西德中学数学课本

代 数

上 册

[西德]威廉·施外策等编

李希贤 薄一仙 译

文化教育出版社

西德中学数学课本

代　数

上　册

［西德］威廉·施外策　等编
李希贤　薄一仙　译

文化教育出版社

1980·北京

内容提要

本书是按西德威廉·施外策等编的中学代数上册第三版(1980年仍在使用)译出的. 内容分五部分: I. 复习和补充,自然数; II. 整数的运算; III. 有理数集; IV. 关系和函数; V. 一次方程组. 书中较多地使用集和对应的观点来阐述代数内容,并初步介绍了语句,整数的群和环,有理数的群、环和体,关系等一些较新的概念. 本书可供我国数学教师、数学教育工作者参考研究.

西德中学数学课本

代 数

上 册

[西德] 威廉·施外策 等编

李希贤 薄一仙 译

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 10.625 字数 219,000

1980年12月第1版 1981年6月第1次印刷

印数 1—12,000

书号 7057·030 定价 0.78元

目　录

本书所采用的各种符号的含义如下:

▶ 出现在作业题的号码前，表示这道题对学生的要求比较高，或者需要由教师作补充解释.

10. 作业题的号码是黑体(带或者不带▶)，表示这道题最好不要去掉.

18* 作业题的号码后加 * 号的(带或者不带▶)，表示这道题是附加的选作题.

$\boxed{\mathbf{D\ 1}}$ 定义;新的术语(符号)的意义和使用的解释.

$\boxed{\mathbf{S\ 1}}$ 定理;表示从已知的东西中引出的一句结论性的话.如果这句话是黑体,则表示这句话对今后的学习十分重要,需要熟记.

$\boxed{\mathbf{R\ 1}}$ 法则;即用简明的方法表示的重要的运算法则.

KG 指交换律,例如 $a+b=b+a$ 或 $a\cdot b=b\cdot a$.

AG 指结合律,例如 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 或 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

DG 指分配律,例如 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

NE 表示存在中性元的规律,例如 $a+0=a$ 或 $a\cdot 1=a$.

■ 哪一道作业题需要你特别考虑,■就出现在哪里.

★ 标注的作业题,只要你有坚强的毅力,就可以作出.

1. 代数的引入

伊尔瑟第一次得到代数课本．她问哥哥汉斯："代数究竟是怎么回事？在这门学科里，人们都干些什么？"汉斯答道："在代数学里，人们不仅用数，更多的是用字母进行运算．"

汉斯没有说错．用"字母"运算是代数学的一个重要特征．到目前为止，我们曾用字母进行过一些运算，所以代数对我们来说，并不应是完全陌生的．我们不妨用几个例题和习题来说明一下．

在加法运算中，我们已知道$3+2=2+3$，$25+15=15+25$等等．类似的**等式**我们可以随手列出好多．所有这些等式都能用一个等式代替，它的形式是"$a+b=b+a$"．这就是说，随便用什么数来代替 a 和 b，等号左边相加与等号右边相加所得的数是相等的．例如，以 12 代替 a，18 代替 b，那么就得 $12+18=18+12$，或$30=30$，就是说，得到了一个正确的语句．

等式 $a+b=b+a$ 也可以用 $x+y=y+x$ 或$\square+\triangle=\triangle+\square$来表示．符号 $a, b, x, y, \square$和$\triangle$在这儿是数的"**代号**"，在数学中一般称为"变数"或"变量"．

下面我们想通过一些习题再作进一步的说明．

习题：

1. $4\cdot5=5\cdot4$, $6\cdot9=9\cdot6$, $15\cdot8=8\cdot15$等等，在这些例子中你看出了一个什么规律？将这个规律用一个有代号的等式

表达.

2. *a*) 心算并比较：$(12\cdot 2)\cdot 50$和$12\cdot(2\cdot 50)$, $(15\cdot 4)\cdot 25$和$15\cdot(4\cdot 25)$, $(42\cdot 8)\cdot 25$和$42\cdot(8\cdot 25)$，哪一个计算起来比较简便?

b) 先用语言，再用一个有代号的等式来表示这些例子属于哪一种规律.

3. $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}, \frac{5}{9}+\frac{2}{9}, \frac{4}{11}+\frac{6}{11}, \frac{11}{25}+\frac{8}{25}$等于多少? 通过一个有代号 a, b, c 的等式来说明同分母的分数应如何相加.

4. 哪一种分数运算法则可以用等式$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$来表示? 用自然数代替 a, b, c, d, 并举出三个用这种运算法则进行运算的例子.

5. *a*) 用简便方法计算$7\cdot 24+3\cdot 24, 7\cdot 36+3\cdot 36, 7\cdot 54+3\cdot 54$. 将这些习题归纳成 $7\cdot x+3\cdot x=10\cdot x$, 你能用哪些数来代替 x?

b) 要求同上：$13\cdot 38+7\cdot 38, 13\cdot 54+7\cdot 54, 13\cdot 72+7\cdot 72$等等.

▶6.* *a*) 计算 $1+2+3+\cdots\cdots+9$, $1+2+3+\cdots\cdots+19$, $1+2+3+\cdots\cdots+25$.

b) 分别用数 9, 19, 25 代替$\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$中的$n$, 并将计算结果与 *a*) 中的结果作一比较，这样可以看出，如用 9, 19, 25 代替等式 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$中的 n, 那么这个等式是正确的. 证明，如果用其他的数来代替 n, 这个等式也能成立.

通过例题和习题我们看到，用象 $a+b=b+a$, $x\cdot y=y\cdot x$ 等等的等式，能够简单明了地表示运算法则和规律. 用任何数代替代号，都能得出一个正确的语句，换句话说，这些式子具有普遍的意义.

但并非所有含有代号的等式都是这种情况. 例如，先后用 1, 2, 3, 4, 5 代替等式 $2\cdot x+5=11$ 中的 x，其结果就如下面表格所表示的那样. 只有用数 3 代替 x 得出的语句是对的，其余都是错的. 即使我们继续代下去，也不可能再找出另一个数

代替 x	得到的语句
1	$7=11$ 错
2	$9=11$ 错
3	$11=11$ 对
4	$13=11$ 错
5	$15=11$ 错
等等	以下全都是错的

能使这个等式成立. 等式 $2\cdot x+5=11$ 只能用 3 才能“满足”（或“解出”），3 就是它的解. **代数学的主要任务**之一就是求解有代号的等式，也就是说，找出那些能使这个有代号的等式成为真语句的数. 因此，象 $2\cdot x+5=11$ 这样的等式也叫做方程.

7. 和上面一样，分别用 1, 2, 3, …代入 x，然后确定所得到的是真语句还是假语句，解下面的方程：*a*) $3\cdot x+8=20$, *b*) $x\cdot 5+9=34$, *c*) $16-2\cdot x=4$, *d*) $6=38-x\cdot 4$.

8. 用同样的方法求解：*a*) $8\cdot x-3\cdot x=5\cdot x$, *b*) $14\cdot x=9\cdot x+5\cdot x$. 你发现有什么特别的地方？

9. 通过验算来证明下面的方程没有解，它们是“无解”(“不可解”)的方程：$a) x+1=x$, $b) 2\cdot x+3=5+2\cdot x$, $c) 0\cdot x=4$, $d) 2\cdot x-x=x+2$.

10. 用 1, 2, 3, 4……代替 x 的办法来证明：没有一个自然数能满足下面的方程，而分数 $a) \frac{3}{2}$, $b) \frac{4}{5}$, $c) \frac{5}{3}$, $d) \frac{1}{2}$ 则分别能满足这些方程，因而也就是这些方程的解.

$a)$ $2\cdot x=3$, $b)$ $5\cdot x=4$, $c)$ $3\cdot x+4=9$, $d)$ $6-2\cdot x=5$.

什么数的两倍加 5 得 11，这个问题如用简单的方式表达就是 $2\cdot x+5=11$，这个等式我们在上面已经把它叫做方程.我们可以举出许多用这种方程表示的习题，但是并非一切方程都能被满足.

例 a. 求一数，它的 4 倍加 9 得 33. 这个数一定满足方程 $4\cdot x+9=33$，显然也应满足方程 $4\cdot x=24$(为什么?)，因而也应当满足方程 $x=6$.

答：所求的数是 6. 验算：$4\cdot 6+9$ 得 33，证明我们的结果是对的.

例 b. 求一数，它的 5 倍比它的 3 倍大 14. 这个数应当能满足方程 $5\cdot x=3\cdot x+14$. 因为 $5\cdot x=3\cdot x+2\cdot x$，所以它也应当能满足方程 $2\cdot x=14$，从而也能满足方程 $x=7$.

答：所求的数是 7. 验算：$5\cdot 7=35$，这比 $3\cdot 7=21$ 大 14.

例 c. 是否有一自然数，它的 3 倍加 6 得 10? 这个数必须满足方程 $3\cdot x+6=10$，因而也能满足方程 $3\cdot x=4$.

答：这样的自然数是没有的. 而分数 $\frac{4}{3}$ 可以满足这个方

程，因为 $3\cdot\frac{4}{3}=4$.

11. 求一自然数

a) 它的 7 倍加 9 得 44，

b) 它的 8 倍比它的 5 倍大 15，

c) 它的 3 倍比它的 5 倍小 5.

12. 奥托说：如果我的年龄是我现在年龄的 4 倍，再加我现在的年龄才刚好是 100 岁．奥托现在多大？

13. 安娜和她母亲的年龄加在一起是 60 岁，安娜母亲的年龄是安娜的 4 倍．安娜的年龄是多少？

▶**14*** 汉斯说：我的妹妹比我小 2 岁，我比我哥哥小 3 岁，我们三人的年龄加在一起是 40 岁．他们三人各有多少岁？

第 2 页到第 6 页上的例题和习题只是把你引进了代数王国，下面我们将开始带你在这个王国里一步一步地漫游．如果在这个过程中重复某些你“已经知道”了的东西，请你不要觉得奇怪．

I. 复习和补充；自然数

2. 关于集和它的子集

过去你在数学课中常常遇到集（也叫集合）．在小学里，你

已学过用小木棒、球和筹码的集计数和进行加法运算，老师用象图 1 那样的集的图象向你讲述过乘法．集在代数中也是有作用的．因此我们想首先讲述一下关于“集”的一些基本概念．

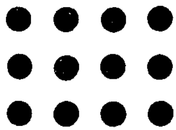

图 1　$3\cdot4=4\cdot3$

集和它的元素

一个集是由这样一些东西组成的，如动物，植物，房屋，数，点等等．

$\boxed{\text{D 1}}$　这些单个的东西叫做集的**元素**．人们可以用语言来表达集（例如：一个家庭中孩子的集；自然数的集），也可以将集的元素写出来，并用大括弧括起来，例如｛保尔，艾尔瑟，乌特，汉斯｝；｛菲莉达姑母，穆施猫，猫婆子｝；$\{1, 2, 3, 4, 5\}$．为了简便起见，我们经常用字母来表示集．

例如 $A=$｛保尔，艾尔瑟，乌特，汉斯｝，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$C=\{10, 20, 30, 40, \cdots\cdots 90\}$．

我们用符号 N 专门来表示**自然数的集**．

$\{1, 2, 3, 4\}$ 读作“集 1, 2, 3, 4”．

$\boxed{\text{D 2}}$　如果一个集的元素是可数的，并能数尽，那么这个集叫做**有限集**（例如，上面提到的集 A，集 B，集 C）；否则叫做**无限集**（例如 N）．

$\boxed{\text{D 3}}$　为了表示元素 3 属于集 N，我们简单写作 $3\in N$，（读作：“3 属于 N”，或“3 是 N 的元素”）．按照同样的道理，我们可以写 $0\notin N$ （读作：“0 不属于 N”）．

D 4　集{3, 1, 4, 2}与集{1, 2, 3, 4}的元素是相同的．人们称它们是“同集”(或“等集”)，可以简写为{3, 1, 4, 2} = {1, 2, 3, 4}(读作：集{3, 1, 4, 2}等于集{1, 2, 3, 4})．

有时会出现这样的情况，人们问到一个集，而这个集却没有元素，例如 24 至 28 间的素数(质数)的集，或者 85 至 95 间的平方数的集．

D 5　没有元素的集称为**空集**，用符号{　}表示(读作："空集")．

注：{　}表示没有元素的集，而{0}表示的集有一个唯一的元素，即数 0，所以{　}和{0}不是一回事．

集的图象．为了形象地表示集，人们经常画集的图象．在图象里经常用点或小圈表示元素，并把它们放在一条封闭线内(这条封闭线象一条带子)(见图 2 和图 3)．这些小圈也可以不必画出．

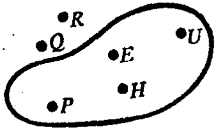

图 2　$A=\{P, E, U, H\}$
$Q\notin A$, $R\notin A$

图　3

集的简单练习：

1．列举你的各门课程的集．

2．指出下列各集是有限的还是无限的：

a) 偶数的集，*b*) 一条直线上的点的集，*c*) 1964 年 12 月 31 日 12 时活着的人的集．

3. 用语言说明下面是些什么集.[注1] 哪些是有限的？

$a)$ $A=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$ $b)$ $B=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$

$c)$ $C=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ $d)$ $D=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$e)$ $E=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots\}$

$f)$ $F=\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$

4. 照第 3 题的样子写出下列各集：

$a)$ 自然数中的奇数，$b)$ 7 的倍数(限于两位数)，$c)$60 的约数，$d)$ 阿拉伯数字，$e)$ 10 的幂．哪些是有限集，哪些是无限集？

5. $a)$ 假设M是平方数的集，那么 $4\in M$，$8\notin M$．说明 9，50，64，10，1，96，225 是否属于集 M.

$b)$ 24，32，38，46，52，64 这些数中哪些属于集$\{6, 10, 14, 18, \cdots\}$？

6. 为什么我们认为水(或蜂蜜)的集不是它本来意义的集？

7. 对于 D5 中所说的空集，你能举出一些例子吗？

▶8. 为什么人们说只有一个空集，而没有各种各样的空集？

子集

① 列出你所在学校全体学生的一些重要“子集”.

② 比较一下：$a)$ $\{2, 4, 6\}$和$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；$b)$ $\{1, 3,$

注 1. 在列数一个集的元素的时候，省略号“…”表示后面的元素照前面的元素的规律排列下去，由此可以看出这是个什么样的集.

5, 7…}和 N.

D 6　倘若集 A 所有的元素都是集 B 的元素，那么集 A 叫做集 B 的一个**子集**，写做 $A\subset B$(读做：“A 是 B 的子集”).

如果 A 和 B 的元素是相同的，那就出现一种特殊的情况：$A=B$. 这样一来，每个集也是它本身的一个子集.

注意符号 $\subset$ 和 $\in$ 的不同含意.

注：空集也被视为每个集的子集(参考第 9 题).

例： *a*) $\{1,2,3\}$ 的子集是 $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,1\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{\quad\}$;

b) $\{1,2,3,\cdots,10\}\subset N$; *c*) $\{5,10,15,20,\cdots\}\subset N$;

d) $\{4,8,12,\cdots\}\subset\{2,4,6,\cdots\}$.

子集的图示

如果我们将集 A 和集 B 象图 3 一样画出，其中 $A\subset B$，那么我们就会得到图 4.

图 4　$A\subset B$

关于子集的练习题：

9. 列出 *a*) $\{5,6\}$　*b*) $\{5,6,7\}$　*c*) $\{5,6,7,8\}$ 的全部子集. 指出，在 *a*) 中可以得到 $4=2^2$ 个子集，*b*) 中有 $8=2^3$ 个，*c*) 中有 $16=2^4$ 个.

10. 写出 $\{1,2,3,4,5\}$ 的所有带有元素 3(或元素 4)的子集.

11. 列出 *a*) N, *b*) $\{5,10,15,20,\cdots\}$ 的三个无限真子集.

▶**12.** 下面的语句哪些是正确的：

$a)$ $\{3\}\subset\{3, 4\}$, $b)$ $3\in\{3, 4\}$, $c)$ $3\subset\{3\}$?

注意：集$\{3\}$只有一个元素，那就是数 3，所以写做 $3\in\{3\}$，而不写为 $3=\{3\}$，也不写为 $3\subset\{3\}$.

13. $a)$ 写出$\{1, 2, 3, 4, 5\}$的三个子集 A, B, C，使$A\subset B$，$B\subset C$.

$b)$ 试证（图 5）：如果 $A\subset B$ 和 $B\subset C$，那么 $A\subset C$.

14. 试证：如果 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，那么 $A=B$.

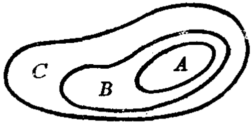

图 5　$A\subset B$，$B\subset C$

3. 交集与并集．差集

交集

一个班有 27 名学生，其中 9 名参加了合唱队，6 名参加了乐队，14 名既未参加合唱队，也未参加乐队．试问有多少学生 $a)$ 参加了合唱队同时也参加了乐队，$b)$ 只参加了合唱队，$c)$ 只参加了乐队，$d)$ 没有参加合唱队，$e)$ 没有参加乐队（图 6）？

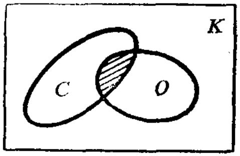

图 6　K 表示班　C表示合唱队
O 表示乐队

D 1　集 A 和集 B 的**交集**是那些属于 A，同时也属于 B（也可以说：既属于 A 也属于 B）的元素的集.

写做（图 7）：$A\cap B$（读做："A 与 B的交"）.

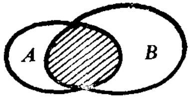

图 7　$A\cap B$

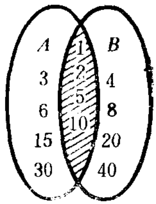

图 8　$A\cap B=\{1, 2, 5, 10\}$

例(图 8):

a) 30 的约数的集是　$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

40 的约数的集是　$B=\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

30 和 40 的公约数的集是　$A\cap B=\{1, 2, 5, 10\}$.

b) 30 的倍数的集是　$C=\{30, 60, 90, 120, \cdots\}$

40 的倍数的集是　$D=\{40, 80, 120, 160, \cdots\}$

30 和 40 的公倍数的集是 $C\cap D=\{120, 240, 360, \cdots\}$.

注意：在 *a*) 中 10 是 30 和 40 的最大公约数；在 *b*) 中 120 是 30 和 40 的最小公倍数.

特殊情况：*a*) 如果 $A\subset B$，那么 $A\cap B=A$(图 9)；如果 $B\subset A$, 那么 $A\cap B=B$. *b*) 如果 $A\cap B=\{\ \}$，那么 A 和 B 便没有共同的元素，这两个集是**异元**的(图 10). 因为我们把空集也作为集，所以 $A\cap B$ 在任何情况下都表示一个集.

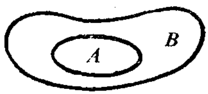

图 9　$A\cap B=A$

图 10　$A\cap B=\{\ \}$

关于交集的练习题：

1. 假设 $A=\{3, 6, 12, 24, 48\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, \cdots, 60\}$, P 是素数的集，请确定：*a*) $A\cap B$, *b*) $A\cap P$, *c*) $A\cap N$,