干部班教材

平面三角学

北京业余动力学院编

水利电力出版社

干部班教材

平面三角学

北京业余动力学院编

2792乙166

水利电力出版社出版（北京西郊科学路二里沟）

北京市书刊出版业营业许可証出字第105号

水利电力出版社印刷厂排印

新华书店科技发行所发行　　各地新华书店經售

＊

787×1092 1/32开本＊1 5/16印张＊36千字

1960年4月北京第1版

1960年4月北京第1次印刷(0001—15,400册)

統一书号：15143·1966　　定价(第8类)0.17元

編者的話

本书是継我院所編平面几何学的又一本老干部特别班教材，本书編写的原則和目的仍然是企图用比較少的时間，帮助老干部掌握一些平面三角的必要基础知識，为学习高等数学和其他科学技术打好基础。

在本书中，我們并沒有按照一般中学的方法去讲述它。无疑，从数学的观点看来，有些地方，其叙述和論証是不够严格的。例如关于負角的函数值，我們仅討論了第一、第四象限，而沒有討論第二、第三象限的情况；另外，三角函数的图形我們沒有讲。其原因是考虑到在学完本书之后，紧接着就要学习高等数学，在高等数学中讲解初等函数的图形时，再来讲它。

三角学公式比較多，而本书内容又比較精簡。因此，为了使学习本书的同志能灵活的运用公式去解决問題，仍建議每天讲課，抽出适当的时間当堂作題，这些題要比較淺易，然后再布置适当的課外作业，这部分应比堂上的习題稍为深一点。

毋容諱言，限于編者水平，本书缺点仍然很多。希望使用本书的同志提出批評和意見，以便改进。

1960年1月

目　录

引　言……………………………………………………………3
第一章　角的度量……………………………………………4
§1-1　角的度量……………………………………………4
§1-2　圆周的弧长…………………………………………5
第二章　锐角三角函数………………………………………6
§2-1　锐角三角函数………………………………………6
§2-2　锐角之三角函数值…………………………………9
§2-3　三角函数的基本关系………………………………13
§2-4　余角三角函数的关系………………………………16
§2-5　直角三角形解法……………………………………17
第三章　三角函数的推广……………………………………20
§3-1　角的推广……………………………………………20
§3-2　任意角三角函数的定义……………………………22
§3-3　任意角三角函数值的求法…………………………25
第四章　斜角三角形解法……………………………………32
§4-1　正弦定理和应用……………………………………32
§4-2　余弦定理和应用……………………………………34
第五章　三角分析……………………………………………38
§5-1　用单角三角函数表示复角三角函数………………38
§5-2　化积公式……………………………………………42
第六章　反三角函数和三角方程……………………………45
§6-1　反三角函数…………………………………………45
§6-2　三角方程……………………………………………46

引　言

三角学是数学的一个部分。它在解决理論問題和实际問題上都有广泛的应用；也是以后我們学习高等数学的一个基础。

三角学也和其他科学一样，是由于人类生产的需要而产生，并在人类的实踐中而发展起来的。它的最初阶段和天文学有着密切的关系。整个三角学内容在十八世紀初就已奠定了基础，但把三角函数看作綫段之比的新观点的建立，却已是十八世紀后半叶的事情。

我国古代天文学很发达，所以我国在很早就已經有了三角学方面的研究。在我国历史上的算經“周髀算經”“海島算經”等书里就載有用三角測地和測天的方法等。其中有一部分至今民間仍应用着。在以后的例题和习题中，我們也将学到如何用三角去解决具体問题的一些初步方法。

第一章 角的度量

§1-1 角的度量

度量一个角的大小，通常有六十分制与弧度制两种单位。

1.六十分制 将圆周等分为360份，每一弧段所对的圆心角称为一度；一度再等分为60份，每份称为1分；一分再等分为60份，每份称为1秒。为简便計，采用符号“°”、“′”、“″”分别表示“度”、“分”、“秒”，如把3度25分46秒写成$3°25'46''$。

一圓周角为360°。

2.弧度制 在圓周上截取一与半徑等长的弧，此弧所对的圆心角称为一弧度(或叫做逕)，如图1所示，若$\widehat{AB}$的长等于半徑OA，则$\angle AOB = 1$弧度。因圓周长$2\pi R$为半徑的$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$倍，所以一圓周角等于2π弧度(在习惯上往往省略弧度二字，如2π弧度即写成2π)。

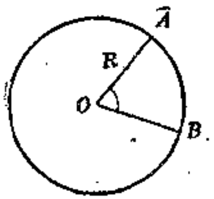

图 1

3.度与弧度的換算公式 一圓周角既等于360°，也等于2π弧度

$$360° = 2\pi,$$

所以

$$1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0.017453 \text{弧度};$$

$$1\text{（弧度）}=\frac{360^\circ}{2\pi}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ 17' 44.8''.$$

以后在运算中經常用到的换算关系列表如下：

表 1

度	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
弧　　度	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

例1　用弧度表示 50° 和 135° 的角。

解　由于
$$1^\circ=\frac{\pi}{180},$$
所以
$$50^\circ=50\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{18}\pi,$$
$$135^\circ=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi.$$

例2　用度数表示 $\frac{\pi}{5}$ 和 $\frac{8}{9}\pi$ 的角。

解　由于
$$1\text{（弧度）}=\frac{180^\circ}{\pi}$$
所以
$$\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi}=36^\circ,$$
$$\frac{8}{9}\pi=\frac{8\pi}{9}\times\frac{180^\circ}{\pi}=160^\circ.$$

§1-2　圓周的弧长

从弧度的定义，假設圓的半徑为 R，某一圓心角为 θ，而所对圓周的弧长为 l。则
$$\theta=\frac{l}{R},$$

θ

或

$$l=R\theta.$$

以上两式告訴了我們由弧長求角度，以及由角度求弧长的計算公式。

例 已知某圓之半徑为5米，求圓心角$\theta=\frac{\pi}{10}$所对之弧长。

解 $\because \quad l=R\theta=5\times\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}=\frac{3.1416}{2}=1.5708,$

$\therefore$ 弧长 $\quad l=1.5208$ 米。

习　題

1.用弧度表示下列各角：

$$15°,\quad 36°,\quad 22°30',\quad 108°.$$

2.用度数表示下列各角：

$$\frac{\pi}{6},\quad \frac{2}{3}\pi,\quad 1\frac{1}{2}\pi,\quad 1.5.$$

3.圓半徑为5厘米，求18°角所对之弧长。

4.弧长50米，它所对之圓心角为200°，求圓的半徑为多少？

5.圓的半徑为2.4米，弧长为4米，求此弧所对之圓心角为多少度？

6.在半徑等于R的圓中，一扇形的圓心角为θ(弧度)，試証此扇形的面积为$\frac{1}{2}R^2\theta$。

第二章　銳角三角函数

§2-1　銳角三角函数

1.函数的一般概念　假設有两个量x和y，当x取定某一值

时，y 也随之有一确定值，则称 y 为 x 之函数。而 x 叫自变量，y 所取之值叫函数值。

假設有一銳角 PAQ（如图 2），在 AP 上任取两点 B_1 与 B_2，分别向 AQ 作垂綫 B_1C_1 与 B_2C_2；又在 AQ 上取点 B_3 向 AP 作垂綫 B_3C_3。这样，就得到了三个相似直角三角形：

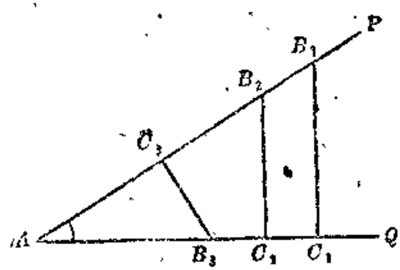

图 2

$$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3.$$

从平面几何知道：

$$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\frac{B_3C_3}{AB_3},$$

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{AC_3}{AB_3},$$

$$\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}=\frac{B_3C_3}{AC_3}.$$

因此，若角 A 一經确定，則其任意两边之比亦定，所以任意两边之比是角的函数。函数值的大小仅决定于角的大小和边的位置，而与边的長短无关。

因为三角形有三边可以作出六种比例，这就可以得出六个不同函数，为便于区别，分别給予不同的符号和名称。

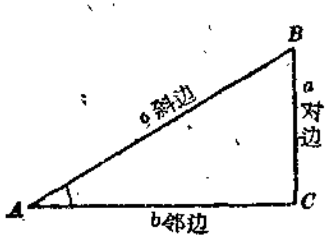

图 3

2. 銳角三角函数的定义 在直角三角形 ABC 中(如图3)，A 为銳角，其大小以 A 表之，

三边之长以 a、b、c 表之；分别称为$\angle A$之对边、邻边和斜边。则：

$\frac{对边}{斜边}=\frac{a}{c}$叫$\angle A$的正弦，記为 $\sin A=\frac{对边}{斜边}=\frac{a}{c}$；

$\frac{邻边}{斜边}=\frac{b}{c}$叫$\angle A$的余弦，記为 $\cos A=\frac{邻边}{斜边}=\frac{b}{c}$；

$\frac{对边}{邻边}=\frac{a}{b}$叫$\angle A$的正切，記为 $\operatorname{tg} A=\frac{对边}{邻边}=\frac{a}{b}$；

$\frac{邻边}{对边}=\frac{b}{a}$叫$\angle A$的余切，記为 $\operatorname{ctg} A=\frac{邻边}{对边}=\frac{b}{a}$；

$\frac{斜边}{邻边}=\frac{c}{b}$叫$\angle A$的正割，記为 $\sec A=\frac{斜边}{邻边}=\frac{c}{b}$；

$\frac{斜边}{对边}=\frac{c}{a}$叫$\angle A$的余割，記为 $\csc A=\frac{斜边}{对边}=\frac{c}{a}$。

正弦与余弦，正切与余切，正割与余割互称为余函数。

例1 已知直角三角形的二边 $a=3$、$b=4$（图 4），求 A角的六种函数値。

解 因$\triangle ABC$为直角三角形，依据勾股弦定理$c^2=a^2+b^2$，则：

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$$

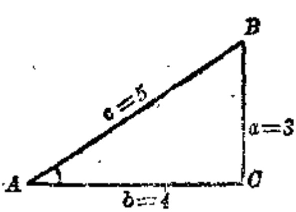

图 4

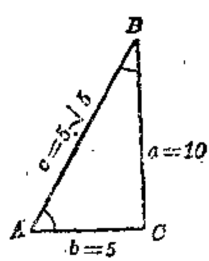

图 5

$$\therefore\ \sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{5},\quad \cos A=\frac{b}{c}=\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{3}{4},\quad \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{4}{3},$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{5}{4},\quad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}.$$

例2 已知直角三角形的二边$b=5$、$c=5\sqrt{5}$（图 5），求 B 角的六种函数值。

解 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{125-25}=\sqrt{100}=10.$

$$\therefore\ \sin B=\frac{b}{c}=\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}=\frac{1}{2},\qquad \operatorname{ctg}=\frac{a}{b}=2,$$

$$\sec B=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \csc B=\frac{c}{b}=\sqrt{5}.$$

习　题

1. 令直角三角形的三边为 a、b、c：

　（1）若 $a=1$、$b=2$、$c=\sqrt{5}$，試写出 A 角的六种函数；

　（2）若 $a=2$、$c=\sqrt{13}$，試写出 B 角的六种函数。

2. 若 $\sin A=\frac{12}{13}$，試求出 A 角的其它三角函数。

§2-2　銳角之三角函数值

1. 特别角之三角函数值

（1）45°角的三角函数值：在等腰直角三角形ABC 中（图

6)，若令 $AC=BC=1$，则 $\angle A=\angle B=45°$，$AB=\sqrt{1^2+1^2}$ $=\sqrt{2}$。

于是得知：

$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45°=1,\quad \operatorname{ctg} 45°=1,$$

$$\sec 45°=\sqrt{2},\quad \csc 45°=\sqrt{2}.$$

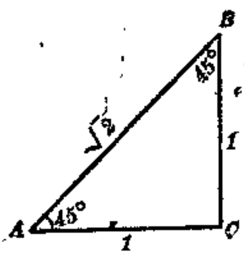

图 6

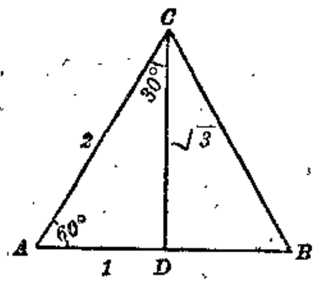

图 7

（2）30° 和 60° 角的三角函数值：由等边三角形 ABC 的顶点 C 作分角綫交 AB 于 D，则 CD 垂直且平分 AB。于是在直角三角形 ACD 中(图 7)，$\angle A=60°$、$\angle ACD=30°$。

令　　$AD=1$，则　$AC=2$，

$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \sin 30°=\frac{1}{2},\quad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}\cdots\cdots,$$

同样

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60°=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60°=\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg} 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdots\cdots,$$

（3）0° 和 90° 角的三角函数值：为求此函数值，我們引入“极限”这一名詞：若量 x 是变化的，但在变化过程中，它愈变愈靠近某定值 A，則称 A 为变量 x 之极限，記为 $x \to A$。

如图 8 所示，若譲边 c 繞 A 点旋轉，无限制的靠近 b，則：

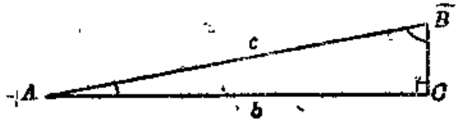

图 8

$$\angle A \to 0^\circ，\ \angle B \to 90^\circ，\ a \to 0，\ c \to b.$$

$$\therefore\quad \sin 0^\circ = \frac{a}{c} = 0, \qquad \cos 0^\circ = \frac{b}{c} = 1,$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{a}{b} = 0, \qquad \operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{b}{a} = \infty \cdots\cdots,$$

$$\sin 90^\circ = \frac{b}{c} = 1, \qquad \cos 90^\circ = \frac{a}{c} = 0,$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{b}{a} = \infty, \qquad \operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{a}{b} = 0 \cdots\cdots.$$

为方便起見，将上述結果总結如表 2。

从表 2 可以看出，当角在 0° 到 90° 之間取值时，正弦和余弦在 0 与 1 之間变化，正切和余切沒有限制，从 0 开始可以取任何正实数；而正割和余割又是从 1 开始和所有大于 1 的任何正实数。

例1　化簡　$2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$.

解　原式 $= 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + 1 = 3\frac{1}{2}$.

例2　化簡　$a\cos 0^\circ + 2b\sin 30^\circ + c\csc 90^\circ$.

解　原式 $= a \times 1 + 2b \times \frac{1}{2} + c \times 1 = a + b + c$.

表 2

函数值 角 / 函数	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

2.查表　前面就几个特別角討論了三角函数值，至于其它角的函数值，建議讀者采用苏联 B.M. 伯拉基斯所編“四位数学用表”❶。从表中可以由已知角查到函数值，反之也可由已知函数值查到角。該书附有用法說明，这里不再贅述（教师在讲課时应作讲解和举例）。

习　題

1.化簡下列各式：

（1）$3\,\mathrm{tg}\,45°+4\cos 60°+10\sin 30°$.

（2）$a\sin 90°+b\cos 0°+c\,\mathrm{tg}\,0°$.

（3）$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos 30°+\sqrt{2}\cos 45°-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 60°$.

❶ 該表印有单行本，由人民教育出版社出版。

（4） $\frac{2\sin 30°}{2\cos^2 30°}$①.

（5） $\mathrm{tg}^2 45°-\sin^2 30°-\sin^2 60°$.

2.求下列各三角函数值：

$\sin 33°$, $\cos 58°$, $\mathrm{tg}\,15°$, $\mathrm{ctg}\,65°$, $\sin 30°20'$, $\mathrm{tg}\,54°23'$.

3.求出下列各式中的 A 角：

$\sin A=0.342$, $\cos A=0.6422$, $\mathrm{tg}\,A=1.3814$.

§2-3　三角函数的基本关系

现在我們从三角函数的定义出发，导出几个关于它們的基本关系式。讀者必須熟悉这几个公式。

1.倒数关系：依倒数定义$\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}=1$,

$$\sin A\cdot\csc A=\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}=1,\ \text{即}\quad \boldsymbol{\sin A\cdot\csc A=1.}$$

$$\cos A\cdot\sec A=\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}=1,\ \text{即}\quad \boldsymbol{\cos A\cdot\sec A=1.}$$

$$\mathrm{tg}\,A\cdot\mathrm{ctg}\,A=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1,\ \text{即}\quad \boldsymbol{\mathrm{tg}\,A\cdot\mathrm{ctg}\,A=1.}$$

2.分式关系：

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\,A,\quad \text{即}\ \boldsymbol{\frac{\sin A}{\cos A}=\mathrm{tg}\,A.}$$

$$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\,A,\ \text{即}\ \boldsymbol{\frac{\cos A}{\sin A}=\mathrm{ctg}\,A.}$$

---

① 为方便和清楚起見，我們把三角函数的方次記在函数符号的右上角，如$(\sin x)^2=\sin^2 x$。

3.平方关系：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1,$$

即 $\qquad \sin^2 A+\cos^2 A=1.$

$$1+\mathrm{tg}^2 A=1+\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{b^2+a^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}=\left(\frac{c}{b}\right)^2=\sec^2 A,$$

即 $\qquad 1+\mathrm{tg}^2 A=\sec^2 A.$

同样 $\qquad 1+\mathrm{ctg}^2 A=\csc^2 A.$

为了帮助記忆，用一正六边形(图9)来表示上述各关系。

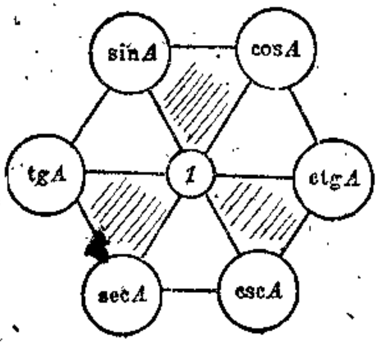

图 9

1.倒数关系：对角之函数相乘等于中間的数。

2.分数关系：按六角形依次讀出第一个除第二个等于第三个，如 $\cos A$ 除 $\sin A$ 等于 $\mathrm{tg}\,A$；同样 $\mathrm{ctg}\,A$ 除 $\csc A$ 等于 $\sec A$。

3.平方关系：画斜綫之三角形上方頂角之函数平方和等于下方角之函数平方。

例1 已知 $\mathrm{tg}\theta=\frac{4}{3}$，求其它五个函数值。

解 由基本公式：

（1） $\because\ \mathrm{tg}\,\theta\cdot\mathrm{ctg}\,\theta=1,\quad \therefore\ \mathrm{ctg}\,\theta=\frac{3}{4}.$

（2） $\because\ \sec^2\theta=1+\mathrm{tg}^2\theta=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9},$

$\therefore\ \sec\theta=\frac{5}{3}.$

（3）$\because$ $\cos\theta\cdot\sec\theta=1$，$\therefore$ $\cos\theta=\frac{3}{5}$.

（4）$\because$ $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

$\therefore$ $\sin\theta=\operatorname{tg}\theta\cdot\cos\theta=\frac{4}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$.

（5）$\because$ $\sin\theta\cdot\csc\theta=1$，$\therefore$ $\csc\theta=\frac{5}{4}$.

例2 用$\sin\theta$表其它五种函数。

解 $\because$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

$$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}.$$

例3 証明 $\cos A\cdot\csc A\cdot\operatorname{tg}A=1$.

証 原式左边$=\cos A\times\frac{1}{\sin A}\times\frac{\sin A}{\cos A}=1$.

例4 証明 $\cos^4x-\sin^4x=2\cos^2x-1$.

証 原式左边$=(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)$

$$=\cos^2x-\sin^2x=\cos^2x-(1-\cos^2x)$$

$$=2\cos^2x-1.$$

习　　題

1. 已知 $\cos A=\frac{3}{5}$，求 A 的其它五种函数。