高等代数的内容与方法

孙宗明 主编

兰州大学出版社

高等代数的内容与方法

主编　孙宗明

副主编　叶伯诚　乔凤珠　张纯伯

兰州大学出版社

1990・兰州

内 容 提 要

本书综述了现行教材的全部内容，形成完整的系统，补充了许多不常见的内容（其中包括历史资料），并对各部分内容的地位和相互关系进行了论述．本书对于习题进行分类剖析，并给出例题示范，从而阐明高等代数的方法．

本书内容丰富，体例新颖，并且与流行的北京大学编《高等代数》1988年版本相吻合，同样地分为十一章．对于高等学校理工科不同层次的学生、代数学爱好者、代数课程的教师，本书确实是一本好的参考读物．

高等代数的内容与方法

孙宗明　主编

兰州大学出版社出版发行

（兰州大学校内）

泰安师专印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　印张：14.66

1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷

字数：401千字　　印数：1—7500册

ISBN7-311-00325-3/O·53　　定价：5.20元

前　言

《高等代数》是高等学校数学专业的一门基础课，也是理工科其它一些专业学习的内容，编写一本好的参考读物无疑是有重要意义的，笔者多年来一直为此而努力。1986年，孙宗明写成3万余字的材料，铅印发给学生，可以作为本书的第一稿，初步形成了本书的体例；1988年，由孙宗明执笔、并与张纯伯合作完成27万余字的材料，油印发给学生，作为本书的第二稿，确定了本书的体例；1989年1月开始，孙宗明先后联络17个省的25位代数学同行，组织对第二稿进行修订，历经一年有余，终于形成了本书的原稿（第三稿）。

本书与北京大学编《高等代数》1988年版本相吻合，同样地分为十一章。而每章均分为"概括说明"、"内容提要"、"重点难点"、"习题类解"、"补充资料"、"基本习题"六节，对高等代数的内容与方法进行了全面的阐述，与已出版的同类书籍相比，具有体例新颖、内容丰富的特点，经在几届学生中试用，效果良好。

侯根明（山西吕梁教育学院）、乔凤珠（内蒙古师大）、李振国（内蒙河套大学）、高明谦（吉林师院）、江占文（黑龙江佳木斯师专）、周晓钟（齐齐哈尔师院）、章仲英（江苏徐州师院）、高建筑（安徽巢湖师专）、王灿照（福建龙岩师专）、吴丹柱（江西景德镇教育学院）、王文省（山东聊城师院）、姚存峰（济宁师专）、李玉文（德州教育学院）、王新民（昌潍师专）、姜同松（临沂师专）、叶伯诚（临沂师专）、张纯伯（泰安师专）、贾周（河南师大）、张正才（湖北黄冈教育学院）、陈进之（湖南益阳师专）、周楚昌（广东佛山大学）、薛育海（四川师院）、冯发良（陕西宝鸡师院）、徐兆亮（甘肃西北师大）、伊保林（青海民院）诸位具有中高级职称的同志（按省顺序列出）参加了对第二稿总的修订，主要工作是：对于每章的"重点难点"发表意见，改正第二稿中的错误，补充精彩的习题与内容，补充

参考书目。其中，王灿照、高建筑、叶伯诚、张正才、王新民、姚存峰、乔凤珠、李振国、周晓钟、王文省诸位同志还分别（顺次）对第一至第九章、第十一章作了修订，主要工作是：将所分工章的“§3重点难点”扩充，广泛征求本单位同行的意见，详细论述解决难点的方法；对“§5补充资料”中的“历史资料点滴”作补充，写成较系统的材料；对“§4习题类解”中每类习题的分析进行扩写，补充个别题型，调换少部分例题；并对其余各节发表意见。因此，第三稿是集合众多同行的经验与智慧，在第二稿的基础上修订而成的。

本书由泰安师范专科学校数学系副教授孙宗明任主编，叶伯诚、乔凤珠、张纯伯任副主编，张纯伯任责任副主编。

主编孙宗明，以第二稿为依据，吸收各参编同行的修订材料，最后执笔定稿。乔凤珠、张纯伯、叶伯诚、王文省、李振国协助孙宗明，做了一些工作。各位参编者是参考北京大学编《高等代数》1978年版进行修订的，在定稿时已见到1988年版，孙宗明参考新版定稿并独立完成新版中新增设的《双线性函数》一章。

在本书的十一章之后，还有两个“目录”与五个“附录”，均为孙宗明等的独立之作，同样是本书的重要组成部分。

兰州大学数学系郭聿琦教授、聊城师范学院数学系杨子胥教授、山东师范大学数学系李师正教授作为本书的审校，付出了辛苦的劳动，提出了许多宝贵的意见，他们还共同向兰州大学出版社推荐本书，编者对他们致以衷心的感谢。兰州大学出版社对本书的出版十分关心，做了很多工作，在此深致谢意。

编者虽从事《高等代数》教学多年，也进行过某些代数学问题的学习和研究，但由于水平所限，难免有不妥之处，敬请同行与读者批评指正。

编　者

1990年3月

目　　录

第一章　多　项　式

§1　概括说明

多项式理论是高等代数的重要内容，是学习代数学及其它数学分支的必要的基础，是中学数学有关知识的加深和扩充。

在高等代数的许多部分都用到多项式的概念及理论，如：矩阵的多项式、线性变换的多项式、特征多项式等。多项式在抽象代数学中扮演着重要角色，多项式环是抽象环的三大背景（整数环、多项式环、矩阵环）之一，在扩域的理论中常常谈及多项式的根。多项式函数是基本函数，用多项式函数去逼近比较复杂的函数，是数学分析等学科中重要的研究课题之一。

本章的内容分为四个部分：数域，一般数域F上的一元多项式，特殊数域Q、R、C上的一元多项式，一般数域F上的多元多项式。

本章先建立数环与数域的概念，作为研究多项式理论的基础，同时也作为本书中研究其它一些对象的基础。我们研究问题，总是在一个确定的数域上进行，这与中学数学相比，具有更高的严格性与确定性。

本章主要研究数域F上的一元多项式，可归纳为如下四个小部分：一般理论（定义、次数、运算），整除理论（整除、最大公因式、互素），因式分解理论（不可约多项式、因式分解定理、标准分解式、重因式），根的理论（多项式的值、多项式的根、根的个数、多项式函数）。

对于有理数域Q、实数域R、复数域C这三个常用的数域而言，一元多项式的理论还有一些更深入的结果。特别地，我们将

给出$R(x)$、$C(x)$中多项式的标准分解式，讨论根的性质．这也是本章的重要内容之一．

在一元多项式的讨论中，整除是基础，因式分解是中心，而因式分解又与根紧密联系，要抓住整除、分解、根这三个问题及其相互关联，使一元多项式理论成为一个有机体．

本章还要研究数域F上的多元多项式的基本理论，分为四个小部分：多元多项式的概念，齐次多项式，对称多项式，一元多项式根的判别式．

本章的补充资料是：最小公倍式，整数的整除理论与因数分解理论，实根的界和个数，多元多项式的整除与因式分解，历史资料点滴．

§2 内容提要

I 数域

设M是一个非空数集．若M中任意两个数作某一运算的结果仍在M中，则称M对于该种运算是封闭的．

设S是一个非空数集．若对于任意的 a，$b\in S$，都有 $a+b$，$a-b$，$ab\in S$，换言之，S对于加法、减法、乘法封闭，则称S是一个数环．

$\{0\}$是数环．整数集$\mathbf{Z}$是数环．若S_1，S_2是数环，则 $S_1\cap S_2$是数环．任何数环都包含零数环$\{0\}$．若S是数环，且$1\in S$，则S包含整数环$\mathbf{Z}$．零数环$\{0\}$是唯一的有限数环．

设F是一个至少含有两个数的数集．若对于任意的$a,b\in F$，都有$a+b$，$a-b$，$ab\in F$，而当$b\neq 0$时还有$a/b\in F$，换言之，F对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）都封闭，则称F是一个数域．显然，数域是数环．

若F是数域，则 0，$1\in F$．有理数集Q，实数集R，复数集C都是数域．若F_1，F_2是数域，则$F_1\cap F_2$是数域．数域都是无限

集合。

任意数域都包含有理数域，换言之，有理数域是最小的数域。存在无穷多个互异的数域。

Ⅱ 一般数域F上的一元多项式

一 一般理论

1 概念

设F是一个数域，x是一个文字，n是一个非负整数，$a_0, a_1, \cdots, a_n \in$ F。形式表达式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$（或$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$）称为系数在数域F中的一元多项式，或者简称为数域F上的一元多项式。记为$f(x)$，$g(x)$，$\cdots$等。并且，常用连加号缩写。例如

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

形式表达式的意思是，仅作为一个字符系统。即"＋"号并不意味着"加"，$a_i x^i$ 并不意味着a_i乘以x^i，而x^i也并不意味着x的i次幂。总之，就是一个如此写出的东西而已。

$a_i x^i$称为$f(x)$的i次项，a_i称为i次项的系数。满足$a_n \neq 0$的最大整数n称为$f(x)$的次数，记为$deg(f(x)) = n$，a_n称为$f(x)$的首项系数，当$a_n = 1$时，称$f(x)$为首1多项式。系数全为零的多项式称为零多项式，记为0。零多项式没有"次数"的概念。$f(x)$是零次多项式当且仅当$f(x)$是F中的一非零常数，因此，绝不能把零次多项式与零多项式混同起来。

约定：1）系数是零的项可以省略不写（从而，自然也可以添上一些系数是零的项）；2）系数是1的项可以把系数1省略不写；3）x^1写为x；4）x^0写为1，$a_0 x^0$简写为a_0，从而，零次项称为常数项。

若$f(x)$与$g(x)$都是数域F上的多项式，且同次项的系数均相

等，则称$f(x)$与$g(x)$相等，记为$f(x)=g(x)$．从而，相等的多项式是完全一样的，可以写为完全相同的形式．这就是通常比较系数法的依据．

2　运算

设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，$g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$，不妨设$m\leqslant n$，从而再设$b_{m+1}=\cdots=b_n=0$，则多项式$\sum\limits_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$称为$f(x)$与$g(x)$的和，记为$f(x)+g(x)$．多项式$\sum\limits_{s=0}^{n+m}\left(\sum\limits_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s$称为$f(x)$与$g(x)$的积，记为$f(x)g(x)$．多项式$\sum\limits_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$称为$f(x)$的负多项式，记为$-f(x)$．多项式$f(x)+(-g(x))$称为$f(x)$与$g(x)$的差，记为$f(x)-g(x)$．

对于任意的$f(x),g(x)$,成立：1）$f(x)+0=0+f(x)=f(x)$；2）$f(x)0=0f(x)=0$；3）$f(x)1=1f(x)=f(x)$；4）$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$；5）$f(x)-0=f(x)$；6）$k\in\mathbf{F}$，$kf(x)=k\left(\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}(ka_i)x^i=f(x)k$．

多项式的加法与乘法运算，满足下列规律：

1）加法交换律　$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

2）加法结合律

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))；$$

3）乘法交换律　$f(x)g(x)=g(x)f(x)$；

4）乘法结合律　$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$；

5）乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)；$$

6）乘法消去律　$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，$f(x)\neq 0 \Rightarrow g(x)=h(x)$，其中$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$是任意的多项式。

3　次数定理

若$f(x)$，$g(x)$是数域F上的两个多项式，且$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则，1）当$f(x)+g(x)\neq 0$时，$deg(f(x)+g(x))\leqslant max(deg(f(x)),deg(g(x)))$；2）$deg(f(x)g(x))=deg(f(x))+deg(g(x))$。

$f(x)g(x)=0$的必要充分条件是$f(x)$与$g(x)$之中至少有一个是零多项式。

4　一元多项式环

数域F上文字x的一元多项式的全体，连同它们的加法与乘法运算一起组成的系统，称为数域F上的一元多项式环，记为F〔x〕。

以后我们将知道，“环”是一个代数系统，并且F〔x〕对于多项式的加法与乘法作成一个环。

二　整除理论

1　带余除法

带余除法定理.对于F〔x〕中的任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$，其中$g(x)\neq 0$，一定有F〔x〕中的多项式$q(x)$与$r(x)$，使得$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，其中$r(x)=0$或$deg(r(x))<deg(g(x))$，并且，这样的$q(x)$，$r(x)$是唯一确定的。

定理中的$q(x)$，$r(x)$分别称为$g(x)$除$f(x)$的商式与余式。关于$q(x)$，$r(x)$的求法，使用通常的除法即可，一般称之为长除法。

综合除法定理。设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$a_n\neq 0$，$n\geqslant 1$，$f(x)=q(x)(x-c)+r$，$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$，则$b_{n-1}=a_n$，$b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}$，$b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}$，$\cdots$，$b_1=a_2+cb_2$，$b_0=a_1+cb_1$，$r=a_0$

$+cb_0$，从而确定了 $q(x)$ 与 r，并且可以用下列格式将计算程序表示出来，称为**综合除法**。

$$\begin{array}{ccccc|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\cdots a_1 & a_0 & c \\ +) & cb_{n-1} & cb_{n-2}\cdots cb_1 & cb_0 & \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3}\cdots\ b_0 & r & \end{array}$$

设 $f(x)=(ax+b)Q(x)+R$，$a\neq 0$，

$f(x)=\left(x-\left(-\dfrac{b}{a}\right)\right)q(x)+r$，则 $Q(x)=\dfrac{q(x)}{a}$，$R=r$。

利用综合除法可以把 $f(x)$ 表示成 $x-c$ 的方幂和的形式：若 $f(x)=(x-c)f_1(x)+b_0$，$f_1(x)=(x-c)f_2(x)+b_1$，$f_2(x)=(x-c)f_3(x)+b_2$，$\cdots$，$f_{n-2}(x)=(x-c)f_{n-1}(x)+b_{n-2}$，$f_{n-1}(x)=(x-c)b_n+b_{n-1}$，则 $f(x)=b_n(x-c)^n+b_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+b_1(x-c)+b_0$。

反过来，由 $f(x)$ 的 $x-c$ 的方幂和的形式，可写成 x 的多项式的形式：设 $f(x)=b_n(x-c)^n+b_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+b_1(x-c)+b_0$，令 $x=y+c$，则 $f(y+c)=b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y+b_0\overset{\text{记为}}{=\!=}g(y)$，利用综合除法可以把 $g(y)$ 表示成 $y+c$ 的方幂和的形式，即 $g(y)=f(y+c)=a_n(y+c)^n+a_{n-1}(y+c)^{n-1}+\cdots+a_1(y+c)+a_0$，则 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$。

若 $f(x)$，$g(x)\in \mathbf{F}[x]$，$f(x)\neq 0$，$deg(g(x))\geqslant 1$，则在 $\mathbf{F}[x]$ 中有唯一的多项式组 $r_0(x)$，$r_1(x),\cdots,r_{k-1}(x),q_k(x)$，使得 $f(x)=q_k(x)g^k(x)+r_{k-1}(x)g^{k-1}(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x)$，其中 $q_k(x)\neq 0$，且 $deg(q_k(x))<deg(g(x))$，$g^0(x)=1$，而 $r_i(x)=0$ 或 $deg(r_i(x))<deg(g(x))$，$i=0$，1，$\cdots$，$k-1$，$f(x)$ 的上述表达式，称为 $f(x)$ 按 $g(x)$ 的展开式。事实上，这是前面结果的推广。

2　整除的概念

定义．设 $f(x)$, $g(x)\in F[x]$．若有 $h(x)\in F[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，则称多项式 $g(x)$ 整除多项式 $f(x)$，记为 $g(x)|f(x)$．否则，即，对于任意 $h(x)\in F[x]$，均有 $f(x)\neq g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$．当 $g(x)|f(x)$ 时，称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式，而当 $g(x)\neq 0$ 时，$f(x)/g(x)$ 表示 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式．

整除具有下列性质：1）对任意 $f(x)$，有 $f(x)|0$，从而零多项式有任意高次的因式；2）$0|f(x)\Leftrightarrow f(x)=0$；3）零次多项式整除任意多项式；4）对任意 $f(x)$ 及任意 $c\in F$，$c\neq 0$，成立 $f(x)|cf(x)$，$cf(x)|f(x)$；5）对任意 $f(x)$ 及任意 $c\in F$，$c\neq 0$，成立：$g(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)|cf(x)$，从而，$f(x)$ 与 $cf(x)$ 有相同的因式；$cg(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)|f(x)$，从而，$g(x)$ 与 $cg(x)$ 有相同的倍式；6）任意多项式 $f(x)$ 都有 c 与 $cf(x)(c\in F,\ c\neq 0)$ 这两个因式，称为 $f(x)$ 的平凡因式；7）非零多项式的次数不低于其因式的次数，即，$f(x)\neq 0$，$g(x)|f(x)\Rightarrow g(x)\neq 0$ 且 $deg(g(x))\leqslant deg(f(x))$；8）$f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)\Rightarrow f(x)|h(x)$，即，传递性成立；9）$f(x)|g(x)$ 不能推出 $g(x)|f(x)$，即，对称性不成立；10）$f(x)|g(x)$，$g(x)|f(x)\Leftrightarrow f(x)=cg(x)$，$c\in F, c\neq 0$；11）$f(x)$ 整除 $g(x)$，$h(x)$ 之一 $\Rightarrow f(x)|g(x)h(x)$；12）$f(x)|g_i(x)$，任意 $h_i(x)\in F[x]$，$i=1,2,\cdots,t\Rightarrow f(x)|(g_1(x)h_1(x)+\cdots+g_t(x)h_t(x))$，称为，$f(x)$ 整除 $g_1(x)$，$\cdots$，$g_t(x)$ 的一个组合．

整除的判定：$g(x)=0$ 时，$g(x)|f(x)\Leftrightarrow f(x)=0$；

而 $g(x)\neq 0$ 时，$g(x)|f(x)\Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式为0．

整除关系不因数域的扩大而改变．

3　最大公因式

定义．设 $f(x)$，$g(x)\in F[x]$．若有 $d(x)\in F[x]$，使得，

1）$d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，即 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式；

2）$\phi(x)\in F[x]$，$\phi(x)\mid f(x)$，$\phi(x)\mid g(x)\Rightarrow \phi(x)\mid d(x)$，即$f(x)$，$g(x)$ 的公因式都是$d(x)$的因式，则称 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$的一个最大公因式。

简单性质：1）任意$f(x)$与非零常数c的一个最大公因式是c；2）$g(x)\mid f(x)\Rightarrow g(x)$ 是 $f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式；3）$f(x)$与$g(x)$的最大公因式是$0\Leftrightarrow f(x)=g(x)=0$。

唯一性．若 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式，则$cd(x)(c\in F$，$c\neq 0)$ 是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式；并且，只有这样的乘积$cd(x)$是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式．换言之，若不计非零常数因式的差别，$f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式是唯一的。称为相对唯一性（或基本唯一性）．

当$f(x)$，$g(x)$不全为零时，用$(f(x),\ g(x))$ 表示 $f(x)$，$g(x)$ 的首项系数为1的最大公因式；当 $f(x)=g(x)=0$ 时，$(f(x),\ g(x))$表示0．从而，特殊的最大公因式$(f(x),\ g(x))$是唯一的．称为绝对唯一性．

存在性．$F[x]$中的任意两个多项式$f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式$d(x)$是存在的．并且，当$f(x)=g(x)=0$ 时，$d(x)=0$；当$f(x)=0$，$g(x)\neq 0$ 时，$d(x)=g(x)$；当$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$时，可以用辗转相除法求得$d(x)$。

表示为组合．$f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$ 可以表示为$f(x)$，$g(x)$ 的一个组合．即，存在 $u(x)$，$v(x)\in F[x]$，使得$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$．

上面的等式为理论上的证明带来方便．等式中的 $u(x)$、$v(x)$ 不是唯一的，而且有无限多对．

若$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$，则 $d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式$\Leftrightarrow d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的公因式．

最大公因式不因数域的扩大而改变。

前面论述的两个多项式的最大公因式的理论，对于多个多项

式的最大公因式，类似地成立。

求多个多项式的最大公因式，转化为求两个多项式的最大公因式，基于下面的公式（$s\geqslant 3$）

$$(f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots,f_s(x))$$
$$=((\cdots((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)),\cdots),f_s(x)).$$

4　互素

定义．若 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式是非零常数，即，$(f(x),\ g(x))=1$，则称$f(x),g(x)$互素，常记为

$$(f(x),g(x))=1.$$

互素的判定．$\mathbf{F}[x]$中的多项式$f(x)$，$g(x)$互素$\Leftrightarrow\mathbf{F}[x]$中有多项式$u(x)$，$v(x)$，使得$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$。

互素的性质：

1）$f(x)\mid g(x)h(x)$，$(f(x),\ g(x))=1\Rightarrow f(x)\mid h(x)$；

2）$f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，$(f_1(x),\ f_2(x))=1\Rightarrow f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$；

3）$(f(x),\ h(x))=1$，$(g(x),\ h(x))=1\Leftrightarrow(f(x)g(x),\ h(x))=1$。

最大公因式与互素的关系．若 $f(x)$，$g(x)$ 不全为0，则$(f(x),\ g(x))=d(x)\Leftrightarrow(f_1(x),\ g_1(x))=1$，$f(x)==f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$。

互素不因数域的扩大而改变。

上面讨论了两个多项式互素，类似地，可以讨论多个多项式互素．设有多项式$f_1(x),f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$，$s\geqslant 2$。若其中任意两个多项式都互素，则称$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$两两互素。于是，称$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$互素为整体互素。若$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$两两互素，则$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 必整体互素；反之不然。

三　因式分解理论

1 不可约多项式

若$F[x]$中的$n(n>0)$次多项式$f(x)$能够分解为 $F[x]$中的两个次数都小于n的多项式$g(x)$与$h(x)$的乘积，则称$f(x)$在$F[x]$中可约，或称$f(x)$在F上可约．否则，即$f(x)$在$F[x]$ 中仅有平凡因式，则称$f(x)$ 在 $F[x]$中不可约，称 $f(x)$ 是不可约多项式．

对于正次数的多项式，谈论可约与不可约的问题；对于零多项式及零次多项式，不谈论可约与不可约的问题．

任意一次多项式在任意数域上总是不可约的．

多项式的可约性是相对于给定的数域而言的，随着数域的改变而改变．

不可约多项式的性质：

1）$p(x)$是不可约多项式$\Leftrightarrow cp(x)$是不可约多项式， $c\neq 0$；

2）次数>0的多项式$p(x)$是不可约多项式$\Leftrightarrow$对任意$f(x)$，有且仅有$p(x)\mid f(x)$与$(p(x),\ f(x))=1$之一；

3）次数>0的多项式$p(x)$是不可约多项式$\Leftrightarrow$对任意$f(x)$，$g(x)$，由$p(x)\mid f(x)g(x)$得出$p(x)\mid f(x)$或$p(x)\mid g(x)$；

4）$p(x)$ 是不可约多项式， $p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)\Rightarrow p(x)$至少整除$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$之一；

5）$F[x]$中一正次数多项式$f(x)$的最低正次数的因式一定是不可约的，从而$f(x)$一定被$F[x]$ 中的某个不可约多项式整除．

2 唯一因式分解定理

数域F上的每一个次数>0的多项式$f(x)$ 都可以唯一地分解为数域F上的有限个不可约多项式的乘积.所谓唯一性是说,若有$f(x)$的两个分解式$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$，则必有 $s=t$，并且适当调换因式的次序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x)$，$c_i\in F$，$c_i\neq 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$.

3 标准分解式

数域F上的每一个次数>0的多项式$f(x)$都能唯一（不计因子次序）地写为$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，其中$p_i(x)(i=1, 2, \cdots, s)$是F[x]中互异的首1不可约多项式，$r_i(i=1, 2, \cdots, s)$是正整数，$a$是$f(x)$的首项系数. 称为$f(x)$的标准分解式（或典型分解式）.

对任意$h(x)$，r为正整数，$h^r(x)$表示r个$h(x)$相乘；对于$h(x)\neq 0$，$h^0(x)=(h(x))^0=1$.

若$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$是标准分解式，则$g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)=bp_1^{\delta_1}(x)p_2^{\delta_2}(x)\cdots p_s^{\delta_s}(x)$，$b\in$ F，$b\neq 0, 0\leqslant\delta_i\leqslant r_i$，$i=1, 2, \cdots, s$.

若$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x), g(x)=bp_1^{\lambda_1}(x)\cdot p_2^{\lambda_2}(x)\cdots p_s^{\lambda_s}(x)$，$a\neq 0$，$b\neq 0$，$p_i(x)(i=1,2, \cdots, s)$是互异的首1不可约多项式，$r_i$，$\lambda_i(i=1, 2, \cdots, s)$是非负整数，则$(f(x), g(x))=p_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_s^{\alpha_s}(x)$，$\alpha_i=\min(r_i, \lambda_i)$，$i=1, 2, \cdots, s$.

应用标准分解式，从理论上研究整除与最大公因式，证明某些结论，是十分方便的. 但是，在实践上绝不能代替带余除法与辗转相除法.

4　重因式

F[x]中的多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$的导数（或微商）是指F[x]中的多项式$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$($f(x)=c, c\in$ F时, $f'(x)=0$). $f'(x)$称为$f(x)$的一阶导数. 一阶导数$f'(x)$的导数称为$f(x)$的二阶导数，记作$f''(x)$. $f''(x)$的导数称为$f(x)$的三阶导数，记作$f'''(x)$. …. $f(x)$的k（$k>3$）阶导数记作$f^{(k)}(x)$.

用定义容易验证多项式的下列求导公式：$(f(x)+g(x))'$