JS 中、美奥数总领队担纲 东南地区指定培训教材

高中数学竞赛培训教材

高二分册

主编 李胜宏 [美]冯祖鸣

浙江大学出版社

高中数学竞赛培训教材

（高二分册）

丛书主编　李胜宏　[美]冯祖鸣

分册主编　陶平生　林　常　马茂年

编委名单　石世昌　占章根　陈德燕
夏彦婴　苏　健　赖敬华
李　芳　王希年　马茂年
虞金龙

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛培训教材(高二分册)/李胜宏,冯祖鸣主编.—杭州:浙江大学出版社,2004.9
ISBN 7-308-03780-0

Ⅰ.高... Ⅱ.①李...②冯... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第071374号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 郝中娜 杨晓鸣
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 19.5
字　　数 430千字
版 印 次 2004年9月第1版 2006年9月第4次印刷
印　　数 16001-19000
书　　号 ISBN 7-308-03780-0/G·730
定　　价 23.00元

编 写 说 明

国际数学奥林匹克竞赛在世界范围内愈来愈普及。有着深厚文化积淀的中国东南地区(闽、浙、赣)于2004年8月举办了"首届中国东南地区数学奥林匹克",其宗旨是通过竞赛来激发学生学习数学的兴趣和热情,并发现和培养一批数学苗子。要做到这一点,就必须遵照循序渐进的教学原则和辅导方法。"高中数学竞赛培训教材"丛书(高一、高二、高三共三个分册)就是以此为出发点而编写的一套培训教材。

丛书在构思和编写过程,着重知识的完备性和自我封闭性。丛书对初等数学的基本理论和一些典型问题的背景作了系统的介绍,对基本定理则给出了完备的证明。其目的是使学生不仅要知其然,还要知其所以然。这对培养学生的数学品格,提升学生的数学修养是大有裨益的。

在编写过程中,高一、高二分册的内容大体与高中教材同步,但在深度上逐步加深,引导学生循序渐进,通过学习使学生达到甚至超过联赛一试的水平;在广度上,除高中课本规定的知识外,还作了大量的补充,内容涉及CMO和IMO等知识,为学生更进一步的学习提供丰富的素材。高三分册是针对联赛二试而编写的,内容涉及各个高层次的数学竞赛,不同层次的学生可以灵活取舍。

丛书在材料的选取上,充分体现新理念,既强调数学思想和方法的传授,又注重数学解题能力和技巧的培养。这体现在:对经典材料的处理新视角化,对新颖材料的处理多视角化,力戒陈题和人云亦云,充分渗透编者的思想方法,使读者耳目一新。

在每个知识点上精选了一些典型的、新颖的,并有一定难度的例题,通过例题的讲解力求达到举一反三的目的。此外,还配备了适量的课外习题,供学生课外学习和研究。对这些习题只是提供了简单的解题思路,目的是希望学生自己去体验、去探究、去获取独立的数学知识。

丛书由浙江大学教授博导、全国数学奥林匹克领队教练李胜宏先生和美国数学奥林匹克领队教练冯祖鸣博士主编,参加编写人员包括一批全国数学奥林匹克领队教练,以及闽、浙、赣三省长期从事数学奥林匹克竞赛辅

导和研究的专家、学者、奥数高级教练、中学特级教师等。

高二分册第一章由江西上饶一中高级教师、奥数高级教练李芳老师编写，第二章由江西南昌二中高级教师、奥数高级教练赖敬华老师编写，第三章由福州一中高级教师、奥数高级教练陈德燕老师编写，第四章由福州一中高级教师、奥数高级教练老师夏彦婴编写，第五章、第六章由浙江大学教授博导、全国数学奥林匹克领队教练李胜宏先生编写(其中，习题解答由振云提供)，第七章由浙江杭州第十四中学特级教师、奥数高级教练马茂年老师编写。

目　录

第一章 直线和圆的方程

一、直线的方程

1. 直线方程的五种形式

已知条件	方程名称	方程形式	运用范围
过点 $P_0(x_0,y_0)$ 且斜率为 k	点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	不能表示与 x 轴垂直的直线
在 y 轴上的截距为 b，斜率为 k	斜截式	$y=kx+b$	不能表示与 x 轴垂直的直线
过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$（$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$）	两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不能表示与坐标轴垂直的直线
过 $(a,0)$，$(0,b)$ 且 $a\cdot b\neq 0$	截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不能表示与坐标轴垂直或过原点的直线
两个独立条件	一般式	$Ax+By+C=0$	可表示任何直线

2. 直线的参数方程

(1)标准式　过点 $P_0(x_0,y_0)$ 倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程是

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\ (t\text{ 为参数}),\\ y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}$$

(2)一般式　过点 $P_0(x_0,y_0)$ 斜率 $k=\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ 的直线的参数方程是

$$\begin{cases}x=x_0+at\ (t\text{ 为参数})\\ y=y_0+bt\end{cases}$$

3. 中心对称

设点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$关于点 $M(x_0,y_0)$对称,则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$,$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

4. 方法指导

因为确立一条直线需要两个独立条件,所以求直线方程也需两个独立条件,其方法一般有:

(1)直接法 直接选用直线方程的四种形式,写出形式适当的直线方程.

(2)待定系数法 先由题意写出满足其中一个条件并含有一个待定系数的直线方程,再由题给的另一条件求出待定系数,最后将求得的系数代入所设的方程,即得方程.

若直线 l 过点 $M(a,3)$,$N(1,2)$,求直线的斜率和倾斜角.

【分析】 已知两点坐标,可直接根据斜率和倾斜角的定义来求解,由于过 M,N 的斜率的表达式中分母为 $a-1$,故应讨论.

【解】 (1)当 $a=1$ 时,直线 l 与 x 轴垂直,此时直线 l 的斜率不存在,倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}$.

(2)当 $a\neq1$ 时,斜率 $k=\dfrac{3-2}{a-1}=\dfrac{1}{a-1}$.

①当 $a>1$ 时,倾斜角 $\alpha=\arctan\dfrac{1}{a-1}$;

②当 $a<1$ 时,倾斜角 $\alpha=\pi+\arctan\dfrac{1}{a-1}$.

【说明】 求直线的斜率时,需对斜率是否存在的情况进行讨论;但当斜率的表达式中含有字母还须求直线的倾角时,应按斜率的正、负来讨论.

直线 l 的方程为$(a+1)x+y+2-a=0$.

(1)若 l 在两坐标轴的截距相等,求 l 的方程;

(2)若 l 不经过第二象限,求实数 a 的取值范围.

【简解】 (1)当 $a=2$ 时,直线在 x 轴和 y 轴上的截距都为零时,其方程为 $3x+y=0$;

当 $a\neq2$ 时,$a+1=1$,得 $a=0$,其方程为 $x+y+2=0$.

(2)将 l 的方程化为 $y=-(a+1)x+a-2$,由 l 不经过第二象限,得

$\begin{cases}-(a+1)>0,\\ a-2\leqslant0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-(a+1)=0,\\ a-2\leqslant0,\end{cases}$ 所以 $a\leqslant-1$.

【说明】 由于截距可以为零,原点不属于任何象限,在解答此类问题时要注意防止漏解.

求直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 $A(1,-1)$对称的直线方程.

【分析】 直线关于点对称的问题转化为点关于点对称即可.

【简解】 设已知直线上的点 $P_0(x_0,y_0)$关于 $A(1,-1)$的对称点为 $P(x,y)$,则 $x_0=2-x$,$y_0=-2-y$,由 $2(2-x)+3(-2-y)-6=0$,得所求直线方程为 $2x+3y+8=0$.

直线 l 过点 $P(2,1)$,且分别交 x 轴、y 轴的正半轴于点 A,B,当$|PA|\cdot|PB|$取最小值时,求 l 的方程.

【分析】 本例是求当$|PA|\cdot|PB|$取最小值时的直线 l 的方程,故宜采用函数的思想方法来处理.直观地看,影响$|PA|\cdot|PB|$大小的量可以是 l 的倾斜角、可以是 l 的斜率、也可以是 l 的截距,选择其中任一个量为变量,均可确定$|PA|\cdot|PB|$的函数式,利用函数取最小值的条件,就可以确定变量的取值,从而求出直线 l 的方程.

【解法一】 如图 1-1,设$\angle OAB=\theta(0<\theta<90^\circ)$,过 P 作 $PN\perp x$ 轴于M,作 $PN\perp y$ 轴于N,则

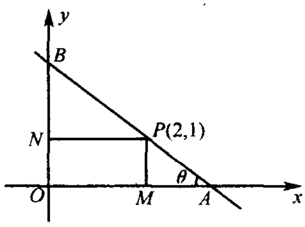


图 1-1

$$|PA|=\frac{1}{\sin\theta},|PB|=\frac{2}{\cos\theta},$$

$$|PA|\cdot|PB|=\frac{2}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{4}{\sin2\theta}.$$

当 $\theta=45^\circ$时,$|PA|\cdot|PB|$最小,此时 l 的斜率为 -1,故 l 的方程为$y-1=-(x-2)$,即 $x+y-3=0$.

【解法二】 设直线 l 的斜率为k,则直线 l 的方程为$y-1=k(x-2)(k<0)$,由直线 l 的方程可分别求得A,B 两点的坐标为$\left(\frac{2k-1}{k},0\right)$,$B(0,1-2k)$.

$$|PA|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1},|PB|=\sqrt{4+4k^2},$$

$$|PA|\cdot|PB|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\cdot\sqrt{4+4k^2}=\frac{2(1+k^2)}{|k|}=2\left[(-k)+\frac{1}{(-k)}\right]\geqslant4.$$

当且仅当$-k=\frac{1}{-k}$即$k=-1$时,$|PA|\cdot|PB|$取最小值,故此时 l 的方程为$x+y-3=0$.

【解法三】 设直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,据题设有$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$.　①

又$|PA|\cdot|PB|=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{\cos\pi}=-(2-a,1)\cdot(2,1-b)=2a+b-5$.

结合①有$|PA|\cdot|PB|=(2a+b-5)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant2$.

当且仅当 $a=b$ 且$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$,即 $a=b=3$ 时,$|PA|\cdot|PB|$最小,故所求直线方程为 $x+y-3=0$.

【说明】 在使用待定系数法求直线方程时,除要注意选择直线方程的形式外,还应注意分析和运用图形的几何性质,使解题简便.

例3　已知有向线段 PQ 的起点P 和终点Q 的坐标分别为$(-1,1)$和$(2,2)$,若直线 $l:x+my+m=0$与 PQ 的延长线相交,求 m 的取值范围.

【分析】 将题设的几何事实坐标化,例如转化为 l 的斜率的取值范围、l 与直线 PQ 交点分有向线段PQ 所成的比λ 的取值范围等均可求解.

【解法一】 直线 l 的方程为$x+m(y+1)=0$,显然它经过定点 $M(0,-1)$,如图 1-2,过点 M 作直线$l_1/\!/PQ$,则 l_1 的斜率 $k_1=k_{PQ}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$.

过 M,Q 作直线l_2,则 l_2 的斜率 $k_2=\frac{3}{2}$,如图所示,与 PQ 的延长线相交的直线l 的斜率应

数学同步发展课程

满足 $k_1<k<k_2$，于是 $\frac{1}{3}<-\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$，解得 $-3<m<-\frac{2}{3}$.

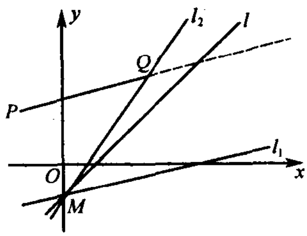


图 1-2

【解法二】 设 $N(x,y)$ 为 PQ 延长线上任意一点，设 N 分 $\overrightarrow{PQ}$ 所成的比为 λ，显然 $\lambda\in(-\infty,-1)$，由定比分点坐标公式得 $x=\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}$，$y=\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}$，代人直线方程得

$$\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}+\frac{m(1+2\lambda)}{1+\lambda}+m=0\text{，即 }2+3m=\lambda(1-2m).$$

显然 $2+3m\neq0$，不然，若 $2+3m=0$，即 $m=-\frac{2}{3}$.

此时，$1-2m=0$，得 $m=\frac{1}{2}$，与 $m=-\frac{2}{3}$ 矛盾.

所以 $\lambda=\frac{1-2m}{2+3m}$. 令 $\frac{1-2m}{2+3m}<-1$，得 $-3<m<-\frac{2}{3}$.

【说明】 本题体现了数形结合与等价转化的思想，以及直线的斜率、定比分点的几何意义.

例6 已知 a,b 为正数，点 (x_n,y_n)，由以下方法确定：直线 $y=-\frac{b}{a}x+b$ 和 $y=\frac{b}{a}x$ 的交点为 (x_1,y_1)，过点 $(0,b)$ 和 $(x_{n-1},0)$ 的直线与 $y=\frac{b}{a}x$ 的交点为 (x_n,y_n) $(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，求 (x_n,y_n).

【分析】 将交点问题转化为点坐标满足的数列递推关系.

【解】 由 $\begin{cases}y=-\frac{b}{a}x+b,\\ y=\frac{b}{a}x.\end{cases}$ 可得 $x=\frac{a}{2}$，即 $x_1=\frac{a}{2}$.

则过点 $(0,b)$ 和 $(x_{n-1},0)$ 的直线方程为 $\frac{x}{x_{n-1}}+\frac{y}{b}=1$，与 $y=\frac{b}{a}x$ 联立，得 $\frac{x}{x_{n-1}}+\frac{x}{a}=1$，即 $\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_n}{a}=1$，所以 $\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{a}$ $(n\geqslant2)$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{x_1}=\frac{2}{a}$ 为首项，$\frac{1}{a}$ 为公差的等差数列.

得 $\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+(n-1)\frac{1}{a}=\frac{n+1}{a}$. 解得 $x_n=\frac{a}{n+1}$，$y_n=\frac{b}{a}x_n=\frac{b}{n+1}$.

所以点 (x_n,y_n) 的坐标为 $\left(\frac{a}{n+1},\frac{b}{n+1}\right)$.

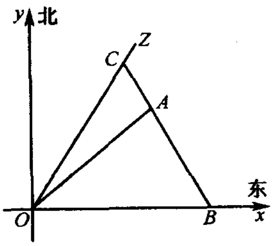


图 1-3

例7 如图 1-3，一科学考察船从港口 O 出发，沿北偏东 α 角的射线 OZ 方向航行，其中 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$. 在距离港口 O 为 $3\sqrt{13}a$（a 为正常数）海里北偏东 β 角的 A 处有一供给科学考察船物资的小岛，其中 $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}$，现指挥部紧急征调沿海岸线港口 O 正东方向 m 海里的 B 处补给船，速往小岛 A 装运物资供给科学考察船，该船沿 BA

方向不变,全速追赶科学考察船,并在 C 处相遇,经测算,当两船运行的航线与海岸线 OB 围成的三角形 OBC 面积 S 最小时,补给最合适.

(1)求 S 关于 m 的函数关系式 $S(m)$;

(2)当 m 为何值时,补给最合适?

【分析】 求解最值问题关键在于设法求出所求最值元素的函数表达式,而恰当选择自变量有利于简捷地求出函数表达式.

【解】 (1)设点 $A(x_0,y_0)$,由题意可知直线 OZ 的方程为 $y=3x$,$x_0=3\sqrt{13}a\sin\beta=9a$,$y_0=3\sqrt{13}a\cos\beta=6a$,所以 $A(9a,6a)$,$B(m,0)$,则直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{6a}{9a-m}(x-m)$.

由 $y=3x$ 及 $y=\dfrac{6a}{9a-m}(x-m)$,得 $C\left(\dfrac{2am}{m-7a},\dfrac{6am}{m-7a}\right)$.

所以 $S(m)=S_{\triangle OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot\dfrac{6am}{m-7a}=\dfrac{3am^2}{m-7a}(m>7a)$.

$$(2)S(m)=\frac{3am^2}{m-7a}=3a\left[(m-7a)+\frac{49a^2}{m-7a}+14a\right]$$
$$\geqslant 3a(2\sqrt{49}a+14a)=84a^2.$$

当且仅当 $m-7a=\dfrac{49a^2}{m-7a}$,即 $m=14a>7a$ 时,等号成立.

故当 $m=14a$ 海里时,补给最合适.

【说明】 此题为直线方程、函数综合的应用问题.

设 D 为△ABC 的边 BC 上任意一点,点 P 在线段 AD 上,过 D 作一直线分别与线段 AB,PB 交于点 M,E,与线段 AC,PC 的延长线交于点 F,N,如果 $DE=DF$,求证:$DM=DN$.

【分析】 本题是典型的直线型问题,可应用梅涅劳斯定理求解.但本题用解析几何处理,也不失为一种好的思路.

【证明】 以 MN 为 x 轴,过 D 与 MN 垂直的直线为 y 轴,建立直角坐标系.设 $E(-a,0)$,$F(a,0)$,$A(b,c)$,$P(rb,rc)(0<r<1)$,直线 BC 方程为 $y=kx$,则 AF 的直线方程为 $y=\dfrac{c}{b-a}(x-a)$.所以过 C 点的直线系方程为 $cx+(a-b)y-ca+\lambda(kx-y)=0$,　①

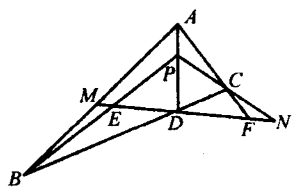


图 1-4

因为 PC 过 P 点,而 $P(br,cr)$,则 $\lambda=\dfrac{bcr+(a-b)cr-ac}{cr-kbr}$代入①,并令 $y=0$,解得 $x_N=\dfrac{acr(c-bk)}{cr^2+acrk-bcrk-ack}$.

同理考虑过 B 点的直线系方程,可得 $x_M=\dfrac{-acr(c-bk)}{cr^2+acrk-bcrk-ack}$.所以 $|DM|=|DN|$.

【证明】 类似的直线型几何问题,有时用直线系方程处理比较简洁.

【赛题训练】

一、选择题

1. 点 P 分$\overrightarrow{MN}$的比为λ，且$|MN|=3|NP|$，则λ的值为　（　）

A. 4 或 −2　　B. −3 或 1

C. −4 或 2　　D. −3 或 −1

2. 给出以下参数方程（t 为参数）：① $\begin{cases}x=t,\\y=1+t;\end{cases}$ ② $\begin{cases}x=t,\\y=1-t;\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x=-1+t,\\y=-t;\end{cases}$

④ $\begin{cases}x=-1-t,\\y=-t;\end{cases}$ ⑤ $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}t,\\y=2+\sqrt{2}t;\end{cases}$ ⑥ $\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ 则它们表示的直线共有　（　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

3. 直线 l 过点 $M(-1,2)$，且与以 $P(-2,-3)$，$Q(4,0)$ 为端点的线段相交，则 l 的斜率的取值范围是　（　）

A. $\left[-\frac{2}{5},5\right]$　　B. $\left[-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,5]$

C. $\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right]\cup[5,+\infty)$　　D. $\left[-\frac{2}{5},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},5\right]$

4. 平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，若点 C 满足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且 $\alpha+\beta=1$，则 C 点的轨迹方程为　（　）

A. $3x+2y-11=0$　　B. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C. $2x-y=0$　　D. $x+2y-5=0$

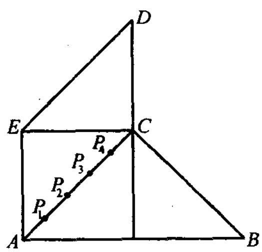
5. 若点 $A(x,y)$ 在第一象限，且 $2x+3y=6$，则 $\log_{\frac{3}{2}}x+\log_{\frac{3}{2}}y$　（　）

A. 有最大值 1　　B. 有最小值 1

C. 有最大值$\frac{3}{2}$　　D. 既无最大值也无最小值

6. 某县位于山区，农民居住区域大致呈下图所示的五边形，近似由一个正方形和两个等腰直角三角形组成，若 $AB=60\text{km}$，$AE=CD=30\text{km}$. 为了解决当地群众看电视难的问题，准备建一个电视转播台，理想方案是转播台距五边形的顶点的距离的平方和最小，图中 P_1,P_2,P_3,P_4 是 AC 的五等分点，则转播台应建在　（　）

A. P_1 处　　B. P_2 处　　C. P_3 处　　D. P_4 处



（第 6 题）

二、填空题

7. 已知函数 $f(x)=a\sin x-b\cos x$ 图像的一条对称轴是 $x=\frac{\pi}{4}$，则直线 $ax-by+c=0$ 的倾斜角是________.

8. 已知点 P 是直线 $l:2x-y-4=0$ 与 x 轴的交点，把直线 l 绕点 P 逆时针方向旋转 $45°$，则旋转后的直线方程为________.

9. 一条光线从点 $A(3,2)$ 射入，经 x 轴反射，通过点 $B(-1,6)$，则入射光线的方程为________.

10. 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a,b,c 是取自集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，那么，这样的直线的条数是______.

11. 无论 m 取何实数，动直线 $(2-m)x+(m+1)y-4-m=0$ 必经过定点________.

12. 已知曲线 $|xy|+1=|x|+|y|$，则其所围成的图形面积为________.

三、解答题

13. 设 A 是直线 $l:y=3x$ 上在第一象限内的点，$B(3,2)$ 为定点，直线 AB 交 x 轴的正半轴于 C，求 $\triangle OAC$ 面积的最小值，并求此时 A 点的坐标.

14. 已知实数 a,b,c 不全相等，求证三条直线

$l_1:(b-c)x+(c-a)y+(a-b)=0$,

$l_2:(c-a)x+(a-b)y+(b-c)=0$,

$l_3:(a-b)x+(b-c)y+(c-a)=0$，交于一点.

15. 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图像交于 A,B 两点，分别过点 A,B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图像交于 C,D 两点.

(1)证明：点 C,D 和原点 O 在同一条直线上；

(2)当 BC 平行于 x 轴时，求点 A 的坐标.

二、两直线的位置关系

1. 两直线的位置关系

设直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$.

(1) l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow A_1B_2\neq A_2B_1$，特别地：当 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 时，$l_1\perp l_2$.

(2) l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow A_1B_2=A_2B_1$ 且 $A_1C_2\neq A_2C_1$.

(3) l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow A_1B_2=A_2B_1$ 且 $A_1C_2=A_2C_1$.

2. 点到直线的距离

设点 $A(x_0,y_0)$，直线 $l:Ax+By+C=0$，点 A 到 l 的距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

特别地：当 $A\in l$ 时，$d=0$.

3. 两平行线距离

设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_1/\!/l_2$，则可设 $l_2:A_1x+B_1y+C_2=0(C_1\neq C_2)$，$l_1$ 与 l_2 之间的距离：$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$.

4. 两直线的夹角

设直线 l_1 的斜率为 k_1，l_2 的斜率为 k_2.

(1) l_1 到 l_2 的角 α，$\tan\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$，$\alpha\in[0,\pi)$，当 $k_1k_2=-1$ 时，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) l_1 和 l_2 的夹角 θ，$\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$，$\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，当 $k_1k_2=-1$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

5. 直线系方程

(1)平行直线系：$y=kx+b$（k 为常数，b 为变量）.表示一组斜率为 k 的平行直线系.

(2)共点直线系：$y-y_0=k(x-x_0)$（定点 (x_0,y_0)，k 为变量），表示一族过定点 (x_0,y_0) 的直线系（不包括 $x=x_0$）.

(3)过直线 l_1,l_2 交点的直线系：设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，则 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0(\lambda\in\mathbf{R})$ 表示一族过 l_1,l_2 交点的直线系（不包括 l_2）.

6. 轴对称

点 $P(x_1,y_1)$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0$ 的对称点 $Q(x_2,y_2)$，满足

$$\begin{cases}\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1,\\ A\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+B\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}+C=0,\end{cases}$$

解关于 x_2,y_2 的方程组，即可得点 Q 的坐标.

7. 方法指导

(1)两直线的交角

"夹角"与"倒角"的公式都是在两条直线的斜率都存在的情况下成立的，应注意直线的斜率不存在时求"夹角"或"倒角"，要充分运用数形结合的思想.

(2)直线系的设置

①与 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系可设为 $Ax+By+m=0(m\neq C)$；

②与 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系设为 $Bx-Ay+n=0$.

例1 当 m 为何值时，直线 $l_1:mx+y-(m+1)=0$ 和 $l_2:x+my-2m=0$.

(1)互相平行；(2)互相垂直.

【分析】 涉及到平行、垂直等位置关系的问题时，必须用直线方程的系数来反映，这是解题的切入点.

【解】 (1)因为 $A_1=m$，$B_1=1$，$C_1=-(m+1)$，$A_2=1$，$B_2=m$，$C_2=-2m$.

由 $\begin{cases}A_1B_2-A_2B_1=0,\\ A_1C_2-A_2C_1\neq0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}m^2-1=0,\\ -2m^2+m+1\neq0,\end{cases}$

解得 $m=-1$，即当 $m=-1$ 时，$l_1/\!/l_2$.

(2)由 $A_1A_2+B_1B_2=0$，得 $m+m=0$， 所以 $m=0$.即当 $m=0$ 时，$l_1\perp l_2$.

【说明】 在两条直线 l_1,l_2 的斜率都存在，且不重合的条件下，才有 $l_1/\!/l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$ 与 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.要注意斜率不存在的直线的特殊性.

例2 在直线 $l: x+y-5=0$ 上找一点 $P(x,y)$，使得点 $P(x,y)$ 对 $A(1,0)$，$B(3,0)$ 的视角 $\angle APB$ 最大.

【分析】 求点 P 的坐标，一般来说要通过三角函数值来刻画，显然 $\angle APB$ 是锐角，要使 $\angle APB$ 最大，只需求出夹角 $\angle APB$ 的正切表达式，再去找最大值. 凡是处理斜率的问题都需要注意斜率不存在的情况，故作 AE，BF 垂直 AB 交 l 与 E，F，只需求当 P 不与 E，F 重合时夹角 $\angle APB$ 的表达式.

【解】 如图 1-5，$|AB|=2$，$P(x,y)$ 为 l 上的点，作 AE，BF 垂直 AB，且交 l 于 E，F，显然 $\angle AEB<\angle AFB$，且 $\angle AFB=\frac{\pi}{4}$.

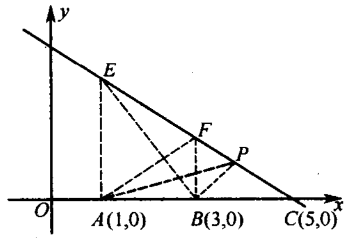


图 1-5

当 P 点不与 E，F 重合时，直线 AP，BP 的斜率分别为 $k_{PA}=\frac{y}{x-1}$，$k_{PB}=\frac{y}{x-3}$.

设 $\angle APB=\alpha$，并记 $\tan\alpha=A$.

(1)当 P 位于上半平面时，

$$A=\frac{k_{PB}-k_{PA}}{1+k_{PB}\cdot k_{PA}}=\frac{\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x-1}}{1+\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x-3}}, \qquad ①$$

整理得：$A(x^2-4x+3+y^2)=2y$.

得 $x=5-y$ 代入①，得 $Ay^2-(3A+1)y+4A=0$.

此时 $\Delta=(3A+1)^2-16A^2\geqslant 0$，即 $7A^2-6A-1\leqslant 0$.

解得 $-\frac{1}{7}\leqslant A\leqslant 1$.

显然 $A>0$，且 $A\neq 1$，故 $A<1$，说明 $\angle APB<\frac{\pi}{4}$.

(2)当 P 位于下半平面时，

$$A=\frac{k_{PA}-k_{PB}}{1+k_{PA}k_{PB}}=\frac{\frac{y}{x-1}-\frac{y}{x-3}}{1+\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x-3}},$$

整理并将 $x=5-y$ 代入，可得 $Ay^2-(3A-1)y+4A=0$，

此时 $\Delta=(3A-1)^2-16A^2\geqslant 0$. 即 $7A^2+6A-1\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant A\leqslant\frac{1}{7}$.

同样，不难看出 $A>0$，从而 $A_{\max}=\frac{1}{7}$，$\alpha_{\max}=\arctan\frac{1}{7}$.

综上所述，$\angle APB$ 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$，点 P 的坐标为 $(3,2)$.

【说明】 本题也可以说成“足球射门”问题，假设 AB 代表球门，在直线 $x-y+5=0$ 上的球员应站在何处射门容易射中.

例3 已知直线 $l_1:2x+y-4=0$,求 l_1 关于直线 $l:3x+4y-1=0$ 对称的直线 l_2 的方程.

【分析】 若 l_1,l_2 关于 l 对称,它们应具有如下性质:(1)若 l_1,l_2 相交,则 l 是 l_1,l_2 的交角平分线;(2)l 上任一点到 l_1,l_2 的距离相等;(3)若点 A 在直线 l_1 上,则点 A 关于 l 的对称点一定在 l_2 上,解题的基本思路,是把这些几何性质和坐标式方程联系起来,体现了解析几何的基本思想方法.

【解法一】 由 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\3x+4y-1=0,\end{cases}$ 得 l_1,l 的交点 $P(3,-2)$,显然 P 也在 l_2 上.

设 l_2 的斜率为 k,又 $k_{l_1}=-2,k_l=-\dfrac{3}{4}$,于是 $\dfrac{-\dfrac{3}{4}-(-2)}{1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)(-2)}=\dfrac{k-\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)k}$,解得 $k=-\dfrac{2}{11}$,故直线 l_2 的方程为 $y+2=-\dfrac{2}{11}(x-3)$,即 $2x+11y+16=0$.

【解法二】 同解法一,先求出点 $P(3,-2)$,设 l_2 的斜率为 k,则 l_2 的方程为 $y+2=k(x-3)$,即 $kx-y-3k-2=0$.

在 l 上取一点 $A(-1,1)$,于是 $\dfrac{|-k-1-3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|-2+1-4|}{\sqrt{2^2+1}}$.

解得 $k=-\dfrac{2}{11}$ 或 -2(舍去).故 l_2 的方程为 $2x+11y+16=0$.

【解法三】 同解法一,先求出 $P(3,-2)$,在 l_1 上取一点 $B(2,0)$,又设 B 点关于直线的对称点 $C(x_0,y_0)$,则 $\begin{cases}\dfrac{y_0-0}{x_0-2}=\dfrac{4}{3},\\3\cdot\dfrac{2+x_0}{2}+4\cdot\dfrac{0+y_0}{2}-1=0,\end{cases}$ 解得 $C(\dfrac{4}{5},-\dfrac{8}{5})$.

由两点式可求出 l 的方程为 $2x+11y+16=0$.

【解法四】 设直线 l_2 上的动点 $M(x,y)$ 关于 l 的对称点为 $M'(x_0,y_0)$,则

$$\begin{cases}\dfrac{y_0-y_0}{x_0-x}=\dfrac{4}{3},\\3\cdot\dfrac{x_0+x}{2}+4\cdot\dfrac{y_0+y}{2}-1=0,\end{cases}\quad 解得\ x_0=\frac{7x-24y+6}{25},y_0=\frac{-24x-7y+8}{25}.$$

显然,$M'(x_0,y_0)$ 在 l_1 上,故 $2\cdot\dfrac{7x-24y+6}{25}+\dfrac{-24x-7y+8}{25}-4=0$.

即 $2x+11y+16=0$,它就是所求的直线 l_2 的方程.

【说明】 两个条件确定一条直线,解法一、二、三除了确定点 P 外,还根据图形的几何性质,分别找出了确定直线的另一个条件:斜率或另一点;解法四是直接用轨迹法求方程.

例4 过 $P(0,1)$ 作直线,使它被两已知直线 $l_1:x-3y+10=0,l_2:2x+y-8=0$ 所截得的线段平分于 P,求直线 l 的方程.

【分析】 此题的聚焦所在为点 P,可利用中点坐标求直线 l 的斜率 k,也利用中点坐标求点