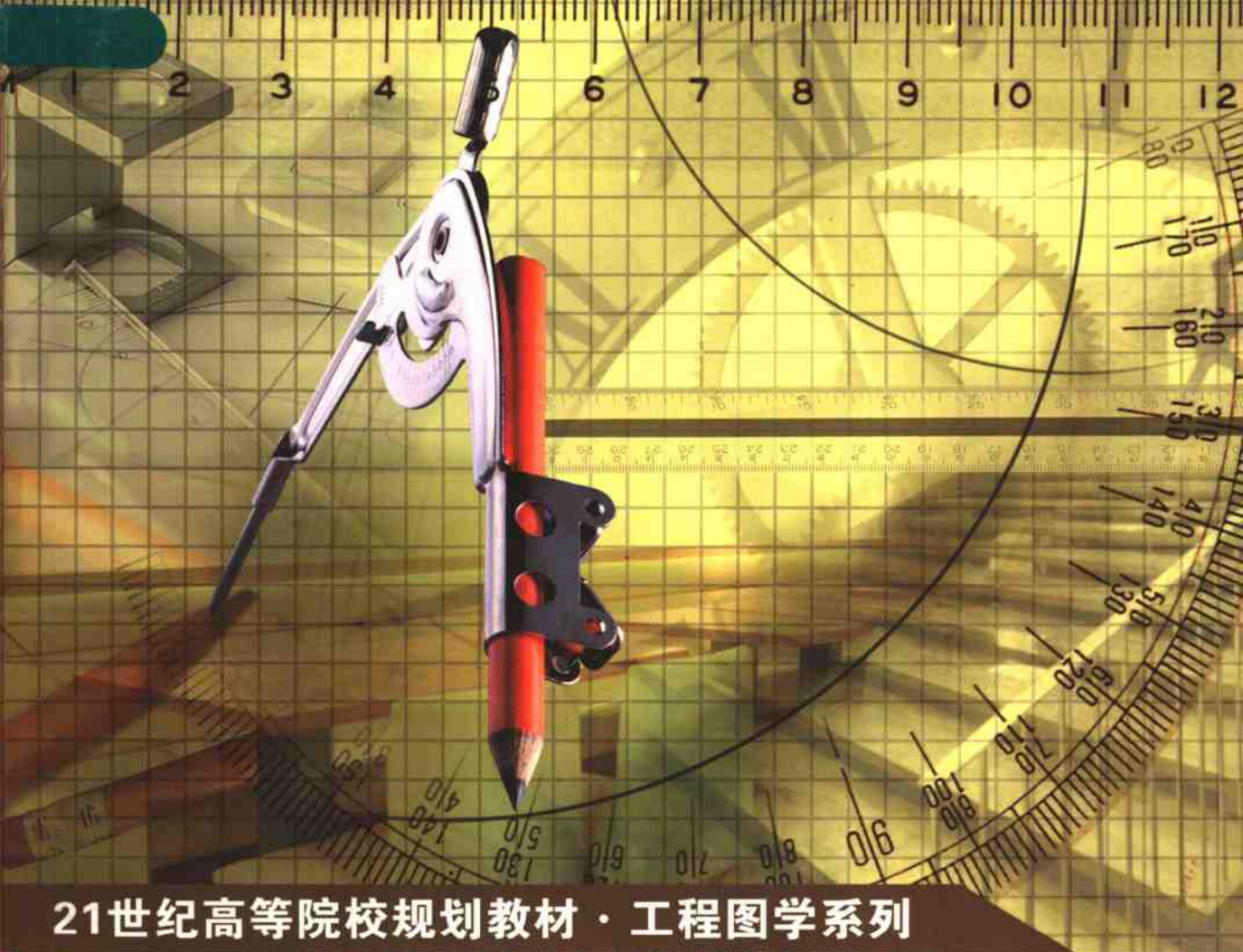




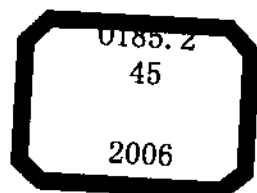
21世纪高等院校规划教材·工程图学系列

# 画法几何学

主 编: 程久平 副主编: 刘 虹

中国科学技术大学出版社

21 世纪高等院校规划教材·工程图学系列



# 画法几何学

主 编 程久平

副主编 刘 虹

中国科学技术大学出版社

2006·合肥

## 内 容 简 介

本书是“工程图学系列教材”之《画法几何学》，也是“工程图学”的基础。该书适用于高等学校机械类、近机类和土木类各专业的画法几何课程的教材，也可以作为工程技术人员，图学爱好者的自学参考书。

全书共 11 章，包括：绪论，点、直线、平面的投影及相互关系，投影变换，曲线和曲面，立体，平面与立体相交，立体与立体的相交，展开图等。

### 图书在版编目（CIP）数据

画法几何学/程久平主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2006.9  
（工程图学系列教材）  
ISBN 7-312-02009-7

I. 画… II. 程… III. 画法几何-高等学校-教材 IV. O185.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 091234 号

中国科学技术大学出版社出版发行  
（安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026）  
中国科学技术大学印刷厂印刷  
全国新华书店经销

开本：787×1092/16 印张：11.25 字数：270 千  
2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷  
印数：1—4000 册  
ISBN 7-312-02009-7/O · 341 定价：18.00 元

# 前 言

根据《高等工业学校画法几何及制图课程教学基本要求》的精神,吸收多所院校“工程图学”教材的精华,总结我们多年来“工程图学”课程的教学经验,为便于“工程图学”系列课程的教学,合肥工业大学工程图学教研室组织编写了“工程图学系列教材”,主要包括:《画法几何学》及《机械制图》(机械类)、《工程制图》(非机械类)、《工程制图基础》(电子及应用理科类)、《工程图学解题指导》(各类)、《计算机绘图》(各类)、《画法几何与阴影透视》及《画法几何与阴影透视习题集》(建筑学类等)、《土木工程制图》及《土木工程制图习题集》(土建类等)等。

本书是“工程图学系列教材”之《画法几何学》,与《机械制图》、《工程图学解题指导》和《计算机绘图》配套,该书适用于高等学校机械类、近机类和土木类各专业的画法几何课程的教材,也可以作为读者的自学教材使用。

本书在编写时,根据编者的多年教学经验和实践,注意突出重点、语言精练、所选例题具有代表性,既方便教学,也便于读者自学。

本书内容安排合理,贯彻“少而精”,又考虑到其理论的完整性,有些内容可根据专业的不同而进行取舍。全书共有十一章,包括:绪论,点、直线、平面的投影及相互关系,投影变换,曲线和曲面,立体,平面与立体相交,立体与立体的相交,展开图等。

本书由程久平主编,刘虹副主编,参加编写的有:程久平(第1章、第2章),王静(第3章),刘虹(第4章、第5章、第6章),何秀娟(第7章、第8章、第9章、第10章、第11章)。

本书由李学京老师任主审。在编写及出版过程中,合肥工业大学工程图学教研室、合肥工业大学教材科和中国科学技术大学出版社给予了大力支持,在此谨致谢忱。

限于我们水平有限,书中难免有缺点甚至错误,恳请读者批评指正。

编 者

2006.5

## 目 录

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 前 言                   | (I)   |
| 第一章 绪论                | (1)   |
| 1.1 画法几何学的任务          | (1)   |
| 1.2 投影法               | (2)   |
| 第二章 点                 | (6)   |
| 2.1 点在两投影面体系中的投影      | (6)   |
| 2.2 点在三投影面体系中的投影      | (8)   |
| 2.3 两点的相对位置和重影点       | (11)  |
| 第三章 直线                | (15)  |
| 3.1 直线在单个投影面中的投影      | (15)  |
| 3.2 直线在三面投影体系中的投影     | (15)  |
| 3.3 一般位置直线的实长及对投影面的倾角 | (21)  |
| 3.4 属于直线的点            | (23)  |
| 3.5 两直线的相对位置          | (27)  |
| 3.6 直角投影定理            | (31)  |
| 第四章 平面                | (37)  |
| 4.1 平面的表示法            | (37)  |
| 4.2 各种位置平面            | (39)  |
| 4.3 属于平面的点和直线         | (43)  |
| 第五章 几何元素间的相对位置关系      | (50)  |
| 5.1 几何元素间的平行问题        | (50)  |
| 5.2 几何元素间的相交问题        | (53)  |
| 5.3 几何元素间的垂直问题        | (57)  |
| 5.4 综合问题解题方法          | (60)  |
| 第六章 投影变换              | (66)  |
| 6.1 概述                | (66)  |
| 6.2 换面法               | (67)  |
| 6.3 旋转法               | (80)  |
| 6.4 斜投影法              | (90)  |
| 第七章 曲线和曲面             | (96)  |
| 7.1 曲线                | (96)  |
| 7.2 圆的投影              | (98)  |
| 7.3 曲面的概述             | (101) |

|             |                |              |
|-------------|----------------|--------------|
| 7.4         | 直线面            | (102)        |
| 7.5         | 曲线面            | (107)        |
| 7.6         | 螺旋线和螺旋面        | (110)        |
| 7.7         | 曲面的切平面         | (117)        |
| <b>第八章</b>  | <b>立体</b>      | <b>(120)</b> |
| 8.1         | 平面立体           | (120)        |
| 8.2         | 回转体            | (123)        |
| <b>第九章</b>  | <b>平面与立体相交</b> | <b>(131)</b> |
| 9.1         | 平面与平面立体相交      | (131)        |
| 9.2         | 平面与曲面立体相交      | (134)        |
| 9.3         | 平面与组合体相交       | (141)        |
| <b>第十章</b>  | <b>立体与立体相交</b> | <b>(144)</b> |
| 10.1        | 概述             | (144)        |
| 10.2        | 直线与曲面立体相交      | (144)        |
| 10.3        | 两平面立体相交        | (146)        |
| 10.4        | 平面立体与曲面立体相交    | (147)        |
| 10.5        | 曲面立体与曲面立体相贯    | (149)        |
| 10.6        | 复合相贯线          | (160)        |
| <b>第十一章</b> | <b>立体表面展开</b>  | <b>(164)</b> |
| 11.1        | 平面立体表面的展开      | (164)        |
| 11.2        | 可展曲面的展开        | (167)        |
| 11.3        | 变形接头的表面展开      | (170)        |
| 11.4        | 不可展曲面的近似展开     | (172)        |

# 第一章 绪 论

## 1.1 画法几何学的任务

### 1.1.1 本课程的性质和任务

工程图样是表达和交流技术思想的重要工具。在现代工业中,设计和制造机床、车辆、船舶、采矿与冶金设备、化工设备、各种仪表或电子仪器等,都必须先画出图样,然后根据图纸加工,才能得到预想的结果。在使用这些机器、设备和仪表时,也常常要通过阅读图样来了解它们的结构和性能。所以我们说:“工程图样是工程界的技术语言”。每一个工程技术人员,如果不能熟练掌握它,是无法胜任工程设计和科研工作的。作为一个工科高等学校的学生,掌握绘制工程图样的基本理论和方法,是今后从事设计、制造和加工以及科学研究工作的基本技能之一。

画法几何学是研究如何在平面上图示空间物体和图解空间几何问题的一门学科,它为绘制工程图样提供了基本原理和基本方法。并且为正确地图解空间几何问题提供了理论基础、为用平面图样完整地表达出空间物体,提供了理论依据。

学习画法几何学的任务和目的主要有以下几点:

- (1) 学习平行投影的基本理论,特别是正投影法的原理和应用;
- (2) 学习用平面图形表达空间几何形体的图示法;
- (3) 熟练掌握空间几何元素的定位问题和度量问题的图解法;
- (4) 培养空间逻辑思维和空间想象能力;
- (5) 培养耐心细致的工作作风和认真负责的工作态度。

### 1.1.2 本课程的学习方法

画法几何学的理论具有完整性和系统性,它的课程学习有一个鲜明的特点:用作图来培养空间逻辑思维和想象能力。即在学习的过程中,始终必须将平面上的投影与想象的空间几何元素结合起来。这种平面投影分析与空间形体想象的结合,是二维思维与三维思维间的转换。而这种转换能力的培养,只能逐步做到。

在学习中,应遵循下述学习方法:

(1) 认真听课,及时复习,正确理解基本原理,掌握基本方法,注意领会例题所示的分析方法和作图过程。注意物体与图样之间的关系,逐步提高自己的空间思维能力和空间分析能力。

(2) 绘图技能的培养和空间思维能力的提高,都需要通过一定数量的练习来实现,因此要严肃认真地对待每一道习题和每一次绘图训练。作业不仅要求正确,而且要求整洁、清晰。

(3) 由于图样在生产实践中起着很重要的作用,绘图和读图的任何差错,都会给生产造成损失,因此在绘图和读图时要细致和耐心,做到一丝不苟,仔细认真。

## 1.2 投 影 法

### 1.2.1 投影法的基本知识

在日常生活中,灯光和阳光照射物体时,会在地面、墙面上产生影子。人们把这种投影现象加以抽象,总结出投影理论后,用以解决物和图的转换问题。

#### 1. 中心投影

图 1-1 所示,设空间有电灯、三角形  $ABC$  和一平面  $P$ 。灯光照射到被投影物(三角板)  $ABC$  在  $P$  面上留下影子  $abc$ 。我们称  $S$  为投射中心、 $P$  为投影面、 $ABC$  为被投影的空间物体。光源、被投影物和投影平面是进行投影时不可缺少的条件,通常称为投影三要素。上述现象可抽象为经  $S$  和  $A$ 、 $B$ 、 $C$  各作一条直线  $SA$ 、 $SB$ 、 $SC$  ( $SA$ 、 $SB$ 、 $SC$  称为投射线),与  $P$  平面分别交于  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三点。 $a$ 、 $b$ 、 $c$  三点就是空间  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点在  $P$  平面上的投影。这种投射线都通过投影中心  $S$  点投影,称为中心投影。同时规定,空间点用大写字母表示,投影点用同名称的小写字母表示。

#### 2. 平行投影

将中心投影中的中心  $S$  移向无穷远,则投射线相互平行。这种投射线相互平行的投影,称为平行投影。平行投影又分为斜投影和正投影,前者投射线与投影面倾斜(图 1-2),后者投射线与投影面垂直(图 1-3)。

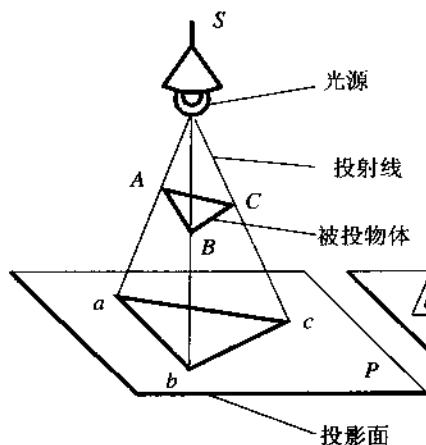


图 1-1 中心投影

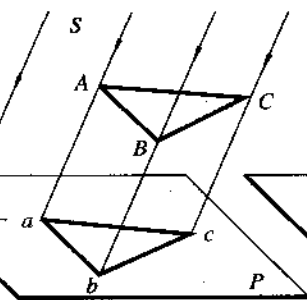


图 1-2 斜投影

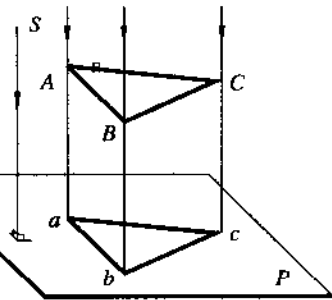


图 1-3 正投影

投射线相互平行、且都垂直于投影面的投影称为正投影,它被广泛地用作为工程上“物—图”转换的工具。

### 1.2.2 空间几何原形与其投影间的对应问题

1. 画法几何及其投影法主要研究空间几何原形与其投影之间的对应关系,即研究他们之间内在联系的规律性。其研究途径无非是讨论投影图上仍保持了哪些空间几何关系不变,而哪些几何关系有了变化和形成怎样的变化。尤其是要掌握住那些不变的关系,作为画图和看图的基本依据。

例如,平行投影有这样的规律:



- (1) 平行两直线的投影仍相互平行: 如图 1-4,  $AB \parallel CD$ , 则  $ab \parallel cd$ 。
- (2) 属于直线上的点, 其投影仍属于直线的投影: 如图 1-5 中的  $G$  点。
- (3) 点分线段之比, 投影后保持不变: 如图 1-5,  $EG:GF=eg:gf$ 。
- 上述规律, 均可用初等几何的知识得到证明。

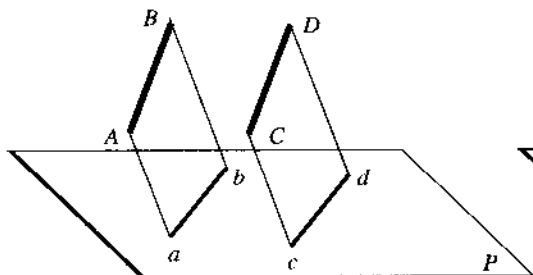
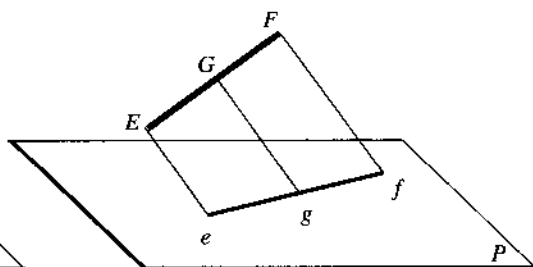


图 1-4 平行两直线

图 1-5  $G \in EF$ ,  $g \in ef$ ;  $EG:GF=eg:gf$ 

2. 工程上用的投影图, 必须能确切地惟一的反映出空间的几何关系。前面只说明了有可能用一些投影规律来确定投影图。反过来, 能否根据投影图惟一确定空间几何关系呢?

事实上, 只凭一个投影, 不能反映惟一空间情况。例如, 图 1-6, 投影图上有相互平行的两直线  $ab \parallel cd$ , 但对应到空间可能是相互平行两直线, 如图 1-4; 也可能是不平行的两直线  $AB$  和  $CD$ , 如图 1-6。又如图 1-7, 投影图上点  $h$  属于线段  $ef$ , 即  $h \in ef$ 。但对应到空间的点  $H$ , 可能是属于线段  $EF$ , 也可能不属于线段  $EF$ , 即可能  $H \in EF$ , 也可能  $H \notin EF$ 。再如图 1-8, 投影面上的图像所表示的可能是几何体 I, 可能是几何体 II, 还可能是其他形状的几何体。

这是因为一个空间点有惟一确定的投影, 每一条确定的投射线与投影面只能交于一点。如图 1-1A 点, 但点的一个投影不能确定该点的空间位置, 如图 1-9, 当投射方向确定时, 投影  $a$  可以对应投射线上的任意点  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $\dots$ , 也就是空间的点是不确定的。

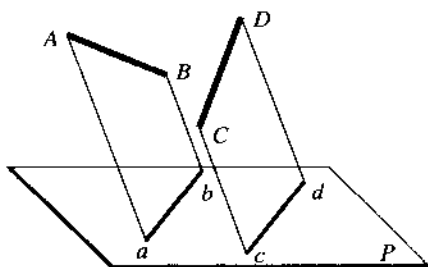


图 1-6 空间两直线不平行

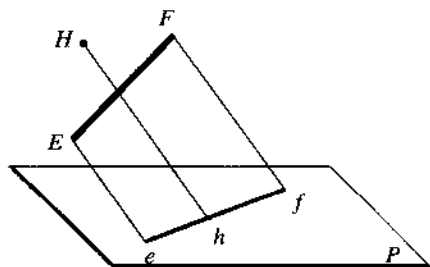
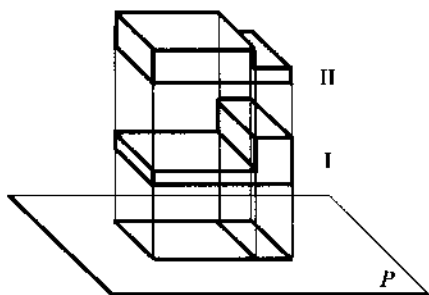
图 1-7  $H \notin EF$ 

图 1-8 一个投影不能确定空间几何体

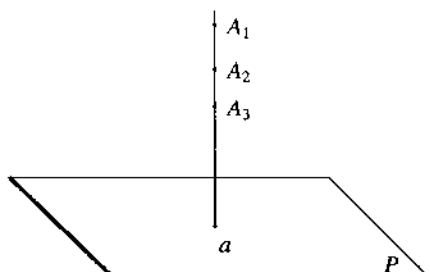


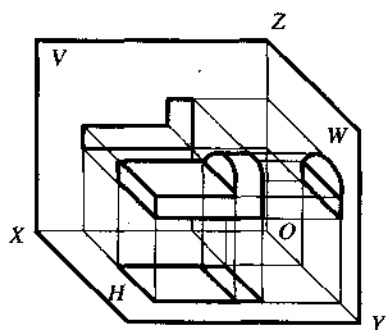
图 1-9 点的空间位置不能确定

既然要求投影图能确切、惟一的反映空间的几何关系,就需再引入一些条件和规定来满足这个问题。因而在工程上根据不同情况分别作了一些专门规定,相应地形成了若干投影方法,如正投影法、轴测投影法、标高投影法和透视投影法等等。机械制造业用得最广泛的是正投影法,也常采用轴测投影法。

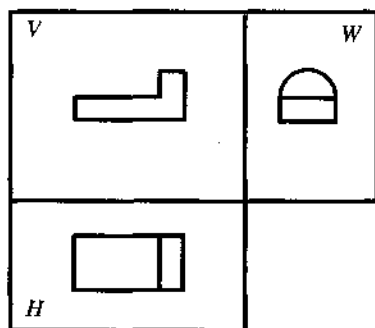
### 1.2.3 常用工程图

#### 1. 多面正投影图

图 1-10 (a) 表示工程上常见的用正投影法作出三视图的原理,它是典型的多面视图的例子。由于三视图(图 1-10 (b))真实地表达了零件的内外部结构和形状,配以尺寸标注和其他技术要求后,完全满足了机械加工的要求。

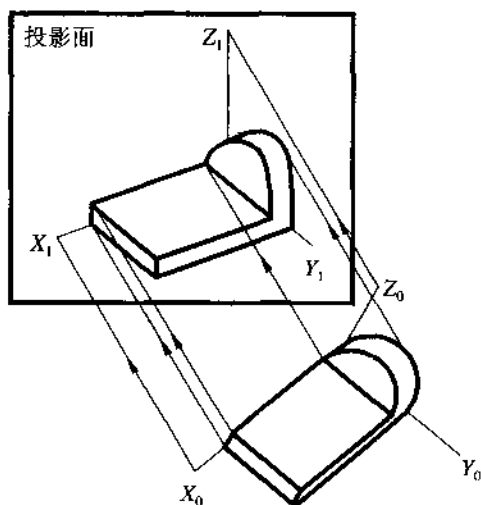


(a) 几何体的正投影

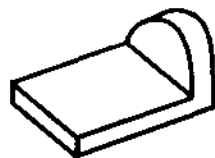


(b) 几何体的正投影图

图 1-10



(a) 几何体的轴测投影



(b) 几何体的轴测投影图

图 1-11

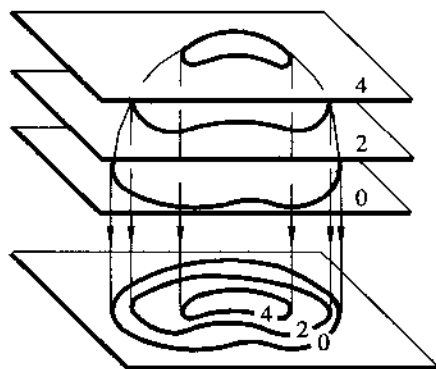
#### 2. 轴测图

轴测投影法,是用平行投影法对几何形体的直角坐标(直角坐标与投影面位置有一定要求)投影到一个投影面上,所得到的投影图,称为轴测图。图 1-11 表示机械工程上常用的轴测图。

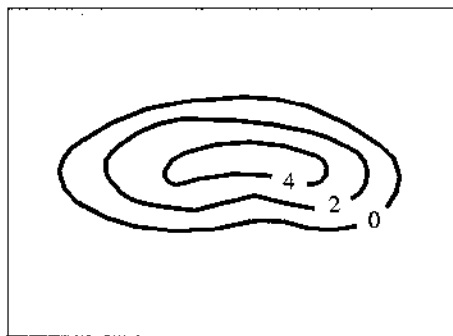
它的优点是直观性较好,但度量性差,作图较繁。因此,在工程上常用作插图,以弥补多面正投影图直观性差的缺点。

### 3. 标高投影图

用正投影将物体投影在一个水平面上并标出等高线的图,称为标高投影图。这种图常用在地图和土建工程中,用以表示地形和土工结构(图 1-12)



(a) 曲面的标高投影



(b) 曲面的标高投影图

图 1-12

### 4. 透视图

透视图是根据中心投影法绘制的,它和人的眼睛实际看到的形象一样,所以图立体感较强。但由于不能真实地度量出物体的大小且作图繁琐,目前多在建筑工程上使用(图 1-13)。

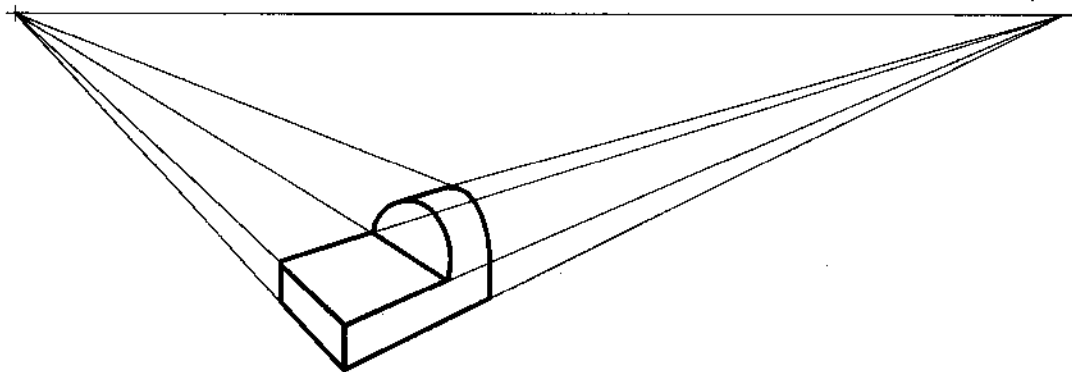


图 1-13 几何体的透视投影图

### 思 考 题

1. 学习画法几何的任务和目的是什么?
2. 工程图样中,采用哪些投影法?分别用在何种图样中?其主要优点是什么?
3. 为什么点的一个投影不能确定其空间位置?如何解决?
4. 正投影特性有哪些?各种投影是否都有这些特性?

## 第二章 点

点是最基本的几何元素,一切几何形体都可看做是点的集合。点的投影规律是线、面、体的投影基础。故先研究点的投影性质及其投影规律。

### 2.1 点在两投影面体系中的投影

由于点的一个投影不能确定该点的空间位置,故需建立两投影面体系。

#### 2.1.1 两投影面体系的建立

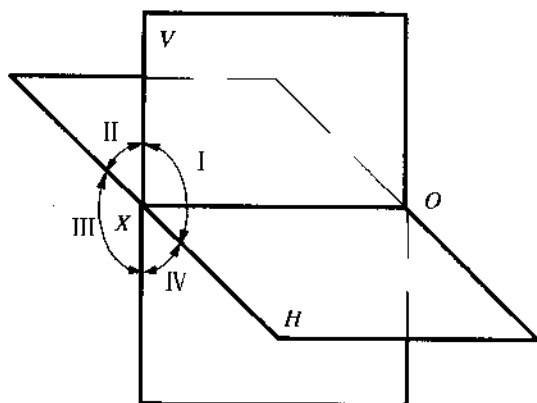


图 2-1 两投影面体系

两投影面体系,是由相互垂直的两个面组成。水平放置的称为水平投影面(一般用 $H$ 表示)、垂直放置的称为正立投影面(一般用 $V$ 表示)。两投影面的交线 $OX$ 称为投影轴(简称 $OX$ 轴)。投影轴 $OX$ 将 $V$ 面分为上下两部分,将 $H$ 面分为前后两部分,如图 2-1 所示。

两投影面体系将空间分为四个区域:分别称为第 I 分角( $V$ 面前方, $H$ 面上方);第 II 分角( $V$ 面后方, $H$ 面上方);第 III 分角( $V$ 面后方, $H$ 面下方);第 IV 分角( $V$ 面前方, $H$ 面下方)。下面着重讨论第 I 分角中点的投影。

#### 2.1.2 点在两投影面体系第 I 分角(简称 $V/H$ 体系)的投影

图 2-2 所示,设空间有一点 $A$ (以后凡是空间中的点,我们规定一律用大写字母表示),从 $A$ 点分别向 $H$ 面和 $V$ 面作垂线,垂线与 $H$ 面的交点我们称为水平投影 $a$ (以后凡是在 $H$ 面上的投影,我们规定一律用小写字母表示);垂线与 $V$ 面的交点我们称为正面投影 $a'$ (以后凡是在 $V$ 面上的投影,我们规定一律用小写字母加一撇表示)。这样由投影 $a$ 和 $a'$ 完全可以确定 $A$ 点在空间的原来位置。只要从 $a$ 和 $a'$ 分别作 $H$ 和 $V$ 面的垂线,它们的交点便是 $A$ 点在 $V/H$ 体系中的空间位置。

为了使得两个投影 $a$ 和 $a'$ 画在一个平面上,画法几何学上规定:保持 $V$ 面不动,将 $H$ 面绕 $OX$ 轴,按图 2-2 中所示箭头的方向旋转 $90^\circ$ ,使 $H$ 面与 $V$ 面重合成一个平面,这样我们就得到了点的两个投影图(图 2-3 (a))。由于投影面可以认为是无限大的,为了作图的方便,故在投影图上不画出投影面的边框线,这样便得到图 2-3 (b)所示的点的两面投影图。投影图上的细实线 $a'a$ 称为投影连线,投影连线与投影轴的交点称为 $a_x$ 。

### 2.1.3 点的两面投影规律

1. 点的正面投影与水平投影的连线垂直于  $OX$  轴:  $a'a \perp OX$ 。

图 2-2 所示, 因投射射线  $Aa$  和  $Aa'$  组成的平面  $Aaa_Xa'$  垂直于  $H$  面和  $V$  面, 也垂直于  $H$  面和  $V$  面的交线  $OX$  轴, 故平面  $Aaa_Xa'$  上的直线  $aa_X$  和  $a'a_X$  垂直于  $OX$  轴, 即  $aa_X \perp OX$  和  $a'a_X \perp OX$ 。当  $a$  随着  $H$  面旋转与  $V$  面重合时,  $aa_X \perp OX$  的关系不变。因此在投影图上  $a$ 、 $a_X$ 、 $a'$  三点共线, 即  $a'a \perp OX$  (图 2-3)。

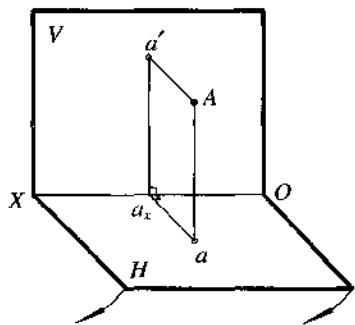
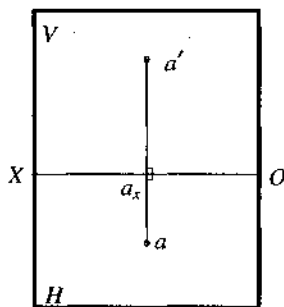
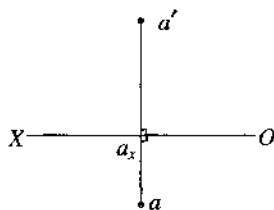


图 2-2 点的两面投影直观图



(a)



(b)

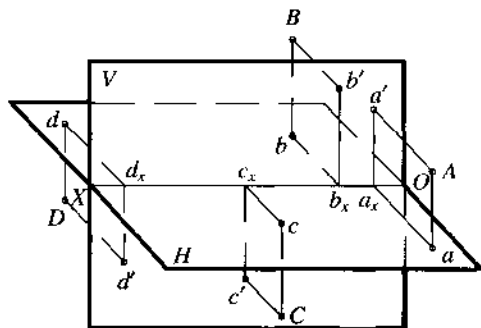
图 2-3 点的两面投影图

2. 点的正面投影到  $OX$  轴的距离等于空间点  $A$  到  $H$  投影面的距离, 点的水平投影到  $OX$  轴的距离等于空间点  $A$  到  $V$  投影面的距离:  $a'a_X = Aa$ ;  $aa_X = Aa'$ 。

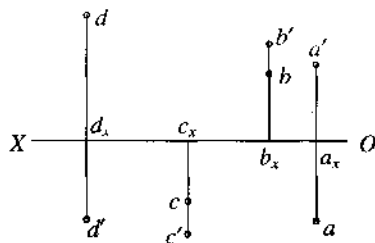
由于  $Aa'a_Xa$  是一个矩形, 故我们可以得到:  $a'a_X = Aa$ , 即点的正面投影到  $OX$  轴的距离等于点到  $H$  投影面的距离;  $aa_X = Aa'$ , 即点的水平投影到  $OX$  轴的距离等于点到  $V$  投影面的距离。

### 2.1.4 点在其他分角内的投影

位于两面投影体系中第 II、III、IV 分角内的点向  $V$ 、 $H$  面投影的作图过程与第 I 分角内的情况一样, 只是点的正面投影可能在  $V$  面的上半部分或下一半; 点的水平投影可能在  $H$  面的前半部分或后半 (以  $OX$  轴为分界), 如图 2-4 (a)。



(a)



(b)

图 2-4 各分角内点的投影

当  $H$  面绕  $OX$  轴向下旋转  $90^\circ$  时其前半部分与  $V$  面的下半部分重合, 后半部分与  $V$  面的上半部分重合, 故位于 III、IV 分角内的点其正面投影在  $OX$  轴的下方, 位于 I、II 分角内的点

其正面投影在  $OX$  轴的上方, 如投影图 2-4 (b)。

对照图 2-4, 点在各分角内两面投影的位置见表 2-1。

表 2-1 点在各分角内两面投影的位置

| 分角     | I        | II       | III      | IV       |
|--------|----------|----------|----------|----------|
| 点的正面投影 | $OX$ 的上方 | $OX$ 的上方 | $OX$ 的下方 | $OX$ 的下方 |
| 点的水平投影 | $OX$ 的下方 | $OX$ 的上方 | $OX$ 的上方 | $OX$ 的下方 |

简称 I、III 分角内点的两个投影在两侧, II、IV 分角内点的两个投影靠一边。

应当注意的是, 不管点在哪个分角内, 它的投影规律是一样。

## 2.2 点在三投影面体系中的投影

### 2.2.1 三投影面体系的建立

三投影面体系, 就是在二投影面体系的基础上, 增加一个与  $H$ 、 $V$  面均相互垂直的投影面  $W$ , 我们称为侧立投影面 (一般用  $W$  表示)。 $H$  面与  $W$  面的交线称为  $OY$  投影轴,  $V$  面与  $W$  面的交线称为  $OZ$  投影轴 (图 2-5 (a))。三面投影体系将空间分为八个分角 (也称卦角), 分别称为第 I 到第 VIII 分角。下面只讨论点在第 I 分角 (国家标准规定我国使用第一分角投影) 的投影情况。

第 I 分角如图 2-5 (b) 所示。

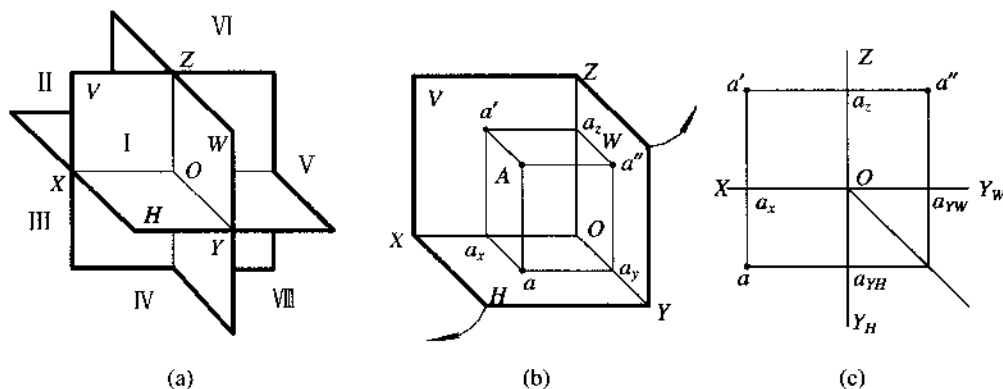


图 2-5 三面投影体系及其点的投影

(a) 八个卦角 (b) 第 I 分角 (c) 点的投影

### 2.2.2 点在三投影面体系中的投影

设空间有一点  $A$ , 从  $A$  点分别向  $H$  面、 $V$  面和  $W$  面作垂线, 得到的交点  $a$ 、 $a'$ 、 $a''$  分别称为  $A$  点的水平投影、正面投影和侧面投影 (图 2-5 (b)), 水平投影和正面投影的表示方法与两投影面体系相同, 侧面投影规定用小写字母加两撇表示, 如  $a''$ 。如果要确定  $A$  点在空间的原来位置, 只要从  $a$ 、 $a'$  和  $a''$  分别作  $H$ 、 $V$  和  $W$  面的垂线, 三条垂线的交点便是  $A$  点在所给三面投影体系中的空间位置 (图 2-5 (b))。

为使三个投影  $a$ 、 $a'$  和  $a''$  画在一个平面上, 画法几何学上规定:  $V$  面不动, 投影轴  $OY$  分成两支  $Y_H$ 、 $Y_W$ , 分别随  $H$ 、 $W$  面按图 2-5 (b) 中箭头所示的方向绕  $OX$  和  $OZ$  轴旋转  $90^\circ$ 。这

样,  $H$ 、 $V$  和  $W$  三面便重合成一个平面 (图 2-5 (c))。去掉投影面的边框线就得到空间点  $A$  在三面投影体系中的投影 ( $a$ 、 $a'$ 、 $a''$ )。投影图上的细实线  $a'a''$  与投影轴的交点称为  $a_z$  ( $a_y$  因展开而分成两个  $a_{yH}$ 、 $a_{yW}$ )。

### 2.2.3 点在三面投影体系中的投影规律

根据三个投影面的展开方式, 点在两面投影体系中的投影规律同样适用于三面投影体系。从图 2-5 分析可知, 点在三面投影体系中的投影规律为:

1. 点的正面投影与水平投影连线垂直  $OX$  轴。 $aa' \perp OX$ 。
2. 点的正面投影与侧面投影连线垂直  $OZ$  轴。 $a'a'' \perp OZ$ 。
3. 点的水平投影到  $OX$  轴距离等于点的侧面投影到  $OZ$  轴之距离 (即空间点到  $V$  面之距离)。 $aa_x = a''a_z$ 。

利用点在三面投影体系中的投影规律, 根据点的两面投影, 能求出点的第三面投影 (简称为二求三)。

**例 2-1** 已知点的正面投影  $a'$  和水平投影  $a$  (图 2-6 (a)), 试求点的侧面投影  $a''$ 。

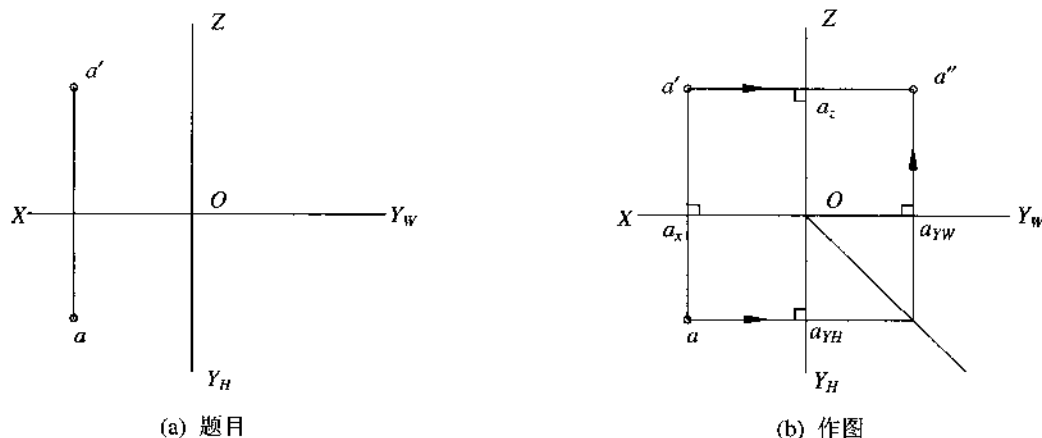


图 2-6 点的二求三

**【解】** 步骤如下 (图 2-6 (b))

(1) 作直线  $a'a'' \perp OZ$

(2) 作  $45^\circ$  直线平分  $\angle Y_W OY_H$ 。

(3) 过  $a$  作直线垂直于  $OY_H$  并与  $45^\circ$  直线交于一点, 过此点作垂直于  $OY_W$  轴的直线, 并与  $a'a_z$  的延长线交于  $a''$  ( $aa_x = a''a_z$ )。  $a''$  即为所求。

### 2.2.4 点的三面投影和直角坐标

若将三面投影体系当作直角坐标系 (笛卡儿坐标系), 则投影面为坐标面, 投影轴为坐标轴, 原点  $O$  为坐标原点, 其将每一坐标轴分成正负两部分, 正方向如图 2-7 (a) 所示。因此, 空间一点  $A$  到三个投影面的距离便可分别用它的直角坐标  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  表示。在投影图上,  $A$  点的三个投影  $a$ 、 $a'$  和  $a''$  也完全可以用坐标确定, 即水平投影  $a$  可由  $X$ 、 $Y$  确定, 正面投影  $a'$  可由  $X$ 、 $Z$  确定, 侧面投影  $a''$  可由  $Y$ 、 $Z$  确定, 如图 2-7 (b) 所示,  $a(X, Y, 0)$ ,  $a'(X, 0, Z)$ ,  $a''(0, Y, Z)$ 。这样就建立了空间点  $A(X, Y, Z)$  和其三面投影  $A(a, a', a'')$  之间的关系。因此可以根据空间点的坐标, 求其三面投影。

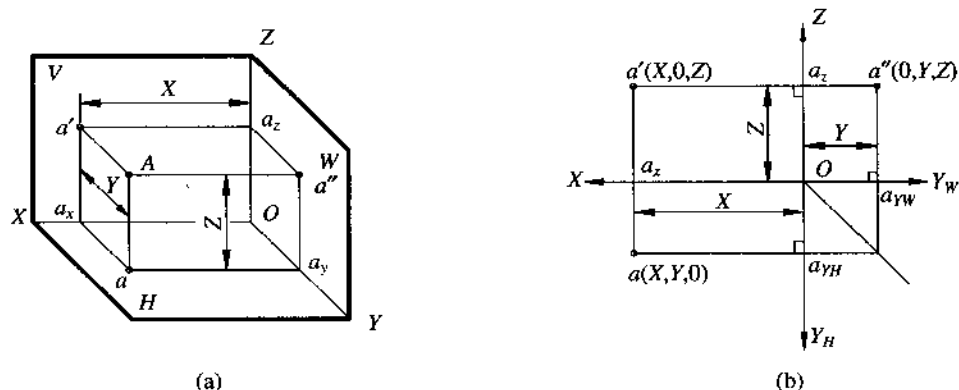


图 2-7 三面投影体系和直角坐标系

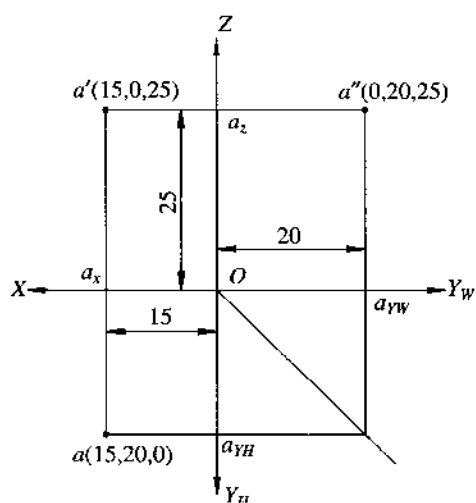
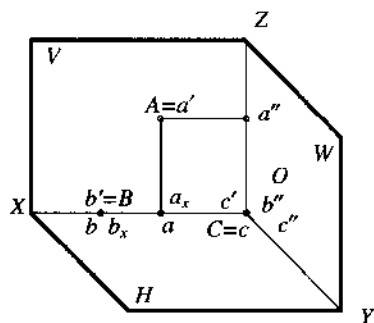
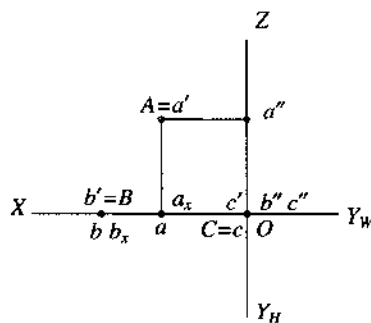


图 2-8 由点的坐标求点的三面投影

它们的投影特征。



(a) 直观图



(b) 投影图

图 2-9 特殊位置点的直观图和投影图

**例 2-2** 已知 A 点的直角坐标 (15、20、25)，单位：mm。(在本课程中，如果以后的数值没有给出具体单位，则一律按 mm 计算) 求点在三面投影体系中的投影。

**【解】** 步骤如下：

(1) 利用  $X=Oa_x$ 、 $Y=Oa_y$ 、 $Z=Oa_z$  的关系，分别在  $OX$ 、 $OY_H$ 、 $OZ$  轴上找到  $a_x$ 、 $a_{yH}$ 、 $a_z$  三点。

(2) 过  $a_x$ 、 $a_{yH}$ 、 $a_z$  点分别作各轴的垂直线，两两相交于  $a$ 、 $a'$ 、 $a''$  三点， $a$ 、 $a'$ 、 $a''$  即为点 A (15、20、25) 在三面投影体系中的投影 (图 2-8)。

### 2.2.5 特殊位置的点

空间中的点如果位于投影面、投影轴以及原点上，称为特殊位置点。对照图 2-9，不难看出



(1) 位于投影面上的点, 必有一坐标值为零, 在该投影面上的投影与本身重合, 另两个投影分别在对应的投影轴上。

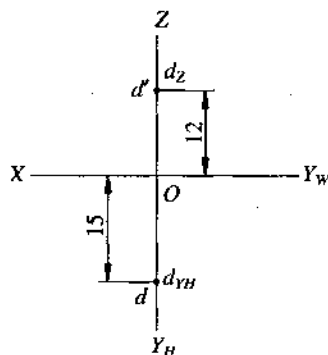
(2) 位于投影轴上的点, 必有两坐标值为零, 有两个投影与本身重合, 第三个投影落在原点上。

(3) 原点上的点, 三个投影均与本身重合。

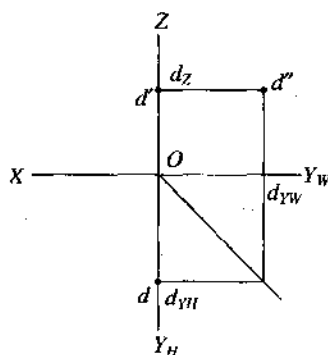
**例 2-3** 已知点  $D$  的坐标值  $(0, 15, 12)$ , 求其三面投影, 并判断点  $D$  的位置。

**【解】** 分析: 因  $X_D=0$ , 故点  $D$  在  $W$  面上。 $d''$  与  $D$  重合,  $d$  及  $d'$  分别落在  $OY_H$  及  $OZ$  轴上。

作图: (1) 作投影轴, 在  $Y_H$  上取  $Od_{YH}=15\text{mm}$ ; 在  $OZ$  轴上取  $Od_Z=12\text{mm}$ , 得水平投影  $d$  与  $d_{YH}$  重合, 正面投影  $d'$  与  $d_Z$  重合, 如图 2-10 (a)。



(a) 题目



(b) 图解

图 2-10 求特殊位置点

(2) 由  $d$  及  $d'$  二求三得  $d''$ , 如图 2-10 (b)。

故点  $D$  在  $W$  面上, 其三面投影为  $d, d', d''$ 。(为什么水平投影  $d$  取在  $Y_H$  轴上, 而不取在  $Y_W$  轴上, 请读者自己考虑)。

## 2.3 两点的相对位置和重影点

### 2.3.1 两点的相对位置

两点的相对位置指它们在上下、左右、前后之间的关系。

如图 2-11 所示, 对于观察者来说,  $A$  点在  $B$  点左方、下方、后方;  $B$  点在  $A$  点右方、上方、前方。它们的正面投影反映两点的左右及上下关系; 水平投影反映两点的前后及左右关系; 侧面投影反映两点的上下及前后关系。由此得出结论:

- (1) 两点间的左右关系由  $H$  面或  $V$  面投影来判断,  $X$  坐标值大的那点在左。
- (2) 两点间的前后关系由  $H$  面或  $W$  面投影来判断,  $Y$  坐标值大的那点在前。
- (3) 两点间的上下关系由  $V$  面或  $W$  面投影来判断,  $Z$  坐标值大的那点在上。