



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

通信原理

第五版

全程导学及习题全解

胡岸勇 郝立强 编

张鸣瑞 主审



◆知识归纳 梳理主线重点难点

◆习题详解 精确解答教材习题

◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

通信原理

第五版

全程导学及习题全解

TN911
42C3

2007

胡岸勇 郝立强 编

张鸣瑞 主审



- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目 (CIP) 数据

通信原理全程导学及习题全解/胡岸勇、郝立强编. —北京: 中国时代经济出版社, 2007. 2

(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 978 - 7 - 80221 - 248 - 0

I. 通… II. ①胡… ②郝… III. 通信理论—高等学校—教学参考资料

IV. TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 148867 号

通信原理全程导学及习题全解

胡岸勇
郝立强
编

出 版 者	中国时代经济出版社
地 址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦东办公区 11 层
邮 政 编 码	100007
电 话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传 真	(010)68320634
发 行	各地新华书店
印 刷	北京鑫海达印刷有限公司
开 本	787×1092 1/16
版 次	2007 年 2 月第 1 版
印 次	2007 年 2 月第 1 次印刷
印 张	12.875
字 数	280 千字
印 数	1~5000 册
定 价	15.50 元
书 号	ISBN 978 - 7 - 80221 - 248 - 0

版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书是根据国防工业出版社出版、樊昌信教授主编的《通信原理》(第五版)教材所编写的辅导用书。全书共十二章,与教材相对应,每章分为四部分,分别为知识点要点归纳、典型例题讲解、思考题解答和教材的习题全解。本书可以作为在校大学生和自考生学习《通信原理》课程的学习辅导材料和复习参考用书,及工科考研强化复习的指导书,也可以作为《通信原理》课程函授和成人教育的配套教材及教师的教学参考书。

前 言

“通信原理”是通信技术的理论基础课程,也是理工科研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握樊昌信教授主编《通信原理》(第五版)的精髓和解题方法,我们编写了本辅导书。本书根据《通信原理》教材中每一章的内容,编写了以下几方面的内容:

本章知识要点:总结了各章中的主要知识点,理清各知识点之间的脉络联系,囊括了主要定理及相关推论和重要公式等,帮助读者迅速了解本章知识要点,系统理解各章的体系结构,奠定扎实的理论基础。典型例题讲解:精选具有代表性的重点题型进行讲解,分析问题的突破点,指引解决问题的思路。思考题解答:对教材中的思考题进行解答。习题全解:依据教材各章节的习题,进行详尽的解答。

本书由胡岸勇、郝立强等同志编写,全书由张鸣瑞教授主审。张鸣瑞老师高深的造诣、严谨的治学态度,使编者受益匪浅,对此深表感谢。本书编写过程中得到崔建宗、苗明川、侯钢、吴星明等同志的大力协助,并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持,为此表示衷心的感谢!对《通信原理》(第五版)教材的作者樊昌信教授表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,本书难免有缺点和疏漏,存在一些不妥之处,敬请各位专家及广大读者批评指正。

编 者

2007年1月

目 录

第一章 绪论	1
本章知识要点	1
典型例题讲解	3
思考题解答	4
习题全解	5
第二章 随机信号分析	9
本章知识要点	9
典型例题讲解	14
思考题解答	16
习题全解	18
第三章 信道	28
本章知识要点	28
典型例题讲解	31
思考题解答	32
习题全解	33
第四章 模拟调制系统	39
本章知识要点	39
典型例题讲解	48
思考题解答	51
习题全解	52
第五章 数字基带传输系统	66
本章知识要点	66
典型例题讲解	71
思考题解答	73
习题全解	77
第六章 正弦载波数字调制系统	96
本章知识要点	96
典型例题讲解	103
思考题解答	104
习题全解	107
第七章 模拟信号的数字传输	119
本章知识要点	119
典型例题讲解	123
思考题解答	124
习题全解	126

第八章 数字信号的最佳接收	133
本章知识要点	133
典型例题讲解	135
思考题解答	137
习题全解	139
第九章 差错控制编码	151
本章知识要点	151
典型例题讲解	154
思考题解答	156
习题全解	158
第十章 正交编码与伪随机序列	172
本章知识要点	172
典型例题讲解	174
思考题解答	175
习题全解	177
第十一章 同步原理	180
本章知识要点	180
典型例题讲解	183
思考题解答	184
习题全解	186
第十二章 通信网	193
本章知识要点	193
思考题解答	197

第一章 绪 论

本章知识要点

一、通信的概念

通信按照传统的理解就是信息的传输与交换。

二、通信的模型

基本的点对点通信就是把发送端的消息通过某种信道传递到接收端,其系统模型如下。

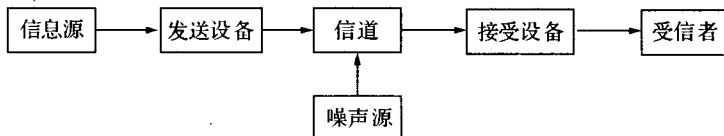


图 1-1 通信系统模型

模拟通信系统模型如下。

图 1-2 中的调制器和解调器就分别代表图 1-1 中的发送设备和接收设备。

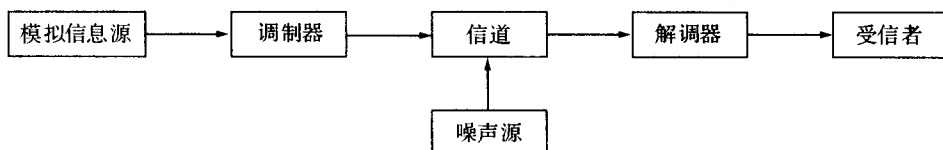


图 1-2 模拟通信系统模型

数字通信系统模型

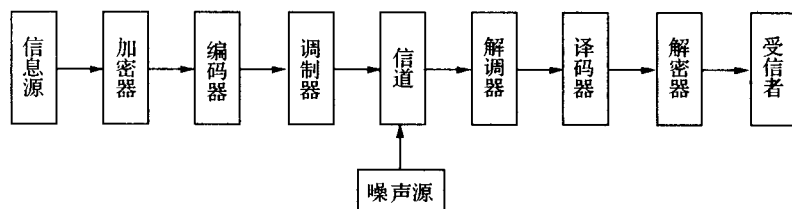


图 1-3 数字通信系统模型

实际上的数字通信系统并非一定要如图 1-3 所示包含所有环节,如下图 1-4 数字基带传输系统,它的模型不包括频带调制与解调环节。

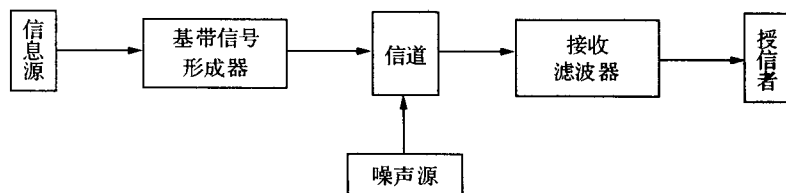


图 1-4 基带数字通信系统模型

三、通信系统分类

1. 通信系统根据消息的物理特征的不同可分为电报通信系统,电话通信系统,数据通信系统,图像通信系统等。

2. 通信系统根据是否采用调制可分为基带传输和频带(调制)传输。

3. 通信系统根据信号特征分为模拟通信系统和数字通信系统两类。

4. 通信系统根据传输媒质不同可分为有线和无线。

5. 通信系统根据信号复用方式不同可分为频分复用(FDM),时分复用(TDM)和码分复用(CDM)。

四、通信方式

对于点对点之间的通信,按消息传送的方向和时间关系,通信方式可分为单工,半双工和全双工通信三种,依次如下图所示。

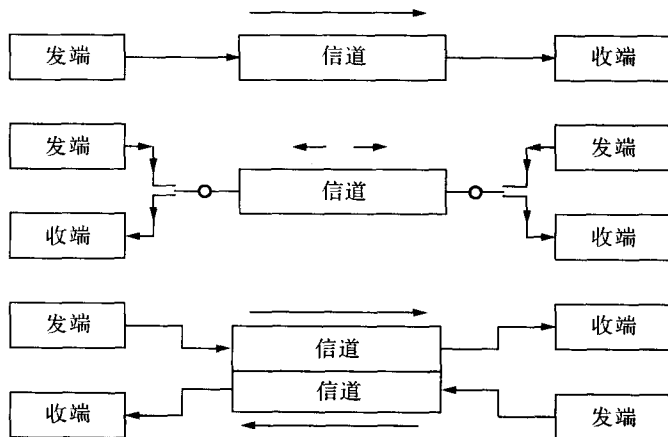


图 1-5

在数字通信中按照数字信号码元排列方法不同,分为串行传输与并行传输之分,依次如下图所示。

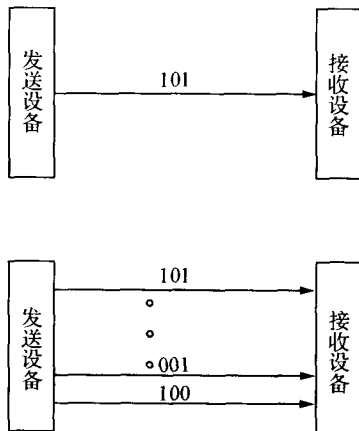


图 1-6

五、信息及其度量

信息可被理解为消息中包含的有意义的内容。

消息中所含的信息量 I 与消息 x 出现的概率 $P(x)$ 间的关系式

$$I = \log_a \frac{1}{P(x)} = -\log_a P(x); \text{当 } a \text{ 取 } 2 \text{ 时,信息量的单位是比特(bit);}$$

平均信息量计算公式

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \text{ (bit/符号)}$$

当信息源的每个符号等概率出现时,信息源具有最大的熵。

$$H = \log_2 n \text{ (bit/符号)}$$

六、通信系统的主要性能指标

通信系统的指标涉及很多方面,设计和评价通信系统的主要性能指标是传输信息的有效性和可靠性。

有效性主要指消息传输的‘速度’问题,可靠性主要指消息传递的‘质量’问题。

对于模拟通信系统来说,主要的性能指标是消息传递的速度和均方误差。

对于数字通信系统来说,主要的性能指标为传输速率和差错率。

典型例题讲解

【例题 1-1】 已知二元离散信源只有“0”、“1”两种符号,若“0”出现概率为 $1/3$,求出现“1”所含的信息量。

【解】 由于全概率为 1,因此出现“1”的概率为 $2/3$ 。由信息量定义式可知,出现“1”的信息量

$$I = \log_a \frac{1}{P(x)} = -\log_a P(x)$$

$$I(1) = \log_2 \frac{3}{2} = 0.585 \text{ bit}$$

【例题 1-2】 已知英文字母 e 和 z 出现的概率分别为 0.105 和 0.001,求英文字母 e 和 z 的信息量。

【解】 e 的信息量

$$I(e) = -\log_2 0.105 = 3.24 \text{ bit}$$

z 的信息量

$$I(z) = -\log_2 0.001 = 9.97 \text{ bit}$$

【例题 1-3】 某离散信源由 0,1,2,3 四种符号组成,其概率分布为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

求消息 201 020 130 213 001 203 210 100 321 010 023 102 002 010 312 032 100 120 210 的信息量。

【解】 此消息总长为 57 个符号,其中 0 出现 23 次,1 出现 14 次,2 出现 13 次,3 出现 7 次。由如下公式可求得此消息的信息量

$$I = - \sum_{i=1}^n n_i \log_a P(x_i)$$

$$I = -23 \log_2 \frac{3}{8} - 14 \log_2 \frac{1}{4} - 13 \log_2 \frac{1}{4} - 7 \log_2 \frac{1}{8}$$

$$= 32.55 + 28 + 26 + 21$$

$$= 107.55 \text{ bit}$$

【例题 1-4】 求例题 1-3 中消息的平均信息量。

【解】 每个符号所含信息量的统计平均值为

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_a P(x_i)$$

$$H = -\frac{3}{8} \log_2 \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8}$$

$$= 1.906 \text{ bit}$$

因为消息有 57 个符号,所以该消息所含信息量为

$$I = 57 \times 1.906 \approx 108.64 \text{ bit}$$

说明:与例题 1-3 相比,总信息量的结果略有差异,原因在于两者平均处理的方法不同。随着消息中符号数的增加,这种误差会逐渐减小。

顺便指出,不同的离散信息源可能有不同的熵值。无疑,我们期望熵值愈大愈好,可以证明,信息源的最大熵发生在每一个符号等概率出现时,即 $P(x_i) = 1/n$, 最大熵值等于 $\log_2 n$ (bit/符号)。

思考题解答

1-1 以无线广播和电视为例,说明图 1-1 模型中信息源、受信者及信道包含的具体内容是什么?

【答】 在无线电广播中,信息源包括的具体内容为从声音转换而成的原始电信号。受信者中包括的具体内容就是从复原的原始电信号转换成的声音。

在电视系统中,信息源包括的具体内容为从影像转换而成的电信号。受信者中包括的具体内容就是从复原的原始电信号转换成的影像。

二者信道中包括的具体内容分别是载有声音和影像信息的无线电波。

1-2 数字通信有哪些特点?

【答】 (1)抗干扰能力强。

(2)传输差错可以控制。

(3)便于加密处理。信息传输的安全性和保密性越来越重要,数字通信的加密处理的比模拟通信容易得多,以话音信号为例,经过数字变换后的信号可用简单的数字逻辑运算进行加密、解密处理。

(4)便于存储、处理和交换。数字通信的信号形式和计算机所用信号一致,都是二进制代码,因此便于与计算机联网,也便于用计算机对数字信号进行存储、处理和交换,可使通信网的管理、维护实现自动化、智能化。

(5)设备便于集成化、微型化。数字通信采用时分多路复用,不需要体积较大的滤波器。设备中大部分电路是数字电路,可用大规模和超大规模集成电路实现,因此体积小、功耗低。

(6)便于构成综合数字网和综合业务数字网。采用数字传输方式,可以通过程控数字交换设备进行数字交换,以实现传输和交换的综合。另外,电话业务和各种非话业务都可以实现数字化,构成综合业务数字网。

(7)占用信道频带较宽。一路模拟电话的频带为 4kHz 带宽,一路数字电话约占 64kHz。

1-3 按消息的物理特征,通信系统如何分类?

【答】 根据消息的物理特征不同,通信系统可分为电报通信系统,电话通信系统,数据通信系统,图像通信系统等。

1-4 按调制方式,通信系统如何分类?

【答】 参见教材表 1-1。

1-5 按传输信号的特征,通信系统如何分类?

【答】 按信号特征信道中传输的信号可分为是模拟信号和数字信号,相应的系统分别为模拟通信系统和数字通信系统。

1-6 按传送信号的复用方式,通信系统如何分类?

【答】 频分复用(Frequency-Division Multiplexing)

时分复用(Time-Division Multiplexing)

码分复用(Code-Division Multiplexing)

1-7 通信方式是如何确定的?

【答】 在点对点通信情况下,根据传输方向与时间的关系通信方式可选择单工,半双工,全双工中的一种方式。

在频带资源紧张的情况下,选择模拟通信;在需要抗干扰的情况下,选择数字通信。在数字通信中,一般的远距离通信大都采用串行传输方式,在近距离数字通信中,有时也用并行传输方式。

1-8 通信系统的主要性能指标是什么?

【答】 传输速率和差错率。

1-9 什么是误码率? 什么是误信率? 它们之间的关系如何?

【答】 误码率是码元在传输系统中被传错的概率。

误信率是码元的信息量在传输系统中被丢失的概率。

它们是描述差错率的两种不同表述。在二进制中,二者数值相等。

1-10 什么是码元速率? 什么是信息速率? 它们之间的关系如何?

【答】 码元速率定义为每秒钟传送码元的数目,单位为波特。

信息速率定义为每秒钟传递的信息量,单位是 bit/s。

在二进制下,码元速率与信息速率在数值上相等,只是单位不同;在 N 进制下,设信息速率为 R_b (bit/s),码元速率为 R_{BN} ,则有

$$R_b = R_{BN} \log_2 N \text{ (bit/s)}$$

1-11 未来通信技术的发展趋势如何?

【答】 随着科学技术的进步及各种技术的相互渗透,相互利用,相继出现了综合业务数字网(ISDN),多媒体通信技术,综合移动卫星通信,个人通信网及智能通信网等。特别是多媒体通信以通信技术,广播电视技术,计算机技术为基础,突破了计算机,电话,电视等传统产业的界限,将计算机的交互性,通信网的分布性和广播电视的真实性融为一体,向人们提供了一种综合的消息服务,是新型智能化的通信方式,是将来发展趋势之一。在信息技术中,全球信息高速公路将会成为将来高度信息化社会的一项基本设施。

1-12 什么是信源符号的信息量? 什么是离散信源的信源熵?

【答】 信源符号的信息量是信息符号中所包含的有用信息的多少。

离散信源的信源熵是离散符号所包含的信息量的平均值。

习题全解

1-1 设英文字母 E 出现的概率为 0.105, x 出现的概率为 0.002。试求 E 及 x 的信息量。

【考点分析】 信息量计算公式 $I = \log_2 \frac{1}{P(x)} = -\log_2 P(x) \text{ bit}$

【解题过程】 字母 E 出现的概率 $P(E) = 0.105$, 字母 x 出现的概率 $P(x) = 0.002$, 由公式可得其信息量分别为

$$I_E = \log_2 \frac{1}{P(E)} = 3.25 \text{ bit}$$

$$I_x = \log_2 \frac{1}{P(x)} = 8.97 \text{ bit}$$

1-2 某信息源的符号集由 A, B, C, D 和 E 组成, 设每一符号独立出现, 其出现概率分别为 1/4, 1/8, 1/8, 3/16 和 5/16。试求该信息源符号的平均信息量。

【考点分析】 平均信息量计算公式

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \text{ (bit/符号)}$$

【解题过程】 由题意可知

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{8}, P(C) = \frac{1}{8}, P(D) = \frac{3}{16}, P(E) = \frac{5}{16}, \text{ 因此直接利用公式可得}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= 2.23 \text{ bit/符号} \end{aligned}$$

1-3 设有四个消息 A, B, C, D 分别以概率 1/4, 1/8, 1/8 和 1/2 传送, 每一消息的出现是相互独立的, 试计算其平均信息量。

【考点分析】 平均信息量计算公式

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) (\text{bit/符号})$$

【解题过程】 由题意可知

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{8}, P(C) = \frac{1}{8}, P(D) = \frac{1}{2},$$

因此直接利用公式可得

$$\begin{aligned} H(x) &= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= 1.75 \text{ bit/符号} \end{aligned}$$

1-4 一个由字母 A, B, C, D 组成的字。对于传输的每一个字母用二进制脉冲编码, 00 代替 A, 01 代替 B, 10 代替 C, 11 代替 D, 每个脉冲宽度为 5ms。

(1) 不同的字母是等可能出现时, 试计算传输的平均信息速率;

(2) 若每个字母出现的可能性分别为

$$P_A = \frac{1}{5}, P_B = \frac{1}{4}, P_C = \frac{1}{4}, P_D = \frac{3}{10}$$

试计算传输的平均信息速率。

【考点分析】 平均信息量计算公式

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) (\text{bit/符号})$$

信息源的最大熵(每一个符号等概率出现时),

$$H = \log_2 n (\text{bit/符号})$$

信息速率

$$R_b = R_{BN} \times H$$

【解题过程】 (1) 不同字母等概率出现时, 每个字母平均信息量达到信息源的最大熵值

$$H = \log_2 4 = 2 (\text{bit/符号})$$

字母采用二进制脉冲编码, 每个脉冲宽度 5ms, 所以每个字母的持续时间是 10ms, 字母的传输速率为

$$R_B = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \times 5 \times 10^{-3}} = 100 \text{ Baud}$$

$$R_b = R_{BN} \times H = 200 \text{ bit/s}$$

(2) 每个字母不等概率出现时, 由平均信息量公式可得

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) = 1.985 \text{ bit/符号}$$

平均信息速率为

$$R_b = R_{BN} \times H = 198.5 \text{ bit/s}$$

1-5 国际莫尔斯电码用点和划的序列发送英文字母, 划用持续 3 单位的电流脉冲表示, 点用持续 1 个单位的电流脉冲表示; 且划出现的概率是点出现概率的 1/3:

(1) 计算点和划的信息量;

(2) 计算点和划的平均信息量。

【考点分析】 信息量计算公式

$$I = \log_2 \frac{1}{p(x)} = -\log_2 p(x) \text{ bit}$$

平均信息量计算公式

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) (\text{bit/符号})$$

【解题过程】 (1) 由题意可知

$$P(\cdot) = \frac{1}{3} P(-) \quad ①$$

$$P(\cdot) + P(-) = 1 \quad ②$$

联立两个等式解得

$$P(\cdot) = 0.75 \quad P(-) = 0.25$$

由信息量公式求得

$$I(\cdot) = \log_2(0.75) = 0.415 \text{ bit}$$

$$I(-) = \log_2 4 = 2 \text{ bit}$$

(2) 由平均信息量公式可知, 点和划的平均信息量为

$$H = \frac{3}{4} I(\cdot) + \frac{1}{4} I(-) = 0.81 \text{ bit/符号}$$

1-6 设一信息源的输出由 128 个不同符号组成。其中 16 个出现的概率为 $1/32$, 其余 112 个出现概率为 $1/224$ 。信息源每秒发出 1000 个符号, 且每个符号彼此独立。试计算该信息源的平均信息速率。

【考点分析】 平均信息量计算公式

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \text{ (bit/符号)}$$

信息速率计算公式

$$R_b = R_{BN} \times H(x) \text{ bit/s}$$

【解题过程】 $H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) = 6.404 \text{ bit/符号}$

已知码元速率 $R_B = 1000 \text{ Baud}$, 所以平均信息速率为 $R_b = R_{BN} \times H(x) = 6404 \text{ bit/s}$

1-7 对于二电平数字信号, 每秒钟传输 300 个码元, 问此传码率 R_B 等于多少? 若该数字信号 0 和 1 出现是独立等概的, 那么传信率 R_b 等于多少?

【考点分析】 (1) 码元速率的基本概念: 码元速率定义为每秒钟传送码元的数目, 单位为波特。

(2) 信息源的最大熵(每一个符号等概率出现时),

$$H = \log_2 n \text{ (bit/符号)}$$

(3) 信息速率计算公式 $R_b = R_{BN} \times H(x) \text{ bit/s}$

【解题过程】 码元速率的基本概念可知, 码元速率 $R_B = 300 \text{ Baud}$ 。

当信息源的每个符号等概率出现时, 信息源的熵最大

$$H = \log_2 2 = 1 \text{ (bit/符号)}$$

那么信息速率为

$$R_b = R_{BN} \times H = 300 \text{ bit/s}$$

1-8 若题 1-2 中信息源以 1000B 速率传送信息, 则传送 1 小时的信息量为多少? 传送 1 小时可能达到的最大信息量为多少?

【考点分析】 平均信息量计算公式

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \text{ (bit/符号)}$$

信息速率计算公式 $R_b = R_{BN} \times H(x) \text{ bit/s}$

信息源的最大熵(每一个符号等概率出现时),

$$H = \log_2 n \text{ (bit/符号)}$$

信息总量计算公式

$$I = R_b \times T \text{ bit}$$

【解题过程】 由习题 1-2 结果得

$$H(x) = 2.23 \text{ bit/符号}$$

则平均信息速率为

$$R_b = R_{BN} \times H(x) = 2230 \text{ bit/s}$$

一小时的信息量为

$$I = R_b \times T = 8.028 \times 10^6 \text{ bit}$$

当信息源的每个符号等概率出现时, 信息源的熵最大

$$H = \log_2 5 = 2.322 \text{ bit/符号}$$

平均信息速率为 $R_b = R_{BN} \times H(x) = 2322 \text{ bit/s}$

传一小时信息量为 $I = R_b \times T = 8.359 \times 10^6 \text{ bit}$

1-9 如果二进独立等概信号,码元宽度为 0.5 ms ,求 R_B 和 R_b ;有四进制信号,码元宽度为 0.5 ms ,求传码率 R_B 和独立等概时的传信率 R_b 。

【考点分析】 信息源的最大熵(每一个符号等概率出现时):

$$H = \log_2 n (\text{bit/符号})$$

信息速率计算公式

$$R_b = R_{BN} \times H(x) \text{ bit/s}$$

【解题过程】 二进制中,不同码元等概率出现时,每个码元平均信息量为

$$H = \log_2 2 = 1 (\text{bit/符号})$$

码元的传输速率为

$$R_B = \frac{1}{T} = 2000 \text{ Baud}$$

平均信息速率为

$$R_b = R_{BN} \times H(x) = 2000 \text{ bit/s}$$

同理,四进制时不同码元等概率出现时每个码元平均信息量为

$$H = \log_2 4 = 2 (\text{bit/符号})$$

码元的传输速率为

$$R_B = \frac{1}{T} = 2000 \text{ Baud}$$

平均信息速率为

$$R_b = R_{BN} \times H(x) = 4000 \text{ bit/s}$$

第二章 随机信号分析

本章知识要点

一、随机过程的一般表述

1. 随机过程的定义

随机试验 E 可能的结果为 $\xi(t)$, 试验的样本空间 S 为 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots\}$, i 为正整数, $x_i(t)$ 为第 i 个样本函数(又称之为实现), 每次试验之后取空间 S 中的某一样本函数, 于是称此 $\xi(t)$ 为随机函数。当 t 代表时间量时, 称此 $\xi(t)$ 为随机过程。

2. 随机过程的统计特性

(1) 概率分布函数

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$$

概率密度函数

$$\frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

(2) 数学期望

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx$$

$E[\xi(t)]$ 常记为 $a(t)$

(3) 方差

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= E\{\xi(t) - E[\xi(t)]\}^2 \\ &= E[\xi^2(t)] - [E\xi(t)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x, t) dx - [a(t)]^2 \end{aligned}$$

$D[\xi(t)]$ 也记为 $\sigma^2(t)$

(4) 自相关函数

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

(5) 协方差函数

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

自相关函数和协方差函数的关系

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - E[\xi(t_1)] \cdot E[\xi(t_2)]$$

常用协方差函数 $B(t_1, t_2)$ 和相关函数 $R(t_1, t_2)$ 来衡量随机过程任意两个时刻上获得的随机变量的统计特性。而自相关函数和自协方差函数是衡量同一随机过程的相关程度。

(6) 互相关函数和互协方差函数

设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别表示两个随机过程, 则互相关函数定义为

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$$

互协方差函数定义为

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a_\xi(t_1)][\eta(t_2) - a_\eta(t_2)]\}$$

二、平稳随机过程

1. 狭义平稳随机过程

若一个随机过程任何的 n 维分布函数或概率密度函数与时间起点无关,则这个随机过程称为狭义平稳随机过程。用数学语言描述如下:对任意正整数 n 和任意实数 $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, 随机过程的 n 维概率密度函数满足

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

由此可见,狭义平稳随机过程的统计特性不随时间的推移而变化。

2. 广义平稳随机过程

若一个随机过程的数学期望与时间无关,而其相关函数仅与时间间隔 τ 相关,称这个随机过程为广义平稳随机过程,也称为宽平稳随机过程。

3. 各态历经性

许多平稳随机过程的数字特征完全可以由随机过程中的任一实现的数字特征来决定,即从随机过程中得到的任一实现,好像经历了随机过程的所有可能状态,这一性质称为平稳随机过程各态历经性。通过这一性质,随机过程的数学期望可以由任一实现的时间平均来代替;随机过程的相关函数也可以由时间平均来代替统计平均。其严格的数学描述为,若平稳随机过程 $x(t)$ 使下列式子

$$\begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt = \bar{a} = a \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) X(t + \tau) dt = \overline{R(\tau)} = R(\tau) \end{cases}$$

依概率 1 成立,则称 $X(t)$ 为各态历经性的平稳随机过程。

4. 相关函数的性质

设 $\xi(t)$ 为实平稳随机过程,那么它的相关函数具有如下性质:

$$(1) \quad R(0) = E[\xi^2(t)] = s \quad [\xi(t) \text{ 的平均功率}]$$

因为平稳随机过程的总能量往往是无限的,但是其平均功率却是有限的。

$$(2) \quad R(\tau) = R(-\tau) \quad [R(\tau) \text{ 是偶函数}]$$

$$(3) \quad |R(\tau)| \leq R(0) \quad [R(\tau) \text{ 的上界}]$$

$$(4) \quad R(\infty) = E^2[\xi(t)] \quad [\xi(t) \text{ 的直流功率}]$$

$$(5) \quad R(0) - R(\infty) = \sigma^2 \quad [\text{方差}, \xi(t) \text{ 的交流功率}]$$

三、平稳随机过程的相关函数与功率谱密度

设平稳随机过程 $\xi(t)$ 的自相关函数为 $R(\tau)$, 功率谱密度为 $P_\xi(\omega)$, 则它们之间是傅立叶对的关系,即

$$\begin{aligned} P_\xi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

四、高斯过程

1. 高斯过程的特点

(1) 高斯过程的 n 维分布仅由各随机变量的均值、方差和两两间的协方差函数决定。

(2) 高斯过程若为广义平稳,则必然也是狭义平稳。

(3) 高斯过程中的随机变量之间若互不相关,则也是统计独立。

2. 一维正态分布的性质

(1) 概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$