他所得的結果推廣到具有固定"左"名次 (k) 或"右"名次 ($n-k+1$) 的邊項 $\xi_k^{(n)}$ 的叙列。更進一步的推廣則是耑門研究的對象。

目　　錄

第一部分　中間項叙列

§1. 變叙的項的分佈函數

設

$$\Phi_{kn}(x)=P(\xi_k^{(n)}<x) \qquad (1)$$

我們要來找出上給分佈函數的形狀，假定着各機變數 $x_m(m=1,2,\cdots\cdots,n)$ 的共同分佈律 $F(x)$ 爲已知。以 $E_x^{(m)}$ 表示事件 $x_m<x$。對於給定的 x 來說，$E_x^{(m)}$ 是相互獨立的，而且 $P(E_x^{(m)})=F(x)$。我們作 n 次獨立的實驗，$E_x^{(1)}$，$E_x^{(2)}$，……，$E_x^{(n)}$ 出現的頻率以 $S_n(x)$ 表之。因爲我們所遇到的正是 J. 勃奴立 (J. Bernoulli) 的古典情況，所以

$$P\left(S_n(x)=\frac{m}{n}\right)=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}F^m(x)(1-F(x))^{n-m}. \qquad (2)$$

另一方面我們有下面簡單但是很重要的關係式

$$P(\xi_k^{(n)}<x)=P\left(S_n(x)\geqslant\frac{k}{n}\right) \qquad (3)$$

因爲要想使 $\xi_k^{(n)}<x$ 實現，必須而祇須在量 $x_m(m=1,2,\cdots\cdots,n)$ 的叙列中有不少於 k 個項小於 x。同樣可以證出等式

$$P(\xi_k^{(n)}\leqslant x)=P\left(S_n(x+0)\geqslant\frac{k}{n}\right), \qquad (4)$$

其中 $S_n(x+0)$ 代表在變叙裏不超過 x 的項的頻率。由 (1)，(2) 與 (3) 得到

$$\Phi_{kn}(x)=\sum_{m=k}^{m=n}\frac{n!}{m!\,(n-m)!}F^m(x)(1-F(x))^{(n-m)} \qquad (5)$$

由 (5) 可以得到

$$\Phi_{kn}(x)=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^{F(x)}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx \qquad (6)$$

因爲 (6) 式右端如果逐次用部分積分法即可化爲 (5) 式的右端。

設 $\overline{\Phi}_{kn}(x)$ 爲機變數 $-x_1, -x_2, \cdots\cdots, -x_n$ 的變敍中的第 k 項的分佈函數。$-x_1, -x_2, \cdots\cdots, -x_n$ 的共同分佈律是 $\overline{F}(x)=1-F(-x)$。應用第 (6) 式我們很容易得到關係式

$$\Phi_{n-k+1,n}(x)=1-\overline{\Phi}_{k,n}(-x) \qquad (7)$$

應用這個關係，就可以把對於 $\xi_k^{(n)}$ 所得結果移用於第 $(n-k+1)$ 項 $\xi_{n-k+1}^{(n)}$ 的分佈，反之亦然。

§2. 變敍的中間項的穩定性

1. 設變敍的項所組成的敍列的極限秩爲 $\lambda\left(\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}\right)$。若有一敍列的常數 $A_k^{(n)}$ 存在，使得對於任意 $\varepsilon>0$，都有

$$P\{|\xi_k^{(n)}-A_k^{(n)}|<\varepsilon\}\to 1 \quad (n\to\infty), \qquad (8)$$

則我們稱這個敍列 $\xi_k^{(n)}$ 是穩定的。

中間項的穩定性的條件問題是很易解決的。將來我們要廣泛地利用上節裏 (3) 與 (4) 式所表達出來的 $\xi_k^{(n)}$ 與 $S_n(x)$ 的分佈之間的關係，以便應用關於勃奴立情況的古典極限定理。現在先來證明下面的引理。

引理 1. 如果常數敍列 C_n 與 y_n 滿足條件

$$\underline{\lim}\,[F(C_n)-y_n]=l>0,\quad (n\to\infty),\tag{9}$$

則
$$P(S_n(C_n)<y_n)\to 0,\quad (n\to\infty).\tag{10}$$

同樣，如果常數叙列 D_n 與 z_n 滿足條件

$$\overline{\lim}\,[F(D_n)-z_n]=-L<0,\quad (n\to\infty),\tag{9'}$$

則
$$P(S_n(D_n)>z_n)\to 0,\quad (n\to\infty).\tag{10'}$$

事實上，由條件 (9) 可知對於足够大的 n 恒有

$$F(C_n)-y_n>\frac{l}{2},$$

所以

$$P(S_n(C_n)<y_n)\leqslant P\left(S_n(C_n)-F(C_n)<-\frac{l}{2}\right);$$

由此，應用切被謝夫（Чебышев）不等式（在勃努立情况中），便得

$$P(S_n(C_n)<y_n)\leqslant\frac{4F(C_n)(1-F(C_n))}{nl^2}\leqslant\frac{1}{nl^2},$$

由此即可推得引理中的關係 (10)。同樣，由條件 (9′) 可以證明 (10′)。

現在假設當 $n\to\infty$ 時，$\frac{k}{n}\to\lambda$，$0<\lambda<1$。令

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_\lambda&=\inf\,(x,\ F(x)>\lambda)\\ \underline{a}_\lambda&=\sup\,(x,\ F(x)<\lambda)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

上式的意義就是對於給定的 λ 而言，$\bar{a}_\lambda$ 與 $\underline{a}_\lambda$ 分別等於使相應的弧號內不等式成立的那種 x 的下限與上限。顯然

$$\underline{a}_\lambda\leqslant\bar{a}_\lambda.\tag{12}$$

現在我們要證明：如果 $\underline{a}_\lambda=\bar{a}_\lambda$，則具有極限秩 λ 的中間項

$\xi_k^{(n)}$ 所組成的叙列是穩定的。

定理 1. 若 $\frac{k}{n}\to\lambda$, $n\to\infty$, $0<\lambda<1$. 而且 $\underline{a}_\lambda=\bar{a}_\lambda=a_\lambda$ 則對於任意 $\varepsilon>0$ 有

$$P\{|\xi_k^{(n)}-a_\lambda|<\varepsilon\}\to 1,\quad (n\to\infty). \tag{13}$$

關係 (13) 是與下面的二個關係等價的

$$P\{\xi_k^{(n)}\geqslant a_\lambda+\varepsilon\}\to 0,\quad (n\to\infty),$$

$$P\{\xi_k^{(n)}\leqslant a_\lambda-\varepsilon\}\to 0,\quad (n\to\infty).$$

由 (3) 與 (4) 又知此二式等價於下列:

$$P\left\{S_n(a_\lambda+\varepsilon)<\frac{k}{n}\right\}\to 0,\quad (n\to\infty), \tag{14′}$$

$$P\left\{S_n(a_\lambda-\varepsilon+0)\geqslant\frac{k}{n}\right\}\to 0,\quad (n\to\infty), \tag{14″}$$

另一方面，根據定理中的條件，對於任意 $\varepsilon>0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\left[F(a_\lambda+\varepsilon)-\frac{k}{n}\right]=F(a_\lambda+\varepsilon)-\lambda>0 \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[F(a_\lambda-\varepsilon+0)-\frac{k}{n}\right]=F(a_\lambda-\varepsilon+0)-\lambda<0 \tag{15′}$$

應用引理 1. 由 (15) 與 (15′) 立刻得到 (14′) 與 (14″)，亦即得到 (13)。定理 1 得證。

2. 在某些特殊條件下，定理 1 更可以精密些。例如設除了定理 1 的條件被適合外，另加條件:

$$F(a_\lambda-0)=F(a_\lambda)<\lambda<F(a_\lambda+0) \tag{16}$$

那麼即有

$$P\{\xi_k^{(n)}=a_\lambda\}\to 1,\quad (n\to\infty) \tag{17}$$

因爲首先我們知道

$$P\{\xi_k^{(n)}=a_\lambda\}=P\left\{\begin{matrix}S_n(a_\lambda)<\dfrac{k}{n}\\ S_n(a_\lambda+0)\geqslant\dfrac{k}{n}\end{matrix}\right\}\geqslant 1-P\left\{S_n(a_\lambda)>\frac{k}{n}\right\}-$$

$$-P\left\{S_n(a_\lambda+0)<\frac{k}{n}\right\} \qquad (18)$$

但由 (16) 又知 $F(a_\lambda)-\dfrac{k}{n}$ 與 $\dfrac{k}{n}-F(a_\lambda+0)$ 當 $n\to\infty$ 時皆趨於負極限。所以由引理 1 可知 (18) 式右端的兩個概率皆趨於零，所以 (17) 式得證。

如果附加的條件 (16) 換成

$$F(a_\lambda-0)=\lambda<F(a_\lambda+0) \qquad (19)$$

則由同理可得；對於任意 $\varepsilon>0$ 有

$$P\{a_\lambda-\varepsilon<\xi_k^{(n)}\leqslant a_\lambda\}\to 1, \quad (n\to\infty) \qquad (20)$$

如果不要條件 (16) 與 (19) 而代以

$$F(a_\lambda-0)<\lambda=F(a_\lambda+0), \qquad (21)$$

則對於任意 $\varepsilon>0$ 便有

$$P\{a_\lambda\leqslant\xi_k^{(n)}<a_\lambda+\varepsilon\}\to 1, \quad (n\to\infty) \qquad (22)$$

3. 現在我們假定 $\bar{a}_\lambda>\underline{a}_\lambda$。在這種情況下，易知

$$F(\underline{a}_\lambda+0)=F(\bar{a}_\lambda-0)=\lambda \qquad (23)$$

因之間隔 $(\underline{a}_\lambda, \bar{a}_\lambda)$ 成爲 $F(x)$ 等於定值的間隔 $(F(x)=\lambda, \underline{a}_\lambda<x\leqslant\bar{a}_\lambda)$。在這種情形下，具有極限秩 λ 的項 $\xi_k^{(n)}$ 所組成的叙列通常不是穩定的。我們先證以下定理：

定理 2. 若 $\underline{a}_\lambda<\bar{a}_\lambda$ 而 λ 是當 $n\to\infty$ 時叙列 $\xi_k^{(n)}$ 的極限秩，則對於任意 $\varepsilon>0$ 有

$$P\{\underline{a}_\lambda-\varepsilon<\xi_k^{(n)}\leqslant\underline{a}_\lambda\}+P\{\bar{a}_\lambda\leqslant\xi_k^{(n)}<\bar{a}_\lambda+\varepsilon\}\to 1 \qquad (24)$$

應用 (3) 與 (4)，便得

$$P\{\underline{a}_\lambda-\varepsilon<\xi_k^{(n)}<\overline{a}_\lambda+\varepsilon\}=1-P\{\xi_k^{(n)}\geqslant\overline{a}_\lambda+\varepsilon\}-P\{\xi_k^{(n)}\leqslant\underline{a}_\lambda-\varepsilon\}=$$
$$=1-P\left\{S_n(\overline{a}_\lambda+\varepsilon)<\frac{k}{n}\right\}-P\left\{S_n(\underline{a}_\lambda-\varepsilon+0)>\frac{k}{n}\right\}$$

但對於任意 $\varepsilon>0$，差數 $F(\overline{a}_\lambda+\varepsilon)-\frac{k}{n}$ 與 $\frac{k}{n}-F(\underline{a}_\lambda-\varepsilon+0)$ 當 n 足够大時必是正數。

根據引理 1，上一等式右端的兩個概率趨於零，故

$$P\{\underline{a}_\lambda-\varepsilon<\xi_k^{(n)}<\overline{a}_\lambda+\varepsilon\}\to 1,\quad (n\to\infty). \tag{25}$$

另一方面，由 (6) 及 (23) 得知，對於任意 n 有

$$P\{\underline{a}_\lambda<\xi_k^{(n)}<\overline{a}_\lambda\}=\Phi_{kn}(\overline{a}_\lambda)-\Phi_{kn}(\underline{a}_\lambda+0)=0. \tag{26}$$

(25) 及 (26) 式證明了 (24)。

如果應用拉普拉斯 (Laplace) 極限定理，我們在目前的情况下可以達到更有决定性的結論。令

$$\frac{k}{n}=\lambda+\eta_n \tag{27}$$

此處當 $n\to\infty$ 時由假設知 $\eta_n\to 0$. 應用 (3) 與 (4) 及拉普拉斯的漸近公式，便得：

$$P\{\underline{a}_\lambda-\varepsilon<\xi_k^{(n)}\leqslant\underline{a}_\lambda\}=P\left\{S_n(\underline{a}_\lambda+0)\geqslant\frac{k}{n}\right\}-$$
$$-P\left\{S_n(\underline{a}_\lambda-\varepsilon+0)\geqslant\frac{k}{n}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_n}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t'_n}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\rho_n \tag{28}$$

其中

$$t_n=\frac{\eta_n\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}},\quad t'_n=\frac{\frac{k}{n}-F(\underline{a}_\lambda-\varepsilon+0)}{\sqrt{F(\underline{a}_\lambda-\varepsilon+0)(1-F(\underline{a}_\lambda-\varepsilon+0))}}\sqrt{n}$$

而　　$\rho_n\to 0$　當 $n\to\infty$。

但對任意 $\varepsilon>0$，由假設知 $t'_n\to\infty$，故由 (28) 得知

$$P\{\underline{a}_\lambda-\varepsilon<\xi_k^{(n)}\leqslant\underline{a}_\lambda\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_n}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+r_n(\varepsilon),\qquad(29)$$

$$r_n(\varepsilon)\to 0,\quad (n\to\infty).$$

同理可得

$$P\{\overline{a}_\lambda\leqslant\xi_k^{(n)}<\overline{a}_\lambda+\varepsilon\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_n}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+r'_n(\varepsilon)\qquad(30)$$

$$r'_n(\varepsilon)\to 0,\quad (n\to\infty).$$

定理 2 亦可由 (29) 與 (30) 兩式推出。在這種條件下 $\xi_k^{(n)}$ 爲穩定的必要與充分條件是：對於任意 $\varepsilon>0$，當 $n\to\infty$ 時，(29) 或 (30) 式中的概率之一趨於零。這個情況衹有在以下二種情況下才能實現：

a) $\eta_n\sqrt{n}\to\infty$。在這種情形下，由 (29) 與 (30) 得知 $\xi_k^{(n)}$ 概率地趨於 $\overline{a}_\lambda$；

b) $\eta_n\sqrt{n}\to-\infty$，此時 $\xi_k^{(n)}$ 概率地趨於 $\underline{a}_\lambda$。

a)b) 兩個條件之中的任何一個都是 $\xi_k^{(n)}$ 穩定性（分別靠近 $\overline{a}_\lambda$ 或 $\underline{a}_\lambda$）的充分與必要條件。我們再指出一個很有趣的特別情況：若 $\eta_n\sqrt{n}\to t$ $(n\to\infty)$，則 $\xi_k^{(n)}$ 的極限分佈函數有二個間斷點 $\underline{a}_\lambda$ 與 $\overline{a}_\lambda$，在這二個點的跳躍分別爲

$$p_1^{(\lambda)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{t}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

與　　$$p_2^{(\lambda)}=1-p_1^{(\lambda)}$$

通常 $\eta_n=0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 即 $t=0$, 所以 $p_1^{(\lambda)}=p_2^{(\lambda)}=\frac{1}{2}$。

§3. 中間項的强穩定性

在定理 1 的條件下，我們已經證明了 $\xi_k^{(n)}$ 概率地趨於 a_λ，還不難證明更强的結果，這個結果相當於獨立機變數和的强大數法則。

定理 3. 若 $\underline{a}_\lambda=\overline{a}_\lambda=a_\lambda$，而叙列 $\xi_k^{(n)}$ 的極限秩等於 λ, $0<\lambda<1$, 則 $\xi_k^{(n)}$ 是强穩定的：

$$P\{\xi_k^{(n)}\to a_\lambda\}=1 \tag{31}$$

如所周知，要證明 (31) 式，祇需證明：對於任意 $\varepsilon>0$，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_k^{(n)}-a_\lambda|>\varepsilon\} \tag{32}$$

是收歛的。在定理 1 的證明中我們看到：級數 (32) 的通項等於 (14′) 與 (14″) 兩式裏的概率之和。令

$$\delta=\min\left[\lambda-F(a_\lambda-\varepsilon+0),\ \ F(a_\lambda+\varepsilon)-\lambda\right] \tag{33}$$

則當 n 足够大時便有

$$P\left\{S_n(a_\lambda+\varepsilon)<\frac{k}{n}\right\}\leqslant P\left\{S_n(a_\lambda+\varepsilon)-F(a_\lambda+\varepsilon)<-\frac{\delta}{2}\right\} \tag{34}$$

與

$$P\left\{S_n(a_\lambda-\varepsilon+0)\geqslant\frac{k}{n}\right\}\leqslant P\left\{S_n(a_\lambda-\varepsilon+0)-F(a_\lambda-\varepsilon+0)>\frac{\delta}{2}\right\} \tag{34′}$$

注意在勃奴立的情况中我們有[1]

1) 參看 哥立窕科 概率論教程 113頁, Москва, 1934。

$$E(S_n(a_\lambda+\varepsilon)-F(a_\lambda+\varepsilon))^4<3/n^2,$$

$$E(S_n(a_\lambda-\varepsilon+0)-F(a_\lambda-\varepsilon+0))^4<3/n^2,$$

因而引用切被謝夫不等式即得

$$P\left\{|S_n(a_\lambda+\varepsilon)-F(a_\lambda+\varepsilon)|>\frac{\delta}{2}\right\}<\frac{48}{n^2\delta^4}, \tag{35}$$

$$P\left\{|S_n(a_\lambda-\varepsilon+0)-F(a_\lambda-\varepsilon-0)|>\frac{\delta}{2}\right\}<\frac{48}{n^2\delta^4}. \tag{35'}$$

由 (34) (34′) (35) 與 (35′) 可知當 n 足够大時

$$P\{|\xi_k^{(n)}-a_\lambda|>\varepsilon\}<\frac{96}{n^2\delta^4}. \tag{36}$$

由此即知級數 (32) 收斂，從而 (31) 得證。

§4. 中間項的極限分佈律的類型

1. 我們現在轉向研究中間項所組成的叙列的極限分佈律。和以前一樣，我們假設所考查的項的秩 $\frac{k}{n}$ 當 n 增大時趨於極限 λ, $0<\lambda<1$. 我們將要看到，在上述條件下，在許多有實際重要性的場合中，經過適當的正則化以後，中間項的極限分佈函數趨於一定的極限；換言之，經過適當地選擇常數

$$a_n>0 \text{ 與 } b_n,\ -\infty<b_n<\infty$$

之後，便有

$$P\left\{\frac{\xi_k^{(n)}-b_n}{a_n}<x\right\}=\Phi_{kn}(a_n x+b_n)\to\Phi(x), \quad (n\to\infty) \tag{37}$$

上式在極限分佈函數 $\Phi(x)$ 的一切連續點成立。爲了更具體的掌握這個問題，我們首先証明下述定理。

定理 4.　設當 $n\to\infty$ 時，$\frac{k}{n}\to\lambda$, $0<\lambda<1$。則對於給定的叙

列 a_n 與 b_n，(37) 式成立的必要與充分條件爲：

$$\widetilde{u}_n(x)=\frac{F(a_n x+b_n)-\lambda_{kn}}{\tau_{kn}}\to u(x),\quad (n\to\infty) \tag{38}$$

其中

$$\lambda_{kn}=\frac{k}{n+1},\quad \nu_{kn}=\frac{n-k+1}{n+1} \tag{38'}$$

$$\tau_{kn}=\sqrt{\frac{\lambda_{kn}\,\nu_{kn}}{n+1}} \tag{38''}$$

而增函數 $u(x)$ 藉下面等式由 $\Phi(x)$ 唯一地確定：

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u(x)}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \tag{39}$$

爲了証明此定理，我們先要証明下述重要引理。

引理 2. 如果當 $n\to\infty$ 時，項 $\xi_k^{(n)}$ 的名次，即（左）數 k 與（右）數 $n-k+1$，同時無限增大，則

$$R_{kn}(x)=\Phi_{kn}(a_n x+b_n)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\widetilde{u}_n(x)}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{40}$$

一致的趨於零。

証明：對於給定的 $\varepsilon>0$，選擇大的 T 以使

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{T}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt<\varepsilon \tag{41}$$

$$\frac{1}{T^2}<\varepsilon \tag{41'}$$

若 $\widetilde{u}_n(x)\leqslant -T$，則（當 n 足够大時）

$$F(a_n x+b_n)\leqslant\lambda_{kn}-T\tau_{kn}<1,$$

因而根據 (6) 式，

$$\Phi_{kn}(a_n x+b_n)\leqslant\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^{\lambda_{kn}-T\tau_{kn}} x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^1\frac{(x-\lambda_{kn})^2}{T^2\tau_{kn}^2}x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx=\frac{n+1}{(n+2)T^2}<\frac{1}{T^2}. \quad (42)$$

由 (42) 與 (41′) 推知

$$\Phi_{kn}(a_n x+b_n)<\varepsilon \quad (43)$$

在條件 $\widetilde{u}_n(x)\leqslant -T$ 下，由 (41) 又有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\widetilde{u}_n(x)} e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-T} e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\varepsilon \quad (44)$$

由 (43) 與 (44) 得知若 $\widetilde{u}_n(x)\leqslant -T$ 而 n 足够地大，則

$$|R_{kn}(x)|<\varepsilon \quad (45)$$

如果 $\widetilde{u}_n(x)\geqslant T$，則

$$F(a_n x+b_n)\geqslant\lambda_{kn}+T\tau_{kn},$$

故由 (6) 與 (41′) 得

$$1-\Phi_{kn}(a_n x+b_n)\leqslant\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_{\lambda_{kn}+T\tau_{kn}}^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^1\frac{(x-\lambda_{kn})^2}{T^2\tau_{kn}^2}x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx<\frac{1}{T^2}<\varepsilon. \quad (46)$$

此外

$$1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\widetilde{u}_n(x)} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_T^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt<\varepsilon. \quad (47)$$

由 (46) 與 (47) 可見當 n 足够大時仍有

$$|R_{kn}(x)|<\varepsilon \quad (48)$$

現在考慮

$$|\widetilde{u}_n(x)|<T \quad (49)$$