21世纪高等学校规划教材

Textbook Series of 21st Century

线性代数

邢丽君　禹海兰　主　编

王晓慧　张宏志　曲中宪　张　杰　郭丽杰　副主编

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st Century

线性代数

主　编　邢丽君　禹海兰
副主编　王晓慧　张宏志　曲中宪
张　杰　郭丽杰
编　写　宋代清　王　刚　常志文
主　审　王文杰

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材.

线性代数是理工科院校重要的基础课，它的理论和方法已成为科学研究及处理各领域工程技术问题的有力工具. 本书在总结多年教学经验基础上，充分吸取了现有教材的优点和教学成果编写而成. 本书理论叙述严谨、精炼、概念明确、系统性强. 本书适用于工科院校本科生线性代数课程教学.

全书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等内容，书后还配了综合训练题，作为学生复习参考. 本教材教学需48学时，如果不讲第六章需40学时.

本书可以作为普通高等教育理工科院校本科教材，也可供高职高专相关专业师生参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/邢丽君，禹海兰主编. —北京：中国电力出版社，2006

21世纪高等学校规划教材

ISBN 7-5083-4445-6

Ⅰ.线…　Ⅱ.①邢…　②禹…　Ⅲ.线性代数－高等学校－教材　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第058412号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

利森达印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2006年7月第一版　2006年7月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　9.75印张　219千字

印数0001—3000册　定价**15.00**元

版 权 专 有　翻 印 必 究

（本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换）

前　言

21 世纪是充满生机和活力、富于竞争和挑战的时代，是经济全球化、知识多元化的时代，是科学技术突飞猛进和经济迅速发展的时代. 在新的历史时代，培养有创新精神、有发展潜力，胜任国际竞争的挑战，适应社会和经济建设需要的人才，是大学教育的一个重要目标. 而在工科大学教育中，数学课程既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用.

本书是充分考虑了培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求，吸取多年来本科数学教学改革的经验而编写的. 本书在编写过程中，注重课程内容的有机结合，强调对基本理论、解题方法的严谨精练阐述，力求例题和习题的选取丰富、具有综合性和实际应用性，重视对学生分析问题、解决问题及创新能力的培养.

本书内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换. 讲授教材的全部内容约需 48 学时.

本书第一章由郭丽杰编写，第二章由邢丽君编写，第三章由禹海兰编写，第四章由王晓慧编写，第五章由曲中宪、张杰编写，第六章由张宏志编写.

本书由东北电力大学王文杰教授主审，他提出了许多宝贵意见，在此深表感谢.

《线性代数》编写组

2005 年 11 月

目录

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

第一章　行　列　式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和求解线性方程组的克莱姆法则.

1.1　全排列与逆序数

为了引入 n 阶行列式的定义，本节首先介绍排列与逆序数的概念.

把 n 个互异的元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**（简称**排列**）. n 个互异元素的排列共有 $n!$ 种. 例如，自然数 1，2，3 的排列共有六种，即

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321$$

为了方便，今后把自然数 1，2，3，…，n 视为 n 个不同元素的代表. 用 p_i 表示这 n 个数中的一个元素（$i=1,2,\cdots,n$），且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2\cdots p_n$ 便是 1，2，3，…，n 的一个排列. 对排列 $p_1p_2\cdots p_n$，我们把排在 p_i 前面且比 p_i 大的数的个数 t_i 称为 p_i 的**逆序数**，把这个排列中各元素的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n$$

称为这个**排列的逆序数**. 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

【例 1-1】　求下列排列的逆序数：

(1) 32514；　　(2) 42513.

解　(1) 在排列 32514 中，

3 排在首位，故 3 的逆序数是 0；

2 的前面比 2 大的数有一个（3），故 2 的逆序数是 1；

5 是最大数，故 5 的逆序数是 0；

1 的前面比 1 大的数有三个（3，2，5），故 1 的逆序数是 3；

4 的前面比 4 大的数有一个（5），故 4 的逆序数是 1.

于是这个排列的逆序数为

$$\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$$

(2) 同理　$\tau(42513)=0+1+0+3+2=6$

通常把逆序数是奇数的排列称为**奇排列**，逆序数是偶数的排列称为**偶排列**. 例如 32514 是奇排列，42513 是偶排列.

显然，排列 $123\cdots n$ 的逆序数是 0，故它是偶排列，称此排列为**标准排列**（或**自然排列**）.

【例 1-2】　求排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解　$\tau(n(n-1)\cdots21)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，$n(n-1)\cdots21$ 是偶排列；

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，$n(n-1)\cdots21$ 是奇排列.

1.2 对换

在一个排列中，将某两个数的位置对调（其他数不动）的变动叫做一个**对换**. 两个相邻数的对换称为**相邻对换**.

定理 1.1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然 a_1，$\cdots$，a_l；b_1，$\cdots$，b_m 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性不同.

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证　由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列，因此推论成立.

1.3 n 阶行列式的定义

本节利用排列与逆序数的知识，分析、总结 2 阶、3 阶行列式的结构、规律，并利用这些规律定义 n 阶行列式.

设 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 是 4 个数，称代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为 **2 阶行列式**，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称 a_{ij}（i，$j=1$，2）为这个行列式的元素. a_{ij} 的两个下角标 i，j 表示 a_{ij} 所在的行和列的序号，分别称为行标和列标.

设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.1}$$

记作
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.2)$$
式（1.2）称为数表（1.1）所确定的**3 阶行列式**

例如
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=3\times1\times0+0\times2\times2+4\times1\times1-3\times2\times1-0\times1\times0-4\times1\times2=-10$$

由 3 阶行列式的定义可以看出：

（1）3 阶行列式的每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积.

（2）当每项中各元素的行标都取标准排列时，其列标都是 1，2，3 的一个排列，且每一个排列都对应 3 阶行列式的一项，所以 3 阶行列式共有 3! 项.

（3）对于形如 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的项，其正负符号与它的列标的排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数间有以下关系：当 $\tau(p_1p_2p_3)$为奇数时，该项取负号；当 $\tau(p_1p_2p_3)$为偶数时，该项取正号.

将其推广可得出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \qquad (1.3)$$
其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数（称为元素）. 每取由 1 至 n 的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$，做 n 个元素 a_{1p_1}，a_{2p_2}，…，a_{np_n} 的乘积，并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$，便得到一项
$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$
这样的项共有 n! 个. 称这 n! 项的代数和为与数表（1.3）相对应的 n 阶行列式，记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$
其中“$\sum$”表示对 $p_1p_2\cdots p_n$ 的所有排列取和. 也可把行列式简记为 $\Delta(a_{ij})$. 有时也将 n 阶行列式记作 D_n.

当 $n=2$，3 时，就是前面定义的 2，3 阶行列式，当 $n=1$ 时，规定 1 阶行列式 $|a|=a$.

【例 1 - 3】 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

解 这是一个 4 阶行列式，在展开式中应有 $4!=24$ 项．但在每项 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中，只要有一个元素等于零，该项就是零，所以只需计算不含零元素的项．

由于第一行中除 a_{11} 外其他元素都是零，所以 D 中除形如

$$(-1)^{\tau(1p_2p_3p_4)}a_{11}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \tag{1.4}$$

的项外，其他项都是零．又由于第二行中除 a_{21}，a_{22} 外其他元素都是零，而在形如式（1.4）的项中，不能取 $p_2=1$，这是由于 a_{11} 与 a_{21} 是同列元素，所以 D 中不等于零的项只能是形如

$$(-1)^{\tau(12p_3p_4)}a_{11}a_{22}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

如此继续下去，可知 D 中不等于零的项只能是 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$．

由定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

推广到 n 阶行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种主对角线（从左上角到右下角这条线）以上(下)的元素都是 0 的行列式，叫做**下(上)三角行列式**.

同理可求得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n$，称该行列式为**对角行列式**.

在行列式的定义中，为了讨论方便而把每一项的 n 个元素的行标写成标准排列．事实

上，数的乘法是可交换的，因而这 n 个元素的次序是可以交换的. 一般地，n 阶行列式中的每一项不考虑符号可以写成

$$a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列. 利用定理 1.1 可以证明，$a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$ 前面的符号等于

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$$

于是 n 阶行列式的定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

1.4 行列式的性质

因为 n 阶行列式共有 n! 项，故用定义计算高阶行列式工作量较大. 本节介绍行列式的性质，并利用行列式的性质计算行列式.

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**. 有时也将 D^{T} 写作 D'.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等.

证　设 D^{T} 的 i 行 j 列元素为 b_{ij}（i，j=1，2，…，n），则

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

由行列式定义有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} b_{p_1 1}b_{p_2 2}\cdots b_{p_n n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = D \end{aligned}$$

由此性质可知，行列式的性质凡是对行成立的对于列也同样成立，反之亦然.

性质 1.2　互换行列式的任意两行（列），行列式改变符号.

证　设行列式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 D_1 是交换 D 的 i，j 两行得到的. 令 $b_{ik}=a_{jk}(k=1,\ 2,\ \cdots n)$，$b_{jk}=a_{ik}(k=1,\ 2,\ \cdots n)$，则

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

由定理 1.1 知

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}$$

故 $D_1=-\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$

推论　若行列式中有两行(列)元素相同，则此行列式等于 0.

证　把元素相同的两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 1.3　若行列式中某行(列)元素有公因数 k，则 k 可以提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　由行列式定义

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

推论　若行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式等于零.

性质 1.4 若行列式的某一行(列)元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于以下两个行列式之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.5 把行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用上述性质可以简化行列式的计算，为清楚起见，交换行列式第 i，j 两行(列)，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$(或 $c_i\leftrightarrow c_j$)；行列式第 i 行(列)乘以 k，记作 kr_i(或 kc_i)；以数 k 乘行列式第 i 行(列)加到第 j 行(列)上，记作 r_j+kr_i（或 c_j+kc_i）.

【例 1 - 4】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$.

解

$$D\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_2}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\0&0&2&-4\\0&0&0&5\end{vmatrix}=1\times(-1)\times 2\times 5=-10$$

【例 1 - 5】 证明$\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}=0.$

证

$$\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_3\\c_3-c_2}}\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2a+3&2a+5\\b^2&2b+1&2b+3&2b+5\\c^2&2c+1&2c+3&2c+5\\d^2&2d+1&2d+3&2d+5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2&2\\b^2&2b+1&2&2\\c^2&2c+1&2&2\\d^2&2d+1&2&2\end{vmatrix}=0$$

【例 1 - 6】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

解

$$D_n\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x&a&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n - r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

1.5 行列式展开定理

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，为此，引入行列式的余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，且其余元素仍按原相对位置排列所得的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**余子式**，并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 中，元素 $a_{23}=2$ 的余子式及代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

引理 1.1 如果 n 阶行列式 D 中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都是零，那么行列式 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}$$

证 先证 a_{ij} 位于第 n 行第 n 列处的情形，此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

由于只有 $p_n = n$ 时，a_{np_n} 才可能不为零，于是

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_{n-1} n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{nn} \\ &= a_{nn} \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_{n-1} n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} \end{aligned}$$

$$= a_{nn}M_{nn} = a_{nn}A_{nn}$$

再证一般情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n-i)+(n-j)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

$$= a_{ij}[(-1)^{(n-i)+(n-j)}M_{ij}] = a_{ij}[(-1)^{i+j}M_{ij}] = a_{ij}A_{ij}$$

定理 1.2 **行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即**

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, i = 1,2,\cdots,n$$

或
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, j = 1,2,\cdots,n$$

证 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

同理可证

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

推论 **行列式任一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零．即**

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n;$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$$

证 把行列式 D 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在上式中把 a_{jk} 换成 a_{ik}（$k=1$，2，$\cdots$，n），可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $i\neq j$ 时，上式右端行列式中有两行元素对应相同，故此行列式为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$$

同理按列进行展开，可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$$

综合定理 1.2 及推论，有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i\neq j; \end{cases}$$

或
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i\neq j; \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i\neq j. \end{cases}$

【例 1-7】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & -3 \end{vmatrix}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com